АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

4245—5014

*

№ 6 **1956**

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Амаев, Г. Д. Афанасьев, В. И. Дикушин, В. Ю. Ломоносов, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), В. В. Покшишевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 2
Основания математики и математическая логика 4
Теория чисел 7
Алгебра 13
Многочлены и линейная алгебра 13
Группы 16
Поля, кольца и структуры 21
Топология 25
Теория функций действительного переменного 27
Теория множеств 29
Приближение функций полиномами и их обобщениями 29
Теория функций комплексного переменного . 33
Дифференциальные уравнения 42
Обыкновенные дифференциальные уравнения 42
Уравнения в частных производных . . . 59
Приложения к физике, технике и естественным наукам 62
Интегральные уравнения 64
Приложения интегральных уравнений . . —
Вариационное исчисление . . . . . —
Анализ (другие вопросы) 66
Числовые ряды 69
Специальные функции 71
Интегральные преобразования и операционное исчисление 74
Приложение общих методов математического анализа 76
Функциональный анализ 76
Теория вероятностей 82
Математическая статистика 84
Теория игр и математическая экономика 86
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . 91
Геометрия 91
Приложение геометрии 94
Проективная и начертательная геометрия 96
Алгебраическая геометрия 98
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 103
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 107
Метрические методы в геометрии 119
Геометрия выпуклых многообразий . . . 121
Численные и графические методы 124
Таблицы . . . . . —
Математическая теория электрических цепей . —
Вычислительные машины и математические приборы 133
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 145
Авторский указатель 148

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42 Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*,
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, М. М. Постников, С. П. Фиников*

Рефераты 4245—5014 **№ 6** **Июнь 1956 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

4245. Пути развития венгерской науки. Русняк Иштван, Вестн. АН СССР, 1955, № 5, 52—57

4246. Доклад о дальнейших задачах и об успехах, достигнутых после освобождения, в области технических наук. [Заседание отделения физико-математических наук АН Венгрии, 25 мая 1955 г.]. Хайош (Beszámoló az osztály tudományterületein a felszabadulás óta elért eredményekröl és a további feladatokról. Hajós György), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, 5, № 3, 283—297 (венг.)

4247. Работы Сабадшагхедьского астрономического института после освобождения. Детре (A szabadsághegyi csillagvizsgáló intézet a felszabadulás után. Detre László), Magyar tud. akad. mat. és. fiz. oszt. közl., 1955, 5, № 3, 298—299 (венг.)

Выступление по поводу доклада Хайоша (реф. 4246).

4248. Необходимость новой общегосударственной политики и программы в преподавании математики в старших классах средней школы. Рив (The need for a new national policy and program in secondary mathematics. Reeve William David), Math. Teacher, 1955, 48, № 1, 2—9 (англ.)

Критика публикаций, посвященных вопросу о реорганизации преподавания математики в старших классах школ США в целях «составления удовлетворительного курса, отвечающего запросам всех групп учащихся различных способностей, считающих изучение математики для себя необходимым». В. И. Левин

4249. Новая роль математики в образовании. Брок (The new role of mathematics in education. Brock Paul), Math. Teacher, 1955, 48, № 5, 305—307 (англ.)

Подчеркивается значение математического образования для промышленности и отмечается недостаток в математически образованных кадрах в США.

В. И. Левин

4250. Современные методы математического образования и их критика. Хартунг (Modern methods and current criticisms of mathematical education. Hartung Maurice L.), School Sci. and Math., 1955, 55, № 2, 85—90 (англ.)

Доклад на общем собрании Центральной ассоциации учителей математики и физики США, в котором автор отвечает на критику программ и методики преподавания математики в современной американской школе.

В. И. Левин

4251. Анализ математических курсов в четырехгодичных колледжах. Рид, Клейн (An analysis of mathematics courses in four year colleges. Read C. B., Klein A. E.), School Sci. and Math., 1955, 55, № 1, 40—55 (англ.)

Авторы анализируют программы по математике, действующие в различных колледжах США, с точки зрения их эквивалентности по объему, количеству часов, требуемой подготовке и глубине изложения. Выбор 113 колледжей (10% от общего числа) был произведен при помощи таблицы случайных чисел. Результаты анализа свидетельствуют о значительном разнобое, затрудняющем переход студентов из одного колледжа в другой. Статья содержит две таблицы, характеризующие распределение различных математических курсов (обязательных и факультативных) по выбранным колледжам. В. И. Левин

4252. Английский учитель изучает американскую систему обучения математике. Брейс (An English schoolmaster looks at American mathematics teaching. Brace W. S.), Math. Gaz., 1955, 39, № 328, 89—97 (англ.)

Проводится сравнение систем преподавания математики в средних школах Англии и США. Отмечается большое разнообразие программ и учебных планов в США, а также, в общем, более формальный характер преподавания в американских школах. В. И. Левин

4253. Математика и общее образование. Диксон (Mathematics and general education. Dixon Lyle J.), Math. Teacher, 1955, 48, № 4, 204—208 (англ.)

Формулируются основные требования, которым должен удовлетворять математический курс, читаемый в целях общего развития студентам разных специальностей без особого учета прикладного значения математики. Приводятся примерные программы таких курсов и систем курсов. В. И. Левин

4254. Элементы истории математики при преподавании в средней школе. Каллинг (Matemaatika ajaloo elemente matemaatika õpetamisel keskkoolis. Kalling R.), Nõukogude kool, 1955, № 5, 293—297 (эст.)

Выясняется значение сообщения сведений по истории математики на уроках средней школы. В статье приводится ошибочное утверждение, что логарифмы являются русским изобретением (со ссылкой на статью, помещенную в журнале «Математика в школе» № 2 за 1951 г.). И. Я. Депман

4255. Симпозиум по введению истории науки в систему образования в школе. I. История математики. Фудзита (高等學校理數科教育に科學史をいかに導入するか. 11月22日阪神支部におけるシンポジウムの報
I. 高校數學への數學史の導入. 藤田輝男), 科學史研究 (Кагакуси кэнкю, J. History Sci. Japan), 1955, № 34, 35—36 (япон.)

4256. Методика преподавания статистики. Маслов П. Т., Науч. зап. Моск. финанс. ин-та, 1955, вып. 7, 95—119

4257. О политехнической подготовке будущих учителей математики. Нагибин Ф., Народное образование, 1955, № 12, 29—33

4258. К методике изложения отдела непрерывных функций в курсе математического анализа. Зуховицкий, Погребисский (До методики викладання розділу про неперервні функції у курсі математичного аналізу. Зуховицький С. І., Погребиський Й. Б.), Наук. зап. Луцьк. держ. пед. ін-ту, 1955, 3, № 2, 47—54 (укр.)

4259. К вопросу о методике изложения теории поляр и полярных плоскостей в курсе аналитической геометрии на физматах педагогических институтов. Дидин И. Е., Сб. тр. Ставроп. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 9, 277—281

4260. Имеет ли место «12:2·3=18» или «12:2·3=2»? К вопросу о символике в математике. Бекке, Хазенйегер (Gilt «12 : 2·3=18» oder «12 : 2·3=2»? Zur Symbolik in der Mathematik. Behnke H., Hasenjaeger G.), Math.-phys. Semesterber., 1955, 4, № 3—4, 250—255 (нем.)

4261. Статистика — служанка всех наук. Нейман (Statistics — servant of all sciences. Neyman Jerzy), Science, 1955, 122, № 3166, 401—406 (англ.)

4262. Математическая статистика и теория вероятностей в школе. Штендер (Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Schule. Stender Richard), Math.-phys. Semesterber, 1955, 4, № 3—4, 270—280 (нем.)

4263. Сущность математики. Кемпбелл (The essence of mathematics. Campbell J. T.), New Zealand Sci. Rev., 1955, 13, № 7—8, 85—86 (англ.)

4264 К. Сборник методических статей. (Математика, физика, астрономия). Ред. **Никулин Н. А.,** Крымск. пед. ин-т, Симферополь, 1955, 119 стр., илл. Беспл.

4265 Д. Проекционный чертеж при преподавании стереометрии в 9-х и 10-х классах средней школы. Назаретский В. Е. Автореф. дисс. канд. пед. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1955

4266 Д. Учебное руководство по высшей математике для экономических вузов. Шамшин М. И., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ташкентск. физ.-эконом. ин-т, Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1955

4267 Д. Функциональная зависимость величин в школьном курсе математики в связи с задачами политехнического обучения в общеобразовательной школе (на материале алгебры старших классов). **Цвид Ф. А.** Автореф. дисс. канд. пед. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1955

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

4268. История математики как важный момент в математическом образовании. Вучкич (Historija matematike kao značajan momenat u nastavi matematike. Vučkić M.), Настава мат. и физ., 1955, 4, № 1, 9—14 (хорв.; рез. нем.)

Доклад на II конгрессе математиков и физиков Югославии (Загреб, 1954).

4269. Первый русский доктор математических наук Парижского университета. Депман И. Я. В сб.: Историко-матем. исследования, вып. 8, М., Гостехиздат, 1955, 630—635

Сообщается о первой защите докторской диссертации в Парижском университете русским ученым Павлом Александровичем Затеплинским (26 июля 1823 г.). Этим опровергается распространенное мнение о том, что первым таким диссертантом был акад. В. Я. Буняковский, защита диссертации которого состоялась 21 мая 1825 г. Даются краткие сведения о биографии и научно-педагогической деятельности П. А. Затеплинского. Л. А. Стебакова

4270. Генрих Брандт. Эйхлер (Heinrich Brandt. Eichler Martin), Math Nachr., 1955, 13, № 6, 321—326 (нем.)

Некролог известного немецкого математика Генриха Брандта (1886—1954). Приложен список трудов (40 названий).

4271. 70-летие профессора доктора Франтишека Кадержавека. Кепр (Sedmesát let prof. ing., dr. Františka Kadeřávka. Kepr Bořivoj), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 3, 375—382 (чеш.)

4272. Проф. Вацлав Серпинский — лауреат научной премии г. Варшавы. Куратовский (Prof. Wacław Sierpiński laureat nagrody naukowej m. Warszawy. Kuratowski Kaz.), Problemy, 1955, 11, № 4, 273—274 (польск.)

К десятой годовщине освобождения Варшавы проф. В. Серпинский был награжден научной премией г. Варшавы. Автор отмечает мировую известность проф. Серпинского (доктора honoris causa семи университетов и члена девяти заграничных академий), его активную работу в ряде отделов математики (около 600 публикаций) и особенно его влияние на стиль работы Польской математической школы. Ф. В. Широков

4273. Жизнь и деятельность Селе Тибора. Фукс (Szele Tibor élete és munkássága. 1918—1955. Fuchs László), Mat. lapok, 1955, 6, № 2—3, 97—129 (венг.)

4274. Симпозиум, посвященный памяти Генри Фера. Трост (Symposium zur Erinnerung an Henri Fehr. Trost Ernst), Elem. Math., 1955, 10, № 5, 115—117 (нем.)

4275. Памяти Исая Шура (Issai Schur zum Gedächtnis), Math. Z., 1955, 63, № 1, 1 (нем.)

К четырнадцатилетию со дня смерти немецкого математика Исая Шура.

4276. Леонард Эйлер умер 18 сентября 1783 г. в Петербурге. Андерс (Leonard Euler gest. am 18. September 1783 in Petersburg. Anders G.), Wiss. und Fortschr., 1955, 5, № 9, 268 (нем.)

4277. Базельские математики XVIII века. План Собрания их сочинений. Шпис (Die Basler Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts. Plan zu einer Gesamtausgabe ihrer Werke. Spiess Otto). Der Briefwechselvon Johann Bernoulli, B. 1., Basel, Birkhäuser Verlag, 1955, 9—85) (нем.)

Статья напечатана в качестве предисловия к тому 1 «Переписки Иоганна I Бернулли» (реф. 4278), которая является в свою очередь первой серией Собрания сочинений базельских математиков XVIII в. Это Собрание намечено к изданию Бернуллиевской комиссией Базельского общества естествоиспытателей, организованной по инициативе автора в 1935 г. Ввиду осуществляющегося уже в Базеле издания Собрания сочинений Л. Эйлера в число ученых, труды которых должны войти в намеченное Собрание, включены 8 членов фамилии Бернулли — Якоб I (1655—1705), Иоганн I (1667—1748), Николай I (1687—1759), Николай II (1695—1726), Даниил I (1700—1782), Иоганн II (1710—1790), Иоганн III (1744—1807) и Якоб II (1759—1789) — и близко стоящий к старшим членам этой фамилии Якоб Герман (1678—1733). Из этих лиц Я. Герман, Николай II, Даниил и Якоб II Бернулли состояли в разное время действительными членами Петербургской академии наук, а Иоганн I, Иоганн III и некоторые из вышеупомянутых — также ее почетными членами (о Бернулли см., например, очерк Ю. Ф. Виппера «Семейство математиков Бернулли», М., 1875).

В Собрание сочинений намечено включить все опубликованные и неопубликованные рукописи и письма Якоба I, Иоганна I и Даниила Бернулли и наиболее интересные рукописи остальных 6 ученых. Впрочем, переписка их с Лейбницем и Эйлером не предусмотрена, так как она подлежит рассмотрению в Сочинениях Лейбница и Эйлера.

Вступительная статья содержит обоснование выбора материала, описание сохранившихся рукописей и план Собрания сочинений.

В первом разделе изложена история розысков и попыток издания переписки Бернулли, начиная с XVIII в. Подчеркивается роль цюрихского астронома Р. Вольфа (1816—1893) в розысках писем Бернулли, хранившихся несколько десятков лет безвестно в Архиве Шведской академии наук и в Готе. Автор касается деятельности Г. Энестрема (1852—1923), которая подвергнута некоторой критике, и других ученых в подготовке к изданию отдельных частей переписки Бернулли. Приведена краткая справка о сохранившихся в разных странах рукописях, причем автору остались неизвестными некоторые неопубликованные рукописи Архива Академии наук СССР в Ленинграде.

Анализ сохранившихся рукописей разбит во втором разделе на четыре группы: 1) письма; 2) доклады, лекции, деловые и личные бумаги, стихи; 3) рукописи чисто научного содержания; 4) опубликованные до 1807 г. сочинения. Наибольший интерес представляют не полностью еще известные материалы первой группы, причем общее число писем по ориентировочным подсчетам составляет около 7500, из которых на корреспонденцию Якоба I приходится 41 письмо, Иоганна I—2323, Даниила — 412, Николая I—549, Николая II—31, Иоганна II—970, Якоба II—31, Иоганна III—2790 и Я. Германа — 419. Эти числа должны быть увеличены за счет невключенных материалов Архива Академии наук примерно на 10 для Иоганна I, на 50 для Даниила, на 30 для Я. Германа. Приведены наиболее известные из корреспондентов каждого ученого и анализ утерянных писем.

По второй и третьей группе приведены краткие справки о сохранившихся материалах, среди которых отметим лекции по механике Якоба Германа и Даниила Бернулли (Spiess O., Basel anno 1760, Basel, 1936, 140). Что касается опубликованных сочинений, то их общий объем составляет около 9 тыс. стр. по точным наукам и около 5 тыс. стр. по другим вопросам (из них 4800 стр. принадлежат И. III Бернулли). Отбрасывая второстепенные работы (и рукописи) младших членов фамилии Бернулли и Я. Германа, автор относит к подлежащим опубликованию работам около 24 тыс. стр., из которых примерно $^2/_3$ приходится на трех основных членов фамилии Бернулли—Якоба I, Иоганна I и Даниила.

План издания предполагает таким образом около 20—25 томов, размером в 1,5 раза больших, чем томы Собрания сочинений Эйлера. Издание предполагается осуществить в виде ряда серий, первая из которых включит 6 томов переписки Иоганна I Бернулли и 3 тома переписки Даниила, Иоганна II и Николая I; вторая — 6 томов сочинений Якоба I и Иоганна I и 2 тома сочинений и писем Я. Германа; третья — 3 тома сочинений Даниила и др. Далее должен следовать дополнительный том.

Пока вся основная работа по переписке И. I Бернулли ведется О. Шписом. Статья снабжена именным указателем. Г. К. Михайлов

4278 К. Переписка Иоганна Бернулли. Том 1. Ред. Шпис (Der Briefwechsel von Johann Bernoulli. Band). 1. Herausgegeben von Spiess Otto), 531S., Abb., Basel, Birkhäuser Verlag, 1955, 60 sFr.) (нем.).

Первый том содержит переписку Иоганна I Бернулли (1667—1748), относящуюся к периоду до смерти его брата Якоба (1705). В него не вошла только обширная переписка с некоторыми крупными учеными, как Вариньон, Лейбниц и др.

Книга состоит из вступительной статьи редактора «Базельские математики XVIII века» (реф. 4277) и трех частей: А. Переписка с Я. Бернулли. В. Переписка с маркизом Лопиталем. С. Смешанная переписка за 1693—1706 гг. Каждая часть снабжена отдельной вступительной статьей. Приведены все сохранившиеся в оригиналах или копиях письма с указаниями на заведомо утерянные письма. Текст писем дан с сохранением орфографии оригиналов, фигуры даны в виде факсимиле с оригиналов.

Первая часть содержит всего 4, сохранившихся в копиях, письма 1691 г. к Я. Бернулли, по меньшей мере 16 писем этой интересной корреспонденции утеряны. Содержание части последних восстановлено при помощи анализа других материалов.

Второй части предпослана вступительная статья с биографическим очерком о Лопитале и подробным анализом его математических работ. О. Шпис убедительно показывает полную зависимость опубликованных работ Лопиталя от переданных ему Иоганном Бернулли материалов (лекции, письма). Приведено сопоставление содержания отдельных разделов «Анализа бесконечно малых» Лопиталя с соответствующими местами опубликованного конспекта лекций Бернулли по дифференциальному (1923) и интегральному (1742) исчислению и его писем. Подробно освещается вопрос о взаимоотношениях И. Бернулли с Лопиталем, о выплачивавшемся ему маркизом денежном содержании, в ответ на что И. Бернулли обязался передавать результаты своих научных работ Лопиталю и т. д. Впервые полностью опубликованная сохранившаяся переписка обоих ученых (за 1693—1703 гг.) содержит 60 писем Лопиталя и 26 писем Бернулли (по крайней мере 28 писем Бернулли утеряно). Переписка эта разъясняет многие имеющие вековую традицию разногласия в оценке научных заслуг Лопиталя и взаимоотношения его со своим учителем математического анализа — И. Бернулли. Текст писем, как и всюду, снабжен многочисленными подстрочными комментариями.

Третья часть содержит переписку с разными лицами, среди которых издатель Лейпцигских Acta Eruditorum Менке (O. Mencke) (эти письма, наряду с опубликованной перепиской Лейбница, дополнительно освещают взаимоотношения Бернулли с Лопиталем), базельские профессора Батиер (S. Battier) и Веренфельс (S. Werenfels), его отец — Н. Бернулли, ректор Утрехтского университета Бурман (P. Burman), утрехтский ученый Трейль (de la Treille), гронингенский профессор Браун (J. Braun) и др.

В третьей части опубликовано 70 писем. Этот материал, хотя и не вносит много нового в историю точных наук, но имеет большой познавательный интерес, ярко характеризуя эпоху.

Приложено 6 указателей: 1. Перечень всех известных (сохранившихся и несохранившихся) писем из корреспонденции Бернулли, упомянутых в первом томе. 2. Перечень опубликованных трудов Лопиталя (не указан русский перевод его «Анализа бесконечно малых», М.—Л, 1935). 3. Перечень названий, упомянутых в томе работ Якова и Иоганна Бернулли, Гюйгенса, Лейбница и др. 4. Перечень 94 математических и механических задач, рассматривавшихся в опубликованной здесь переписке. 5. Предметный указатель. 6. Именной указатель. Том иллюстрирован портретами Лопиталя и Бурмана. Книга оформлена превосходно.

Г. К. Михайлов

См. также: 4723, 4726, 4728, 4737, 4913

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

4279. Иерархии теоретико-числовых предикатов. Клини (Hierarchies of number-theoretic predicates. Kleene S. C.), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, 61, № 3, part 1, 193—213 (англ.)

Аналитические предикаты. Пусть $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ обозначают функциональные переменные, $a, b, \ldots, x, y$ — числовые переменные. Под обще (примитивно) рекурсивным (о. (п). р.) предикатом (пр.) $R(\alpha, \beta, \ldots; a, \ldots, x)$ понимается обще (примитивно) рекурсивный оператор, переводящий набор функций $\alpha, \beta, \ldots$ в пр. от аргументов $a, \ldots, x$. Результатом навешивания кванторов на числовые переменные такого пр. R является, по определению, арифметический пр.; если же кванторы навешиваются и на функциональные переменные, то получаемый пр. называется аналитическим. В статье рассматриваются аналитические пр. $P(a)$, зависящие лишь от числовых переменных (все функциональные переменные связаны кванторами).

Теорема XVI. Всякий аналитический пр. представим в одном из видов:

$$(\alpha)(Ex)R(\alpha, a, x),\ (E\alpha)(\beta)(Ex)R(\alpha, \beta; a, x),$$

$$(\alpha)(E\beta)(\gamma)(Fx)R;$$

$A(a)$,

$$(E\alpha)(x)R(\alpha, a, x),\ (\alpha)(E\beta)(x)R(\alpha, \beta, a, x),$$

$$(E\alpha)(\beta)(E\gamma)(x)R, \ldots,$$

где R — о. р. пр., а также в одном из видов:

$$(\alpha)A(\alpha, a),\ (E\alpha)(\beta)A(\alpha, \beta, a), \ldots, \quad (1)$$

$A(a)$

$$(E\alpha)A(\alpha, a),\ (\alpha)(E\beta)A(\alpha, \beta, a), \ldots,$$

где A — арифметический пр.

Этой классификации присущи некоторые из известных свойств обычной классификации Клини — Мостовского для арифметических пр. (без функциональных переменных), например: непустота классов, существование в каждом классе пр., универсального в смысле элементарной сводимости к нему всякого другого пр. того же класса. Ставится задача исследования тех аналитических пр., которые допускают обе стандартные формы (1) с данным числом кванторов (Ниже O означает класс натуральных чисел, следующим образом представляющих (вместе с упорядочением $<_o$) некоторый класс трансфинитов (через $|y|$ обозначаем трансфинит, соответствующий натуральному числу y): $1 \in O$, $|1| = 0$; если $y \in O$, то $2^y \in O$, $|2^y| = |y| + 1$ и $y <_o 2^y$; если $y_0, y_1, y_2, \ldots, \ldots \in O$, $y_0 <_o y_1 <_o \ldots$ для каждого n $y_n = \Phi_1(y, n_0)$, где Φ_1 — универсальная двуместная частично-рекурсивная функция, то $3 \cdot 5^y \in O$, $|3 \cdot 5^y| = \lim_n |y_n|$ и для всех n, $y_n <_o 3 \cdot 5^y$; $<_o$ — транзитивное отношение, упорядочивающее натуральные числа как соответствующие им трансфиниты).

Трансфинитная арифметическая иерархия. Пусть $T^H(a, x, y)$ — пр., п. р. относительно H, встречающийся в нормальной форме Клини — Маркова

$$U[\mu y T^H(a, x, y)]$$

для всех функций от x, р. относительно H. Для всех $y \in O$ определяются пр. $H_y(a)$: $H_1(a) \equiv a = a$; $H_{2^y}(a) \equiv (Ez)^{H_y}(a, a, z)$, если $y \in O$; $H_{3 \cdot 5^y}(a) \equiv H_{y_{(a)_1((a)_2)}}$, если $3 \cdot 5^y \in O$, причем $a \leftrightarrow <(a)_1, (a)_2>$ — 1-1 р. отображение натурального ряда на целочисленную плоскость (y — номер функции, пересчитывающей последовательность трансфинитов с обозначениями: $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$).

Теорема XIV. Существует п. р. функция $\rho(u, y)$ такая, что если $y \in O$ и $u <_o y$, то $\rho(u, y)$ есть гёделевский номер системы уравнений для р. оператора, преобразующего H_y в H_u.

Поскольку при условиях теоремы обратная сводимость H_y к H_u невозможна, то отсюда вытекает, что предикаты H_y могут служить представителями шкалы степеней неразрешимости любого конструктивно-трансфинитного ранга.

Связь между аналитической и трансфинитной иерархиями.

Теорема XXI. Всякий пр. H_y ($y \in O$) представим в обеих формах: $(\alpha)A(\alpha, a)$ и $(E\alpha)A(\alpha, a)$. Функция $f(a)$ называется гиперарифметической (ГA), если она рекурсивно сводится к некоторому H_y ($y \in O$). Основной результат: Для того чтобы аналитический предикат был представим в каждой из форм $(\alpha)A(\alpha, a)$ и $(E\alpha)A(\alpha, a)$, необходимо и достаточно, чтобы он был гиперарифметическим. Отсюда видно, что аналог теоремы Суслина — «множество, являющееся одновременно A и CA, есть B-множество» — имеет место в аналитической классификации, если роль B-множеств приписать ГA-множествам (а не арифметическим множествам, как можно было ожидать).

Теорема. Существует р. пр. $R(\alpha, x)$ такой, что $(E\alpha)(x)R(\alpha, x)$ верно, но $(x)R(\alpha, x)$ ложно для всякой функции α, общерекурсивной относительно любых аналитических пр. $P_1, \ldots, P_l$, представимых в обеих однокванторных формах.

Релятивизация предыдущих результатов. Если вместо частично-рекурсивных (ч. р.) функций в абсолютном смысле рассматривать функции, ч. р. относительно некоторой заданной функции R, то можно обобщить предыдущие результаты. Пусть O^Q — множество обозначений трансфинитов, конструктивных относительно Q. Можно определить предикаты H_y^Q по всем $y \in O^Q$ и установить аналог теоремы XIV. Если P рекурсивно относительно некоторого H_y^Q, то оно называется ГA относительно Q.

Теорема XXVIII. При каждом $k \geqslant 0$, если пр. P является ГA относительно пр., допускающих в аналитической классификации обе k-кванторные стандартные формы, то он представим в обеих $(k+1)$-кванторных формах.

Основная теорема гарантирует обратимость теоремы XXVIII при $k = 1$; для $k > 1$ вопрос остается открытым.

Если Q — ГA относительно Q_2 и Q_2 — ГA относительно Q_1, то пр. $a \in O^{Q_1}$, $a \in O^{Q_2}$ сводимы друг к другу рекурсивно.

Б. Трахтенброт

4280. О формах предикатов в теории конструктивных трансфинитов (вторая часть). Клини (On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals (second paper). Kleene S. C.), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 3, 405—428 (англ.)

Предикаты (пр.) $a \in O$ (натуральное число a есть обозначение некоторого конструктивного трансфинита (KT)) и $a <_o b$ определяются так: 01. $1 \in O$. 02. Если $y \in O$, то $2^y \in O$ и $y <_o 2^y$. 03. Пусть для каждого

$n\, y_n \in O$ и $y_n <_o y_{n+1}$ и пусть, кроме того, y есть гёделевский номер общерекурсивной (о. р.) функции, пересчитывающей обозначения y_n; тогда $3.5^y \in O$, причем $y_n <_o 3.5^y$. 04. Если $x, y, z \in O$ и $x <_o y, y <_o z$, то $x <_o z$. 05. $a \in O$ и $a <_o b$ имеют место лишь при указанных условиях.

Отношение $<_o$ для обозначений влечет за собой отношение $<$ для обозначаемых KT. Существует примитивно рекурсивный (п. р.) пр. $V(a, b, x)$ такой, что:

$$a <_o b \equiv a \in O \& b \in O \& (Ex)\, V(a, b, x).$$

В первую часть этой статьи (Amer. J. Math., 1944, 66, 41—58) вкралась ошибка, приведшая автора к выводу, будто пр. $a \in O$ и $a <_o b$ допускают представление типа $(x)(Ey)\, R$ в классификации Клини — Мостовского. На самом же деле, как устанавливается в данной статье, указанные пр. выходят за пределы этой классификации (т. е. не являются арифметическими). Пусть $R(\alpha, a, x)$ обозначает о. р. пр. от функционального аргумента α и от числовых аргументов a, x (т. е. о. р. оператор, преобразующий функцию α в предикат от аргументов a, x).

Теорема 1. Каков бы ни был о. р. пр. $R(\alpha, a, x)$, существует п. р. функция $\xi(a)$ такая, что $(\alpha)(Ex)\, R(\alpha, a, x) \equiv \xi(a) \in O$.

Теорема 2. Пр. $a \in O$ и $a <_o b$ представимы в виде

$$(\alpha)(Ex)\, R(\alpha, a, x) \text{ и } (\alpha)(Ex)\, S(\alpha, b, a, x),$$

где R и S — о. р. пр.

Легко показать, что всякий арифметический пр. (пр. из классификации Клини — Мостовского) допускает как представление типа $(\alpha)(Ex)\, R$, так и представление типа $(E\alpha)(x)\, R$. Поскольку автором доказано (реф. 4279), что существуют пр., допускающие представление одного типа, но не допускающие другого, то из теоремы 1 вытекает, что пр. $a \in O$ и $a <_o b$ не являются арифметическими, вопреки утверждениям первой статьи. При доказательстве основных теорем используются следующие понятия и леммы:

Всякий пр. $P(a)$, представимый в виде $(\alpha)(Ex)\, R(\alpha, a, x)$, представим также в виде $(\alpha)(Ex)\, R(\widetilde{\alpha}(x), a)$, где $R(\xi, a)$ — п. р. предикат, а $\widetilde{\alpha}(x)$ есть номер кортежа $\alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(x-1), \alpha(x)$.

Пусть отношение $\prec$ упорядочивает лексикографически множество всех кортежей натуральных чисел, причем так, что $(\alpha)(x, y)\, [\widetilde{\alpha}(x) \prec \widetilde{\alpha}(y)]$ при $x > y$. Обозначим через $S(a)$ множество всех таких кортежей ω, что $(\eta)\, [\eta \succ \omega \to \overline{K(\eta, a)}]$.

Лемма. Множество $S(a)$ вполне упорядочено в том и лишь в том случае, когда справедливо: $(\alpha)(Ex)\, R(\widetilde{\alpha}(x), a)$.

Функция $\xi(a)$ из теоремы 1 как раз и задает (в тех случаях, когда $P(a) \equiv (\alpha)(Ex)\, R(\alpha, a, x) \equiv (\alpha)(Ex)\, R(\widetilde{\alpha}(x), a)$ истинно) обозначение того KT, по которому упорядочено множество $S(a)$.

Конструкции, используемые в теореме 1, позволяют еще установить следующее предложение: Существует п. р. пр. $>_R$, упорядочивающий натуральные числа так, что для некоторой функции γ, $\gamma(0) >_R \gamma(1) >_R \gamma(2) >_R \cdots$, в то время как для всякой арифметической функции β $(En)\, [\beta(n) \leqslant_R \beta(n+1)]$. Иными словами $>_R$ является полным упорядочиванием относительно арифметических последовательностей, но не относительно произвольной последовательности.

Б. Трахтенброт

4281. Обобщение понятия рекурсивной функции на функции одной или многих действительных переменных I, II, III. Лакомб (Extension de la notion de fonction récursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables réelles. I, II, III. Lacombe Daniel), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 26, 2478—2480; **241**, № 1, 13—14; **241**, № 2, 151—153 (франц.)

Пусть $\varphi, \psi, \ldots$ (возможно с индексами) — отображают соответственно подмножества $D(\varphi), D(\psi), \ldots$ натурального ряда N в N. $\varphi \prec \psi$ означает: $D(\varphi) \subset D(\psi)$ и ψ совпадает с φ на $D(\varphi)$. Если $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \ldots \prec \varphi_n \prec \ldots$, то $\varphi = \bigcup_i \varphi_i$ означает: $D(\varphi) = \bigcup_i D(\varphi_i)$ и $\varphi_i \prec \varphi$ для всех i. Оператор $\psi = F(\varphi)$ называется когерентным, если он сохраняет отношение $\prec$ и, кроме того, $F(\bigcup_i \varphi_i) = \bigcup_i F(\varphi_i)$ всякий раз, когда $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \ldots \prec \varphi_n \prec \ldots$. Таковым является, например, любой рекурсивный (р.) оператор.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — рекурсивная 1-1-нумерация множества R всех рациональных (рац.) чисел, дополненного первым элементом $-\infty$ и последним $+\infty$.

Функция φ называется приближением с нижней гранью $\inf(\varphi) = a$ и верхней гранью $\sup(\varphi) = b$, если существуют действительные (д.) числа $a \leqslant b$ (возможно, равные $\pm\infty$) такие, что:

0^0. φ принимает лишь значения 0,1.

1^0. $x_i < a \to [i \in D(\varphi) \,\&\, \varphi(i) = 0]$.

2^0. $x_i > b \to [i \notin D(\varphi) \,\&\, \varphi(i) = 1]$.

3^0. $a < x_i < b \to i \overline{\in} D(\varphi)$.

Если вместо 3^0 имеет место $a \leqslant x_i \leqslant b \to i \overline{\in} D(\varphi)$, то φ обозначается так: β_a^b. Приближение называется совершенным, если $\inf(\varphi) = \sup(\varphi)$; оно определяет д. число (возможно, $\pm\infty$), обозначаемое $\mathrm{def}(\varphi)$. Д. число x называется р., если оно определяется р. функцией β_x^x. Когерентный оператор называется совершенным, если он отображает приближения в приближения, причем совершенные приближения в совершенные. Индуцированная им функция д. переменной обозначается так: $d(F)$. Если F — р. оператор, то функция f, равная $d(\xi)$, называется р. д. функцией.

Пусть $\tilde{x} = \mathrm{tg}\,[(\mathrm{Arc\,tg}\, x)/2]$ — топологическое отображение множества $\mathfrak{A}$ всех д. чисел (включая $\pm\infty$) на отрезок $[-1,1]$.

Теорема. Если F — совершенный оператор, то 1) $d(F)$ непрерывна на $\mathfrak{A}$. 2) Для каждого натурального m существует такое натуральное p, что при любых $x, y \in \mathfrak{A}$:

$$x \leqslant y \,\&\, \tilde{y} - \tilde{x} < \frac{1}{p} \to \sup F(\beta_x^y) - \inf F(\beta_x^y) < 1/m.$$

Если, кроме того, F — р. оператор, то существует общерекурсивная функция θ такая, что $p = \theta(m)$.

Теорема VI. Суперпозиция р. д. функций также является р. д. функцией.

Теоремы VII—VIII. $|x|$, $1/|x|$, e^x, $\mathrm{Log}\,|x|$, $\mathrm{Arc\,tg}\, x$, а также всякий полином с р. д. коэффициентами, являются р. д. функциями.

Теорема IX. Точные верхняя и нижняя границы р. д. функции являются р. д. числами.

Теорема X. Если функция f и числа a, b являются р. д., то для любого р. д. числа m такого, что $f(a) < m < f(b)$, существует р. д. число c, $a < c < b$ и $f(c) = m$.

Теорема XI. Пусть f_n и g_n — две р. последовательности р. д. функций такие, что: $a)$ $(n)\, [f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)]$, $b)$ $f_n - g_n \to 0$ равномерно. Тогда $b)$ имеет место при р. регуляторе равномерной сходимости, причем $\lim f_n$ есть р. д. функция.

Можно получить аналогичные теоремы для функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$ (а не только на всем $\mathfrak{A}$) путем привлечения отображения $\mathfrak{A}$ на $[a, b]$ посредством функции

$$\tilde{x} = \operatorname{tg}\left[\frac{\operatorname{Arctg} b - \operatorname{Arc\,tg} a}{\pi} \operatorname{Arc\,tg} x - \frac{\operatorname{Arc\,tg} b + \operatorname{Arc\,tg} a}{2}\right]$$

В частности, можно установить рекурсивность функции, обратной к р. д. возрастающей функции, а также функции $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ при р. д. a и f.

Б. А. Трахтенброт

4282. Табличное представление рекурсивных операторов. Трахтенброт Б. А. Докл. АН СССР, 1955, 101, № 3, 417—420

Частично-рекурсивный оператор (о.) $\varphi = T[f_1, \ldots, f_n]$ задается системой определяющих уравнений (схемой), в которых фигурируют функции-прообразы (ф.-пр.) $f_1, \ldots, f_n$, функция-образ (ф.-обр.) φ и, вообще говоря, вспомогательные функции (ф.) $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$. К правилам вывода значения $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, кроме обычных, добавляется замена терма вида $f_i(k)$ соответствующим значением ф.-пр. Через K обозначается класс всех общерекурсивных о., т. е. тех частично-рекурсивных о., для которых ф.-обр. всюду определена, коль скоро всюду определены ф.-пр., $O.T$ называется примитивно-рекурсивным (или о. класса $K_{\text{п}}$), если ф.-обр. определена посредством суперпозиций и примитивных рекурсий, исходя из ф.-пр. и индивидуальных ф. $s(n) = n + 1$, $g_k^i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) = x_i$ и $g(x_1, \ldots, x_k) = 0$. Пусть $\varphi = T[f_1, \ldots, f_s, f_{s+1}, \ldots, f_n]$ — примитивно-рекурсивный о. и $f_1^0, \ldots, f_s^0$ — фиксированные общерекурсивные ф.; о. $T'[f_{s+1}, \ldots, f_n] = T[f_1^0, \ldots, f_s^0, f_{s+1}, \ldots, f_n]$ называется постовским о. (о. класса K_n).

Теорема 1. Имеют место следующие строгие включения: $K_{\text{пр}} \subset K_{\text{п}} \subset K$.

Ф. $\varphi^*(x_1, \ldots, x_k)$ называется сигнализирующей о. T, примененного к ф. f_i^0 по схеме $\mathfrak{A}$, если при любых $x_1, \ldots, x_k$ возможно такое вычисление значения $\varphi_0(x_1, \ldots, x_k)$ по этой схеме, при котором все числа, встречающиеся как терм или часть терма, не превосходят $\varphi^*(x_1, \ldots, x_k)$.

Теорема 2. Пусть $T \in K_{\text{пр}}$ ($T \in K_{\text{п}}$) и $\mathfrak{M}$ — класс ф., ограниченных в своей совокупности примитивно-рекурсивной (общерекурсивной) ф.; тогда существует примитивно-рекурсивная (общерекурсивная) ф., являющаяся сигнализирующей о. T, примененного к любым ф. из $\mathfrak{M}$.

о. может быть представлен таблицей (т.) следующего вида:

$a_1, \ldots, a_k$	
$i_1^1, \ldots, i_k^1$	j^1
: : : : : :	:
$i_1^s, \ldots, i_k^s$	j^s
. . . . .	:
$i_1^\nu, \ldots, i_k^\nu$	j^ν.

где пробный кортеж $a_1, \ldots, a_k$, варианты $i_1^s, \ldots, i_k^s$ и пометки j^s состоят из произвольных натуральных чисел.

Вариант т. называется истинным относительно ф. $q(x)$, если он задает последовательность значений ф. q, подсчитанных для элементов пробного кортежа. ф. $\Gamma(n)$, по определению, реализует табличное представление о. $p = T[q]$, если а) при любом n, $\Gamma(n)$ задает геделевский номер какой-нибудь т.; б) при любой ф. q, $p(n)$ равно пометке варианта т. $\Gamma(n)$, истинного относительно q.

Теорема 3′. Пусть о. T действует на ф., мажорируемые в своей совокупности примитивно-рекурсивной (общерекурсивной), ф.; тогда $T \in K_{\text{пр}}$ ($T \in K_{\text{п}}$) в том и лишь в том случае, если он допускает табличное представление, реализуемое примитивно-рекурсивной (общерекурсивной) ф.

Аналогичная теорема 3 имеет место для о., называемых П-операторами, преобразующих характеристические ф. в характеристические ф., то-есть предикаты в предикаты. Именно для этого случая подобные т., называемые автором т. Поста, были введены впервые (Post E., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 284).

Более общий метод μ-табличного представления о. вводится определением: ф. $\Gamma(n, w)$ реализует μ-табличное представление о. $p = T(q)$, если: а) при любых n, w $\Gamma(n, w)$ задает гёделевский номер какой-нибудь т.; б) при любой ф. q, $p(n)$ равно пометке того истинного относительно q варианта, который первым встречается в последовательности т. $\Gamma(n, 0), \Gamma(n, 1), \ldots$; отсутствие в последовательности истинного относительно q варианта равносильно тому, что ф. p не определена для аргумента n.

Теорема 4. О. $p = T[q]$ является частично-рекурсивным в том и лишь в том случае, если он допускает μ-табличное представление, реализуемое примитивно-рекурсивной ф.

Говорится, что о. $p = T[q]$ вполне применим ко всюду определенной ф. q, если p также всюду определена. Через $K_{f(x)}$ обозначается класс всех частично-рекурсивных о., вполне применимых к любой ф., мажорируемой ф. $f(x)$.

Теорема 5. Пусть $f(x)$ — общерекурсивная ф. и $T \in K_{f(x)}$; тогда существует о. $T' \in K_n$ такой, что $T'[q] \equiv T(q)$ для любой ф. q, мажорируемой $f(x)$.

Следствие. П-о., вполне применимый к любому предикату, является частично-рекурсивным в том и лишь в том случае, если он допускает табличное представление, реализуемое общерекурсивной ф.

Доказательства отсутствуют. Утверждается, что в теореме 5 переход от T к T' конструктивный, так же как переход от задания о. системой уравнений к табличному (μ-табличному) представлению и обратно.

Опечатки: 419 страница, 2 строка снизу, вместо «$K_{(f)x}$» следует читать «$K_{f(x)}$»; 420 страница, 3 строка сверху, слово «класса» лишнее. В. К. Детловс

См. также: 4413, 4876

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

4283. О количестве положительных целых чисел $\leqslant x$, все простые делители которых $\leqslant y$. Човла, Бригс (On the number of positive integers $\leqslant x$ all of whose prime factors are $\leqslant y$. Chowla S., Briggs W. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 4, 558—562 (англ.)

Дается упрощенное доказательство оценок Брёйна для функций: $f(x, y)$ — количество целых чисел $\leqslant x$, все простые делители которых $\leqslant y$, и $g(x, y)$ — количество целых чисел, все простые делители которых $> y$ для случая $y = (\ln x)^h$, $h > 2$.

В доказательстве использован известный интеграл

$$(1/2\pi i)\int_{a-iT}^{a+iT}(x^s/s)\,ds.$$

С его помощью вопрос сведен к оценке произведений

$$\prod_{p\leqslant(\ln x)^h}(1-p^{-s}),\qquad \prod_{x>p\geqslant(\ln x)^h}(1-p^{-s}).$$

Оценка их произведена элементарно.

Примечание референта. Сделана ссылка на неверную работу Анкени (РЖМат, 1955, 1079).

А. И. Виноградов

4284. Замечание о важности ряда Фарея в теории чисел. Копршива (Poznámka k významu Fareyovy řady v theorii čísel. Kopřiva Jiří), Spisy vyd. přírodověd. fakult. Masarykovy univ., 1955, № 5, 267—279 (чеш.; рез. русс.)

Возрастающая последовательность рациональных несократимых дробей ρ_ν с условием $0\leqslant\rho_\nu\leqslant 1$ и с положительными знаменателями $b\leqslant x$ называется рядом Фарея, отвечающим x. Исключим из него дроби со знаменателями вида 2^n или вида n^2 (n — натуральное число) и обозначим число оставшихся дробей через $P_1(x)$ и соответственно через $P_2(x)$. Соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{P_i(x)} f(\rho_\nu) - P_i(x)\int_0^1 f(\xi)\,d\xi = O(x^{1/2+\varepsilon}),\ \varepsilon>0,\ i=1,2\ (1)$$

равносильно гипотезе Римана. В этом соотношении $f(\xi)=a_0\xi^3+a_1\xi^2+a_2\xi+a_3$ с условием $a_1\neq -3a_0/2$ или $f(\xi)=a_0\xi^2+a_1\xi+a_2$, или $f(\xi)=\cos\lambda\xi$, или $f(\xi)=\sin\lambda\xi$ с условием

$$|\lambda| < \sqrt{5/[\zeta(3)+5/\pi^2]} = 3{,}432\ldots,\ \lambda\neq 0,\ \pm\pi.$$

Пусть $n>3$ — натуральное число. В этом случае число многочленов $f(\xi)=a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\ldots+a_0$, для которых соотношение (1) при $i=2$ равносильно гипотезе Римана, бесконечно велико. В. А. Голубев

4285. К плотности последовательности совершенных чисел. Хорнфек (Zur Dichte der Menge der vollkommenen Zahlen. Hornfeck Bernhard), Arch. Math., 1955, **6**, № 6, 442—443 (нем.)

Канольд (РЖМат, 1955, 4836) доказал, что натуральная плотность совершенных чисел равна нулю,

$$\lim_{x\to\infty} V(x)/x = 0.$$

Доказывается, что $\lim_{x\to\infty} V(x)/x^\gamma = 0$ для всякого действительного $\gamma > 1/2$. В. А. Голубев

4286. О плотности избыточных чисел. Салие (Über die Dichte abundanter Zahlen. Salié Hans), Math. Nachr., 1955, **14**, № 1, 39—46 (нем.)

Пусть $A(x)$ — число избыточных чисел (включая и совершенные), меньших x. Беренд (Behrend F., S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1932, 322—328; 1933, 280—293) указал, что $0{,}241 < A(x)/x < 0{,}314$. Давенпорт (Davenport H., S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., math.-nat. Kl., 1933, 830—837), Човла (Chowla S., J. Indian Math. Soc., 1934, **1**, 41—44) и Беренд доказали независимо друг от друга, что $\lim_{x\to\infty} A(x)/x$ существует. Пусть $A(x;\lambda)$ — число натуральных чисел $n\leqslant x$, для которых $\sigma(n)/n\geqslant\lambda$, где $\sigma(n)$ — сумма всех делителей n. Доказано, что для каждого $\lambda>1$

$$\lim_{x\to\infty} A(x;\lambda)/x = D(\lambda)$$

существует.

Доказываются две теоремы:

1. $D(3/2) > 0{,}569$; $D(2) > 0{,}246$; $D(3) > 0{,}018$.

2. Существует абсолютная константа $c>0$ такая, что каждое натуральное число $n > \exp e^{c\lambda^2}$ или λ-избыточное, или есть сумма двух λ-избыточных чисел. Для $\lambda = 3/2$ можно взять $n\geqslant 15$, для $\lambda = 2$ число $n \geqslant \prod_{3<p\leqslant 31} p = 33426748355$. В. А. Голубев

4287. О представлении целого числа в виде суммы двадцати четырех квадратов. Карлиц (On the representation of an integer as the sum fo twenty-four squares. Carlitz L.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 4, 504—506; Indagationes. math., 1955, **17**, № 4, 504—506 (англ.)

Краткое доказательство, опирающееся на теорию эллиптических функций, формулы Рамануджана для числа представлений целого числа в виде суммы двадцати четырех квадратов. В. Б. Демьянов

4288. Простое доказательство некоторых формул Рамануджана о разложении на слагаемые. Добби (A simple proof of some partition formulae of Ramanujan's. Dobbie J. M.), Quart. J. Math., 1955, **6**, № 23, 193—196 (англ.)

Доказывается формула

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{xq^n}{(1-xq^n)^2}-\frac{yq^n}{(1-yq^n)^2}\right]=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1-x)^2(1-y)^2}\times$$

$$\times\prod_1^\infty\frac{(1-xyq^n)(1-x^{-1}y^{-1}q^n)(1-xy^{-1}q^n)(1-x^{-1}yq^n)(1-q^n)^4}{(1-xq^n)^2(1-x^{-1}q^n)^2(1-yq^n)^2(1-y^{-1}q^n)^2},$$

из которой вытекают некоторые формулы, полученные Рамануджаном. Доказываются также некоторые формулы Карлица (РЖМат, 1954, 4344). В. Д. Подсыпанин

4289. Величина погрешности $|\sqrt[n]{c}-p/q|$. Джерасимович (Размак грешке $|\sqrt[n]{c}-p/q|$. Т. Герасимовић и Б. Божидар), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1953, **5**, № 1—2, 53—56 (серб.; рез. франц.)

Пусть c, n, p, q — натуральные числа. Оценивается величина погрешности $|\sqrt[n]{c}-p/q|$ при приближении к корню n-й степени из целого числа с помощью рациональной дроби. Для $n=2$ полученная оценка точнее ранее известных. А. И. Попов

4290. О произведении n линейных однородных форм. Чок (On the product of n homogeneous linear forms. Chalk J. H. H.), Proc. London Math. Soc., 1955, **5**, № 20, 449—473 (англ.)

Рассматривается следующая гипотеза (С): Пусть Λ — решетка точек определителя Δ в n-мерном евклидовом пространстве (точки решетки имеют вид $(x_1, \ldots, x_n)$; $(0, \ldots, 0) \in \Lambda$). Тогда в области

$$|x_1 \ldots x_n| \leqslant 2^{-(n-1)}\Delta \qquad (1)$$

существует n точек решетки, порождающих Λ. Пример решетки

$$x_1 = \lambda_1 (u_1 + {}^1/_2 u_n), \ldots, x_{n-1} = \lambda_{n-1} (u_{n-1} + {}^1/_2 u_n),$$
$$x_n = \lambda_n u_n, \qquad (2)$$

где $u_1, \ldots, u_n$ пробегают целые числа, а $\lambda_1 \ldots \lambda_n = \Delta$, показывает, что оценка (1) была бы наилучшей.

Для $n = 2$ гипотеза (С) доказана Минковским (Minkowski H., Math. Ann., 1900, 54, 91—124). В реферируемой статье гипотеза (С) доказана для $n = 3$ и $n = 4$, причем показано, что если Λ не имеет вида (2), то неравенство (1) можно заменить на

$$|x_1 \ldots x_n| < 2^{-(n-1)}\Delta. \qquad (3)$$

Результат для $n = 4$ непосредственно вытекает из исследований Дайсона о «свободных эллипсоидах» (Dyson F. J., Ann. Math. (2), 1948, 49, 75—81, 82—109). Для $n = 3$, помимо использования соответствующих исследований Ремака (Remak R., Math. Z., 1923, 17, 1—34; 18, 173—200), автор нуждается в ряде лемм, доказательство которых и занимает большую часть статьи.

Гипотеза (С) тесно связана с известной гипотезой Минковского о неоднородных формах (М): Для любых вещественных чисел $c_1, \ldots, c_n$ в области

$$|(x_1 + c_1) \ldots (x_n + c_n)| \leqslant 2^{-n}\Delta$$

найдется точка решетки Λ определителя Δ. Именно, гипотеза (М) для $(n-1)$-мерного пространства следует из усиленной гипотезы (С) для n-мерного пространства, когда предполагается, что Λ должна иметь $(n-1)$ линейно независимых точек, лежащих в одной из координатных плоскостей. А. В. Малышев

4291. **Произведения неоднородных линейных форм. Давенпорт, Суиннертон-Дайер** (Products of inhomogeneous linear forms. Davenport H., Swinnerton-Dyer H. P. F.), Proc. London Math. Soc., 1955, 5, № 20, 474—499 (англ.)

Пусть $L_1, \ldots, L_n$ — система n однородных линейных форм переменных $x_1, \ldots, x_n$ определителя $\Delta \neq 0$; пусть $L_1, \ldots, L_r$ имеют вещественные коэффициенты, а $L_{r+1}, \ldots, L_{r+s}$, $L_{r+s+1}, \ldots, L_{r+2s}$ — комплексные коэффициенты, причем $\overline{L}_{r+s+h} = L_{r+h} (h = 1, \ldots, s)$; $r + 2s = n$. Пусть

$$P(x_1, \ldots, x_n) = L_1 \ldots L_n = L_1 \ldots L_r |L_{r+1} \ldots L_{r+s}|^2. \qquad (1)$$

Как обычно, определяем однородный минимум $M_H = \min_{(x_1, \ldots, x_n)} |P(x_1, \ldots, x_n)|$, где минимум берется по всем целым $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$, и неоднородный минимум $M_I = \max_{(\xi_1, \ldots, \xi_n)} \min_{(x_1, \ldots, x_n)} |P(x_1 + \xi_1, \ldots, x_n + \xi_n)|$, где минимум берется по всем целым $(x_1, \ldots, x_n)$, а максимум — по всем вещественным $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Отыскивается возможно более малое λ, $0 < \lambda < 1$, для которого имеет место неравенство

$$M_H^{\lambda} M_I^{1-\lambda} < C|\Delta|, \qquad (2)$$

где C — постоянная, зависящая от r и s. Доказано (теорема 1), что если $r > 0$ и $s > 1$, то неравенство (2) справедливо для

$$\lambda = \max((s-1)/(n-1), \; s/(2n-2s)). \qquad (3)$$

(3) усиливает предыдущие результаты Давенпорта (Davenport H., Quart. J. Math. (2), 1952, 3, 32—41; РЖМат, 1953, 558).

Для некоторых частных случаев даны более точные оценки. Доказано, что для $r = 1$, $s = 2$ неравенство (2) справедливо с $\lambda = 5/16$ (теорема 2); что если $P(x_1, \ldots, x_n)$ — норменная форма алгебраического числового поля с $r = 0$ и $s = 2$, не имеющего вещественных квадратичных подполей, то неравенство (2) справедливо с $\lambda = 1/3$ (теорема 3); что если $P(x_1, \ldots, x_n)$ — норменная форма алгебраического числового поля с $r = 1$ и $s = 2$, то неравенство (2) справедливо с $\lambda = 1/4$ (теорема 4). А. В. Малышев

4292. **О предположении Капланского о квадратичных формах. Цудзуку** (On a conjecture of Kaplansky on quadratic forms. Tsuzuku Tosirô), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 3—4, 325—331 (англ.)

Доказана справедливость предположения Капланского (РЖМат, 1955, 3036) о представлении нуля квадратичными формами в несколько усиленном виде.

Д. С. Горшков

4293. **Неотрицательные значения квадратичных форм. Барнс** (The non-negative values of quadratic forms. Barnes E. S.), Proc. London Math. Soc., 1955, 5, № 18, 185—196 (англ.)

Пусть $Q(x, y, z)$ — неопределенная квадратичная форма с определителем $d \neq 0$ и сигнатурой 1. Доказывается, что существуют целые числа x, y, z, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leqslant Q(x, y, z) \leqslant (4|d|/3)^{1/3}. \qquad (1)$$

При этом знак равенства справа необходим лишь тогда, когда Q эквивалентна при некотором λ форме λQ_1, где $Q_1 = -x^2 + 8(y^2 + yz + z^2)$; если эти формы из рассмотрения исключить, то (1) можно заменить на

$$0 \leqslant Q(x, y, z) < \{(1,332)|d|\}^{1/3}.$$

Для случая формы Q с n переменными и сигнатурой s и неравенств $0 \leqslant Q \leqslant (k_{n,s}|d|)^{1/n}$ автор находит

$$k_{3,-1} \leqslant 4, \; k_{4,0} \leqslant 64/81, \; k_{4,2} \leqslant 32/27, \; k_{4,-2} \leqslant 64/27.$$

Д. С. Горшков

4294. **Неотрицательные значения тернарной квадратичной формы. Оппенгейм, Барнс** (The non-negative values of a ternary quadratic form. Oppenheim A., Barnes E. S.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 4, 429—439 (англ.)

Пусть $Q(x_1, \ldots, x_n)$ — неопределенная квадратичная форма определителя $d \neq 0$ и сигнатуры s. Ищется наименьшее значение $k_{n,s}$, для которого неравенство

$$0 \leqslant Q(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (k_{n,s}|d|)^{1/n} \qquad (1)$$

всегда разрешимо в целых числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю. Рассматривается случай тернарных форм, $n = 3$. Барнс (реф. 4293) доказал, что

$k_{3,1}=4/3$. В реферируемой статье доказывается, что $k_{3,-1}=16/5$, причем знак равенства в правой части (1) необходим тогда и только тогда, когда Q эквивалентна положительному кратному формы $-x^2-xy-y^2+90z^2$. Доказательство основывается на уточнении и обобщении метода, использованного в цитированной статье Барнса.

В других предположениях проблема арифметических минимумов неопределенных тернарных квадратичных форм рассматривалась А. А. Марковым (Изв. АН СССР, 1901, **14**, 509—523), Б. А Венковым (Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, **9**, 429—494), Давенпортом (Davenport H., Proc. London Math. Soc. (2), 1949, **51**, 145—160), Оппенгеймом (РЖМат, 1954, 3211). А. В. Малышев

4295. О проблеме Пруэт-Лемера. Мишра (On Prouhet-Lehmer problem. Mishra Shiva Dutta), J. Scient Res. Banaras Hindu Univ., 1954—1955, **5**, № 2, 7—10 (англ.)

Известен метод нахождения решений диофантовых уравнений

$$\sum_{i=1}^{j} x_{i1}^h=\sum_{i=1}^{j} x_{i2}^h=\cdots=\sum_{i=1}^{j} x_{is}^h \quad (1\leqslant h\leqslant k)$$

(Sastry S., J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1950—1951, **1**, 1). Пусть $P(k, s)$ обозначает наименьшее значение j такое, что указанные диофантовы уравнения имеют нетривиальное решение в положительных целых числах. Очевидно, что $P(k+1, s)=sP(k, s)$. Можно найти точную верхнюю границу для $P(k+1, s)$, если известна верхняя граница для $P(k, s)$. Это доказано в ряде частных случаев: $P(4,3)\leqslant 8$, $P(6,3)\leqslant 14$ и т. д. Е. П. Ожигова

4296. О проблеме Пруэт-Лемера. Сривастава (On Prouhet-Lehmer problem. Srivastava Prakash), J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1954—1955, **5**, № 2, 59—62 (англ.)

Пусть $P(k, s)$ — наименьшее значение j такое, что диофантовы уравнения

$$\sum_{i=1}^{j} x_{i1}^h=\sum_{i=1}^{j} x_{i2}^h=\cdots=\sum_{i=1}^{j} x_{is}^h \quad (1\leqslant h\leqslant k)$$

имеют нетривиальные решения в положительных целых числах.

Известно, что $P(3, q)=4$ для всех значений q. С. Састри использовал этот результат для того, чтобы показать, что $P(4, q)\leqslant 3q+1$. Автор показывает, что $P(4, q)\leqslant 2q+2$. Приводятся частные случаи $P(4,5)\leqslant 10$, $P(4,6)\leqslant 12$. Е. П. Ожигова

4297. Применение сепаратора в теории целых алгебраических чисел. Мартич (Une application de séparateur dans la théorie des nombres entiers algébriques. Martić Ljubo), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1955, **10**, № 1—2, 37—40 (франц.; рез. хорв.)

Сепаратором в кольце R называется множество S такое, что $R\setminus S$ замкнуто относительно умножения. Доказывается, что каждый идеал в кольце целых алгебраических чисел, не являющийся простым, есть пересечение сепараторов. В. Д. Подсыпанин

4298. О числе представлений диаграммы Хассе конечными множествами. Хилман (On the number of realizations of a Hasse diagram by finite sets. Hillman Abraham P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 4, 542—548 (англ.)

Рассматривается вопрос о представлениях конечного частично упорядоченного множества D (диаграммы Хассе) подмножествами конечного множества из n элементов. Устанавливаются формулы для числа указанных представлений для всех тех D, число элементов которых не превосходит 4. З. И. Боревич

4299. Унимодулярные целочисленные циклические матрицы. Таусски (Unimodular integral circulants. Taussky Olga), Math. Z., 1955, **63**, № 3, 286—289 (англ.)

Продолжается изучение матриц, связанных с нормальным алгебраическим числовым полем степени n (РЖМат, 1955, 4850).

Матрица $C=\|c_{ik}\|_1^n$ называется циклической, если $c_{ik}=c_{k-i+1}$, где индексы определяются по mod n. Рассматриваются некоторые свойства унимодулярных циклических матриц с рациональными целочисленными элементами.

Пусть $n=p$ — простое число, ζ — первообразный корень p-й степени из единицы. Если C — унимодулярная, циклическая, то $\varepsilon_C=c_1+c_2\zeta+\cdots+c_p\zeta^{p-1}$ будет единицей в поле $F(\zeta)$, «ассоциированной» с матрицей C.

Удобно рассматривать $\varepsilon\bar{\varepsilon}$ как норму ε относительно поля $F(\zeta+\zeta^{-1})$.

Доказывается теорема: Пусть $C=AA'$ — унимодулярная циклическая матрица, где A — унимодулярная матрица с рациональными целочисленными элементами и A' — матрица, транспонированная к A. Тогда единица ε_C, ассоциированная с C, будет нормой единицы ε из $F(\zeta)$ относительно $F(\zeta+\zeta^{-1})$.

Если $\varepsilon=b_1+b_2\zeta+\cdots+b_p\zeta^{p-1}$, то $C=BB'$, где B — циклическая матрица, у которой первый ряд — $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$.

Специально рассматривается частный случай теоремы для $p=5$ без явного использования того факта, что матрица C имеет форму AA'. Б. М. Бредихин

4300. О делителях второго множителя числа классов поля деления круга. Вандивер (On the divisors of the second factor of the class number of a cyclotomic field. Vandiver H. S.,) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 10, 780—783 (англ.)

Пусть $\zeta=e^{2\pi i/l}$, l — нечетное простое, $K(\zeta)$ — поле деления круга. Известно, что число классов поля $K(\zeta)$ содержит два множителя $h_1^{(l)}$ и $h_2^{(l)}$, соответственно называемых «первым» и «вторым». Если $h_2^{(l)}\equiv 0 \pmod l$, то единица $E_a(\zeta)=E_a=\prod_{i=0}^{\mu-1}e^{r^{-2ia}}$ ($\mu=(l-1)/2$, $k_i=\zeta^{r^{i/2}}-\zeta^{-r^{i/2}}$ и $e_i=k_{i+1}/k_i$ является l-степенью единицы из $K(\zeta)$.

Показана связь этого критерия с последней теоремой Ферма. В работе автора и Лемеров (РЖМат, 1955, 1638) дан критерий разрешимости последней теоремы Ферма: Пусть t — целое такое, что $t^k\not\equiv 1 \pmod p$, где $p=kl+1<l^2-l$, p — простое. Пусть также $B_{a_1}, \ldots, B_{a_s}$ — все те из чисел Бернулли $B_1, B_2, \ldots, B_{(l-1)/2}$, которые делятся на l, тогда если $Q_i^k\not\equiv 1 \pmod p$, $i=1, 2, \ldots, s$, то теорема Ферма для показателя l выполняется. Здесь

$$Q_i=t^{-kd/2}\prod_{b=1}^{\mu}(t^{kb}-1)^{b^{l-2-2a}}$$
$$d=1^{l-2a}+2^{l-2a}+\cdots+\mu^{l-2a} \qquad (1)$$

В настоящей работе вышеупомянутый критерий делимости $h_2^{(l)}$ на l приводится к виду:

$$\zeta^{-d/2}\prod_{b=1}^{\mu}(\zeta^b-1)^{b^{l-2-2a}}=\alpha^l,\quad \alpha\in K(\zeta),$$

где d имеет то же значение, что и в (1). Автор также показывает возможность применения быстродействующих вычислительных машин для исследования $h_2^{(l)}$.
П. Н. Реморов

4301. О генераторах идеала, с приложением к геометрии чисел в унитарном пространстве U_2. Роджерс (On the generators of an ideal, with an application to the geometry of numbers in unitary space U_2. Rogers K.), Amer. J. Math., 1955, 77, № 4, 621—627 (англ.)

Пусть $k(\theta)$ — алгебраическое поле, полученное присоединением алгебраического числа θ к полю рациональных чисел k. Обозначим через $\mathfrak{A}=(p, q)$ идеал поля $k(\theta)$, порождаемый парой целых чисел p, q поля $k(\theta)$. Доказано: 1) Если $\mathfrak{A}=(p, q)=(r, s)$, то для любого целого числа u поля $k(\theta)$ найдется целая матрица A второго порядка определителя u, для которой $(p, q)A=(r, s)$. В случае $u=1$ это утверждение доказано Гурвицем (Hurwitz A., Math. Werke, 1933, 2, 244—268). 2) Пусть $\mathfrak{M}(e)$ — множество всех целых матриц второго порядка с условием $\mathrm{Norm}(\det A)\leqslant e$. Тогда найдется такое конечное подмножество $\{U_1, \ldots, U_h\}\subset\mathfrak{M}(e)$, что для любой матрицы A из $\mathfrak{M}(e)$ найдутся такие U_m и целая матрица T определителя 1, что $A=U_mT$.

Эти результаты прилагаются к геометрии чисел в унитарном пространстве U_2. Для U_n вводятся обычные в геомстрии чисел определения и доказывается теорема: По отношению к мнимому квадратичному полю $k(0)$ каждое лучевое тело «конечного типа» в U_2 обладает хотя бы одной критической решеткой.
А. В. Малышев

4302. Об относительном уравнении Пелля. Сколем (On relative Pell's equations. Skolem Th.), Bull. Soc. math. Belgique, 1954 (1955), 7, № 1, 96—105 (англ.)

Теорема Стормера об уравнении Пелля обобщается на относительное уравнение Пелля в мнимом квадратичном поле без алгебраических единиц. Пусть $\xi+\eta\sqrt{\delta}$ — решение уравнения $\xi^2-\eta^2\delta=1$, где ξ, η и $\delta\subset R(\sqrt{-m})$; $m\neq 1,3$. Тогда, если каждый простой идеал, входящий в η, делит δ, то $\xi+\eta\sqrt{\delta}$ есть 1,3, или 5-я степень основного решения. Доказанная теорема применяется для решения в целых числах некоторых уравнений, содержащих неизвестные в показателях.
В. Д. Подсыпанин

4303. О неопределенном уравнении $x^2+l=y^3$. Шинцель (Sur l'équation indéterminée $x^2+l=y^3$. Schinzel André), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1955, 24, № 6—9, 271—274 (франц.)

Доказана теорема, указывающая случаи, когда уравнение $x^2+l=y^3$ не имеет решений. Приведены без доказательства еще четыре аналогичных теоремы.

Примечание референта. Автору, очевидно, осталась неизвестной работа Мордела (Mordell, Proc. London Math. Soc., 1914, 13, 60—80), где аналогичным методом доказана первая теорема. Остальные теоремы вытекают из результатов, полученных в вышеупомянутой работе.
В. Д. Подсыпанин

4304. Нижний предел для числа простых чисел, входящих в x, y, z в уравнении Ферма $x^n+y^n=z^n$. Мёллер (Untere Schranke für die Anzahl der Primzahlen aus denen x, y, z der Fermatschen Gléichung $x^n+y^n=z^n$ bestehen muß. Möller Kurt), Math. Nachr., 1955, 14, № 1, 25—28 (нем.)

Рассматривается уравнение $x^n+y^n=z^n$, $x<y<z$ — целые рациональные числа, $n>2$. Доказывается, что если n (нечетное число) состоит из r различных простых чисел, то z и y — по меньшей мере из $r+1$ различных простых, а x — по меньшей мере из r различных простых чисел.
П. Н. Реморов

4305. Решения диофантова уравнения $x^3+y^3+z^3=k$. Миллер, Буллетт (Solutions of the diophantine equation $x^3+y^3+z^3=k$. Miller J. C. P., Woollett M. F. C.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 1, 101—110 (англ.)

С помощью электронной машины ЭДСАК (EDSAC) найдены все целые решения уравнения $x^3+y^3+z^3=k$ для всех $|k|\leqslant 100$ и $|x|$, $|y|$, $|z|$ одновременно $\leqslant 3164$.
Д. С. Горшков

4306. О бесконечности числа целых решений уравнения $ax^3+ay^3+bz^3=bc^3$. Морделл (On an infinity of integer solutions of $ax^3+ay^3+bz^3=bc^3$. Mordell L. J.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 1, 111—113 (англ.)

Доказано, что уравнение $ax^3+ay^3+bz^3=bc^3$, где a, b, c — целые числа и $abc\neq 0$, кроме тривиального случая $x+y=0$, $z=c$, имеет еще бесконечное число целых решений.
Д. С. Горшков

4307. О свойствах некоторых трехчленных уравнений в конечном поле. Вандивер (On the properties of certain trinominal equations in a finite field. Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 9, 651—653 (англ.)

Пусть p — нечетное простое и $F[p^n]$ — конечное поле порядка p^n. Рассматривается уравнение относительно неизвестных s и t:

$$g^{i+cs}+g^{j+mt}=1, \qquad (1)$$

где g — мультипликативное основание отличных от нуля элементов $F[p^n]$, i, j — фиксированные целые, для которых $0\leqslant i\leqslant c-1$, $0\leqslant i\leqslant m-1$, $p^n\equiv 1 \pmod m$, $p^n\equiv 1 \pmod c$. Пусть число решений (1) обозначается $(i, j)_{cm}$. Доказываются:

Теорема 1. Если $p^n-1=cm$, p — нечетное простое, $(c, m)=1$, то

$$\sum_{i=0}^{m-1}(b,\ i)_{cm}(b-a,\ i-d)_{cm}=\sum_{\substack{j=0\\ d}}^{c-1}(d,\ j)_{vc}(d-a,\ j-b)_c,$$

где d принимает значения d, $d+m, \ldots, d+(c-1)m$ и где b есть некоторое целое, для которого $b\not\equiv 0 \pmod c$, a и d такие, что одновременно не выполняются сравнения $d\equiv 0 \pmod m$ и $a\equiv 0 \pmod c$.

Теорема 2. Пусть p — нечетное простое и $p^n=1+cm$, $(c,\ m)=1$. Обозначим: $(i, j)_{cm}$ — число решений (1), $(i, j)_c=(i,\ j)_{cc}$. Если существует такое h, что $(b, h)_{cm}=m$, то $(d, i)_{vc}(d, i-b)_c=0$.
П. Н. Реморов

4308. О циклических соотношениях и трехчленных уравнениях в конечном поле. Вандивер (On cyclotomic relations and trinomial equations in a finite field. Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 10, 775—780 (англ.)

Пусть p — нечетное простое и $F[p^n]$ — конечное поле порядка p^n, g — мультипликативное основание отличных от нуля элементов поля $F[p^n]$. Рассматриваются уравнения относительно s и t следующего вида

$$g^{i+cs}+g^{j+lt}=1, \qquad (1)$$

где i, j — фиксированные целые, $0\leqslant i\leqslant c-1$, $0\leqslant j\leqslant l-1$; s и t должны быть целыми: $0\leqslant s\leqslant l-1$, $0\leqslant t\leqslant c-1$.

Теорема 1. Пусть (i, j) обозначает число решений (1) в $F[p^n]$ и $p^n = cl + 1$, l — нечетное простое, $c \not\equiv 0 \pmod l$,

$$C_{jd} = \sum_{i=0}^{c-1} (i, j)(i - m, j + m)$$

и

$$ind\,(g^{m+cs_1} - 1) \equiv r \pmod l$$

(для каждого s_1 с фиксированными m, c и r). Тогда, если $0 < n < l$, $0 < d < l$, $0 < j < l$, то $C_{00} = c - l$, $r \neq 0$; $C_{0d} = c$, $d \neq 0$, $r \neq 0$; $C_{rd} = c - 1$, для некоторого d с $r \neq 0$; $C_{jd} = c$, $j \neq 0$, $j \neq r$, $r \neq 0$ для некоторого d: $C_{00} = c - 1 - l$, $r = 0$; $C_{0d} = c - 1$, $d \neq 0$, $r = 0$; $C_{jd} = c$, $j \neq 0$, $r = 0$ для некоторого d. Уравнение (1) имеет связь с последней теоремой Ферма.

П. Н. Реморов

4309. Связь теории некоторых трехчленных уравнений в конечном поле с последней теоремой Ферма. Вандивер (Relation of the theory of certain trinomial equations in a finite field to Fermat's last theorem. Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 10, 770—775 (англ.)

Пусть l—простое нечетное число, x, y, z — целые рациональные числа,

$$x^l + y^l + z^l = 0. \qquad (1)$$

Доказываются:

Теорема 1. Предположим: 1) в уравнении (1) $xyz \not\equiv 0 \pmod l$. 2) пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в поле $K(\zeta)$, $\zeta = e^{2\pi i/l}$, такой, что $\mathfrak{p}^h = (\theta)$, $h \not\equiv 0 \pmod l$ и θ — примарное целое в K; также: $(p) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, где p — нечетное простое $> xyz$. Тогда существует конечное поле $F(p^n)$ порядка $p^n = 1 + cl$, $c = c_1 l$, где p^n есть норма $\mathfrak{p}$. Обозначим $(i, j)_{cl}$ число решений уравнения $g^{i+cs} + g^{j+lt} = 1$, где g — мультипликативное основание ненулевых элементов поля $F(p^n)$. Должно выполняться условие $(d_1, i)_c (d, i - b)_c = 0$, где d — некоторое целое формы $d_1 + kl$, $k = 0, 1, 2, \ldots, c_1 - 1$, $d_1 \not\equiv 0 \pmod l$; g^b — одна из величин: $-x/y$, $-y/x$, $-x/z$, $-z/x$, $-y/z$, $-z/y$ в $F(p^n)$ и т. д.

Теорема 2. Предположим: 1) $y \not\equiv 0 \pmod l$, $(xz, l) = 1$, $y \neq 0$, l — нечетное простое; 2) предположим, что $\mathfrak{p}$ — простой идеал, делящий (p), p — простое нечетное число $> xyz$ и $\mathfrak{p}^h$ — главный идеал в K с $h \not\equiv 0 \pmod l$ и p^h есть норма $\mathfrak{p}$. Тогда существует конечное поле порядка p^n, для которого

$$\sum_{r=0}^{m-1} (d_1 + rc, j - b)_{vc} = (d_1, i - b)_c,$$

где g^b — одна из величин $-y/x$, $-y/z$ в $F(p^n)$.

П. Н. Реморов

4310. Некоторые специальные уравнения в конечном поле. Карлиц, Корсон (Some special equations in a finite field. Carlitz L., Corson H. H.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 10, 752—754 (англ.)

Обозначим через $N_c = N_c(a_1, \ldots, a_r)$ число решений в конечном поле $GF(q)$, $q = p^n$ уравнения

$$a_1 x_1^{m_1} + \cdots + a_r x_r^{m_r} = c.$$

Можно предположить, что $q - 1$ делится на каждое из натуральных чисел m_i. Пусть A_c — среднее $N_c(a_1, \ldots, a_r)$ по всем не равным нулю a_i и

$$\lambda(i_1, \ldots, i_k) = m_{i_1} \ldots m_{i_k} / [m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}].$$

Доказывается, что

$$\sum_{a_i \neq 0} (N_0 - A_0)^2 =$$

$$= q^{r-2}(q-1)^{r+2} \sum_{k=0}^{r} \sum_{(i)} (-1)^{r-k} \lambda(i_1, \ldots, i_k).$$

В правой части равенства суммирование во внутренней сумме происходит по всем системам $(i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant r$ и $\lambda(0) = 1$. Отсюда следует:

Пусть S — множество всех m_i. Для того чтобы N_0 не зависело от $a_1, \ldots, a_r$ $(a_i \neq 0)$, необходимо и достаточно, чтобы S или некоторое подмножество $R \subseteq S$, состоящее из элементов, каждый из которых взаимно прост с любым элементом $S - R$, обладало одним из двух следующих свойств: а) один элемент из R взаимно прост с каждым из остальных, б) множество R состоит из нечетного числа элементов и каждый из них вида $2g_i$, причем все g_i попарно просты. Аналогично доказывается: N_1 не зависит от $a_1, \ldots, a_r$ тогда и только тогда, если все $m_i = 1$. Доказательства весьма кратки.

В. И. Нечаев

4311. Квадратичная сингулярная сумма. Коэн (The quadratic singular sum. Cohen Eckford), Duke Math. J., 1955, **22**, № 3, 373—381 (англ.)

Аналогично результатам автора (РЖМат, 1954, 5045; 1955, 2096) доказаны простые формулы для числа решений квадратичных сравнений в поле F алгебраических чисел. При этом проблема определения числа сравнений рассматривается как аддитивная проблема в конечном кольце $R(A)$ классов вычетов по модулю A, где $A \neq 1$ — произвольный нечетный идеал в поле F.

В. А. Голубев

4312. Коэффициенты некоторых степенных последовательностей. Карлиц (The coefficients of certain power series. Carlitz L.), Monatsh. Math., 1955, **59**, № 3, 188—193 (англ.)

Пусть

$$\frac{1}{(1-x)(1-y) + (1-x)(1-z) + (1-y)(1-z)} = \sum_{k,\,l,\,m=0}^{\infty} A_{klm} x^k y^l z^m.$$

Cerë (Szegö G., Math. Z., 1933, **37**, 674—688) доказал предположение Фридрихса и Леви о том, что все $A_{klm} > 0$. Он доказал, что если $f(t) = (t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n)$ и

$$1/f'(1) = \sum_0^\infty A_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}, \qquad (1)$$

то $A_{k_1 \ldots k_n} > 0$ при любом $n \geqslant 1$.

Калуца (Kaluza Th., Math. Z., 1933, **37**, 689—697) положил

$$\frac{3}{(1-3x)(1-3y) + (1-3x)(1-3z) + (1-3y)(1-3z)} = \sum_0^\infty a_{klm} x^k y^l z^m$$

так, что $a_{klm}=3^{k+l+m+1}A_{klm}$; он определил $c_{rs}^{(m)}$ при помощи $(1-x)^r(1+x)^s=\Sigma_{m=0}^{r+s}c_{rs}^{(m)}x^m$ и показал, что

$$a_{klm}=\frac{2^m}{2^{k+l}}\frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!}\sum_{r=0}^{k+l}\frac{3^r}{\binom{k+l+m}{r}}(c_{k,\,l}^{(r)})^2, \quad (2)$$

откуда ясно, что $a_{klm}>0$.

Автор показывает, что при простом $p>\max(2,\,k,\,l)$ и $m\geqslant k+l$ из (2) имеем:

$$\sum_{i=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda-1}\binom{\lambda}{i}a_{k,\,l,\,m+ip^t(p-1)}\equiv 0\pmod{p^{\lambda t}}. \quad (3)$$

Доказываются две теоремы, показывающие, что сравнение, подобное (3), получается и в общем случае (1).

В. А. Голубев

4313. Внутренние делители чисел Лемера. Уорд (The intrinsic divisors of Lehmer numbers. Ward Morgan), Ann. Math., 1955, 62, № 2, 230—236 (англ.)

Пусть L и M — целые числа, причем $L>0$, $K=L-4M$, $M\neq 0$, и пусть α и β — корни многочлена

$$f(z)=z^2-\sqrt{L}\,z+M. \quad (1)$$

Числами Лемера, соответствующими многочлену (1), называются числа

$$P_n=\begin{cases}(\alpha^n-\beta^n)/(\alpha-\beta), & \text{если } n \text{ — нечетное}\\ (\alpha^n-\beta^n)/(\alpha^2-\beta^2), & \text{если } n \text{ — четное.}\end{cases}$$

Простой делитель числа P_n называется внутренним, если он не делит ни одно P_k, где $0\leqslant k\leqslant n$. Если некоторое P_n при $n>2$ не имеет внутренних делителей, то оно называется особенным. Последовательность чисел Лемера, содержащая особенные числа, также называется особенной. Доказывается, что существуют только три особенных последовательности, соответствующие многочленам z^2-z-1, $z^2-\sqrt{5}z+1$ и z^2-3z+2. Для первых двух многочленов особенными являются числа P_6, P_{12} и P_{18}, а для третьего — число P_6.

В. Д. Подсыпанин

4314. Заметка о рекуррентном периоде дроби, обратной нечетному числу. Суббарао (A note on the recurring period of the reciprocal of an odd number. Subba Rao K.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 7, ч. I, 484—487 (англ.)

Указывается способ получения периода дроби $1/n$, если n — нечетное число и $(n,\,5)=1$, путем умножения. Элементарно доказываются теоремы: 1. Если n — нечетное число с максимальным периодом $\varphi(n)$ для $1/n$, то n должно быть формы p^m, где натуральное число $m\geqslant 1$ и p — простое, не равное 5.2. Существует бесконечное число нечетных чисел n, для которых $1/n$ имеет максимальный период.

В. А. Голубев

4315. Свойство периодичности некоторых множеств целых чисел. Дюпарк (Periodicity properties of certain sets of integers. Duparc H. J. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 4, 449—458; Indagationes math., 1955, 17, № 4, 449—458 (англ.)

Пусть $u_0,\,u_1,\ldots$ и $v_0,\,v_1,\ldots$ — две последовательности, причем $Uu_n+Vv_n=k$, $\alpha\leqslant u_n\leqslant\alpha+m-1$, где $U=\Sigma_{h=0}^{s}p_hE^h$ и $V=\Sigma_{k=0}^{t}q_kE^k$, k, α и m — данные числа, p_h и q_k — данные целые числа, а E — оператор, переводящий каждое число последовательностей в следующее.

Периодом двух последовательностей называется число $c=C_{uv}$ такое, что для $n\geqslant N$ $u_{n+c}=u_n$, $v_{n+c}=v_n$. Если же выполняется только одно из приведенных соотношений, то c называется периодом одной последовательности.

Исследуются свойства наименьшего периода C_{uv} при следующих условиях: 1) $p_s=1$, $q_t=m$; 2) $p_0q_0\neq 0$; 3) Все корни многочлена $V(x)$ по модулю меньше 1. Доказывается, что при этих условиях общий период C_{uv} равен периоду первой последовательности и многочлены $U(x)$ и $V(x)$ взаимно просты. Далее, пусть $V=fW$, где f — общий наибольший делитель чисел q_k, и пусть M — наименьшее целое число, удовлетворяющее соотношению

$$M=X(E)\,U(E)-Y(E)\,W(E).$$

Рассматривается последовательность, определяемая равенством

$$a_n=fX(E)\,v_n+Y(E)\,u_n,$$

период которой обозначен числом C. Доказывается, что если $V(E)=mE^t-q$, где $(m,\,q)=1$, то $C=c$ или $2c$, и некоторые другие соотношения.

В. Д. Подсыпанин

4316. О теоремах Уолстенхолма и Лейдесдорфа. Дюпарк, Перемас (On theorems of Wolstenholme and Leudesdorf. Duparc H. J. A., Peremans W.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 4, 459—465; Indagationes math., 1955, 17, № 4, 459—465 (англ.)

Рациональное число r/s, где r, s — целые, $(r,\,s)=1$, называется делящимся на целое число m, если $r\equiv 0\pmod m$. Пусть M — натуральное число, s — целое. Рассматривается вопрос о делимости числа $T_s(M)=\Sigma_{\substack{a=1\\(a,\,M)=1}}^{M}a^{-s}$ на степени простых делителей p числа M. Элементарными средствами доказывается, что если M делится точно на p^n, то $T_s(M)$ делится на p^k где k определяется следующим образом: 1) если $2\nmid s$, $p\neq 2$, $(p-1)\mid(s+1)$, $p\nmid s$, то $k=2n-1$; 2) если $2\nmid s$, $(p-1)\nmid(s+1)$ или $p\mid s$, то $k=2n$; 3) если $2\nmid s$, $p=2$, то $k=2n-2$; 4) если $2\mid s$, $(p-1)\mid s$, то $k=n-1$; 5) если $2\mid s$, $(p-1)\nmid s$, то $k=n$. При этом в случаях 1), 3) и 4) $T_s(M)$ делится точно на p^k, когда $p\nmid\varphi(Mp^{-n})$, и делится по крайней мере на p^{k+1}, когда $p\mid\varphi(Mp^{-n})$. Известные ранее результаты других авторов, относящиеся к этому вопросу, получаются отсюда как частные случаи или простые следствия.

В. Б. Демьянов

4317. О биномиальных коэффициентах. Курепа (Über die Binomialkoeffizienten. Kurepa G.), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1953, 5, № 3—4, 33—44 (нем.; рез. серб.)

Доказывается ряд теорем о биномиальных коэффициентах и рассматриваются два диофантовых уравнения 2-й степени. Обозначения: p — простое число; k, r, n, α — натуральные числа; $n'=[n/2]$. Получены следующие типичные результаты:

$$\left.\begin{aligned}&1)\ \binom{p^n}{r}\equiv 0\pmod p\\ &2)\ \binom{p^n-1}{r}\not\equiv 0\pmod p\end{aligned}\right\}(0<r<p^n),$$

$$3)\ \binom{p^n}{\alpha p^{n-1}}\not\equiv 0\pmod{p^2}\quad(1\leqslant\alpha\leqslant p-1),$$

4) $\binom{n}{n'} \equiv 0 \pmod p$ $(p^k \leqslant n < 2(p^k - 1))$.

Имеется много опечаток. К. Г. Бороздкин

4318. Об одной теоретико-числовой задаче. Алпар (Egy számelméleti probléma. Alpár László), Mat. lapok, 1955, **6**, № 4, 309—322 (венг.)

Несколько замечаний об обобщенных совершенных числах, подчиненных условию $S(n) = kn$, где k — целое число $\geqslant 2$, а $S(n)$ — сумма делителей числа n.

А. И. Попов

4319. О числах, представимых в форме $F = a^2 + kb^2$, $(a, b) = 1$. Русу (Despre numere reprezentabile în forma $F = a^2 + kb^2$, $(a, b) = 1$. Rusu Eugen), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 2, 273—286 (рум.; рез. русс., франц.)

Несколько соображений о характере чисел, допускающих представление формой $a^2 + kb^2$ при взаимно простых a и b. А. И. Попов

4320. О единственности разложения на простые множители в кольце целых чисел Гаусса. Попович (Asupra unicităţii descompunerii în factori primi în inelul intregilor lui Gauss. Popovici Constantin P.), Bul. ştiint. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi. fiz., 1955, **7**, № 3, 517—528 (рум.; рез. русс., франц.)

Видоизменение доказательства единственности разложения на простые множители в области целых комплексных чисел Гаусса. А. И. Попов

4321 К. Циклы десятичных периодических дробей. Том II. (От N=167 до 213 и многие другие числа). Капрекар (Cycles of recurring decimals. Vol. II. (From N=167 to 213 and many other numbers). Kaprekar D. R., Privately printed, Devlali, 1953, 47 pp. 6 rupees) (англ.)

Том I этой работы появился в 1951 г.; настоящий том включает таблицы периодических десятичных дробей для M/N от $N = 167$ до $N = 213$. В связи с обсуждением этих результатов приведены таблицы 33 степеней 2 и 5 и таблицы индексов 10 по модулю p для простых p, не превосходящих 13709. Последняя таблица взята из работы Крайчика (Kraitchik M., Recherches sur la théorie des nombres, V. I, Gauthier-Villars, Paris, 1924, pp. 131—139). Приведена также таблица множителей $(10^e - 1)/p$, где e является экспонентом 10 (mod p) для всех простых $\leqslant 61$ и для полдюжины бо́льших чисел. D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 506.

4322 К. Решение последней теоремы Ферма. Гхошал (Solution of Fermat's last theorem. Ghoshal S. C.), Privately printed, Lucknow, 1953, ii+12 pp. (англ.)

Сделана ошибка в доказательстве леммы 2.

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 288. D. H. Lehmer

4323 К. О числах Кармикаэля, числах Пуле, числах Мерсенна, числах Ферма. Дюпарк (On Carmichael numbers, Poulet numbers, Mersenne numbers and Fermat numbers. Duparc H. J. A.), Math. Centrum Amsterdam. Rapport ZW 1953—004, 1953, 7 pp. (англ.)

Обзорная статья.

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 933.

См. также: 4895, 4898

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

4324. Об одной теореме Бернулли. Митринович (О једној Bernoulli-евој теореми. Митриновић Олга), Билтен друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1954, **5**, 30—33 (серб.; рез. франц.)

Приводится новое доказательство теоремы: Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно арифметическая и геометрическая прогрессии, причем $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $a_1 \neq a_2$ и $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то $a_n < b_n$ для $n > 2$. Доказывается также, что если $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, то $a_n > b_n$ для $n > 2$.

В. И. Левин

4325. К гильбертовой теореме неприводимости. Кноблох (Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Knobloch Hans-Wilhelm), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **19**, № 3-4, 176—190 (нем.)

Пусть $f(x_1, \ldots, x_k, t_1, \ldots, t_s)$ — неприводимый многочлен с целочисленными коэффициентами от переменных $x_1, \ldots, x_k, t_1, \ldots, t_s$ и пусть $R(N)$ (где N — натуральное число) — число всех таких целочисленных s-строк $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$, что $|\tau_i| \leqslant N$ $(i = 1, \ldots, s)$ и многочлен $f(x_1, \ldots, x_k, \tau_1, \ldots, \tau_s)$ приводим. Тогда $R(N) \leqslant CN^{s-\alpha}$, где C и α — некоторые константы, причем $\alpha > 0$. В частном случае, когда $s = 1$, это утверждение было доказано Дерге (Dörge K., Math. Ann., 1926, **95**, 84—97).

В процессе доказательства вводится понятие тонкого множества целочисленных s-строк. Множество $\mathfrak{M}$ целочисленных s-строк $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$ называется тонким, если для числа $R(N)$ всех содержащихся в $\mathfrak{M}$ s-строк $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$, модули координат которых удовлетворяют неравенству $|\tau_i| \leqslant N$, справедливо соотношение $R(N) = O(N^{s-\alpha})$, где $\alpha > 0$. Указывается ряд свойств тонких множеств. Е. Г. Шульгейфер

4326. Приводимость многочленов положительного типа. Тейкер (Reducibility of positive type polynomials. Teicher Henry), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 195—201 (англ.)

Пусть T_+ — совокупность всех многочленов с неотрицательными коэффициентами, T_i — её подмножество, состоящее из многочленов, не разлагающихся на множители, принадлежащие T_+, и T_q — подмножество множества T_+, состоящее из многочленов, не делящихся на квадратные трехчлены с отрицательным коэффициентом при x.

Пусть $P_m(x) \in T^* = T_+ \setminus T_q$ (этот факт проверяется обычными условиями Гурвица) и пусть

$$Q_k^-(x, \varepsilon) = x^2 - A_k x + \varepsilon_k A_k^2 \quad (A_k > 0)$$

все делящие многочлен $P_m(x)$ квадратные трехчлены с отрицательными коэффициентами при x (m — степень многочлена $P_m(x)$). Пусть далее $\varepsilon = \min \varepsilon_k$ и $M(\varepsilon)$ — наименьшее целое число, для которого имеет место неравенство

$$j \arccos\left(\frac{1}{2\varepsilon^{1/2}}\right) \geqslant \pi.$$

Тогда, если $M(\varepsilon) = m$ или если $P_m(x)$ не имеет вещественных корней и $M(\varepsilon) > m - 2$, то $P_m(x) \in T_i$. Неко-

торые специальные результаты такого же типа получены для случая $m \leqslant 4$. Г. С. Бархин

4327. О разрешимости систем линейных неравенств. Шуранъи (On the solvability of systems of linear inequalities. Surányi János), Acta scient. math., 1955, 16, № 1-2, 92—102 (англ.)

Работа в основном посвящена теореме о разрешимости систем линейных неравенств, содержащейся в работе референта (РЖМат, 1953, 68). Приводятся два различных доказательства этой теоремы; одно из них получается непосредственной индукцией по r, другое же опирается на теорему Минковского о существовании нетривиальных решений у систем однородных линейных неравенств (Minkowski H., Geometrie der Zahlen, 2 Aufl., Leipzig, 1910, 39—45). Рассматриваемая теорема была известна референту еще в 1949 г. (см. подстрочные примечания на стр. 18 и 19 цитированной выше работы референта).

Приводится также доказательство упомянутой выше теоремы Минковского и дается новое опирающееся на теорему Минковского доказательство одной теоремы Блюменталя о существовании нетривиальных решений систем линейных неравенств (Blumenthal M., Pacif. J. Math., 1952, 2, 523—530). С. Н. Черников

4328. К одной проблеме теории определителей. Туран 〈行列式論中之一問題. P. 杜朗〉, 數學學報 (Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica), 1955, 5, № 3, 411—423 (кит.; рез. англ.)

Излагается новый вывод рекуррентной формулы для суммы S_n^{2k} $2k$-х степеней определителей всевозможных матриц порядка n с элементами ± 1 в случае, когда $k = 2$. Впервые эта формула была выведена в совместной работе Секереша и автора (Szekeres G., Turán P., Mat. és Term. tud. Értesitö, 1937, 796—804). Е. Г. Шульгейфер

4329. Об унитарных инвариантах квадратных матриц. Мурнаган Ф. (On the unitary invariants of a square matrix. Murnaghan Francis D.) An. Acad. brasileira cienc., 1954, 26, № 1, 1—7 (англ.)

Утверждается, что произвольные квадратные матрицы порядка n тогда и только тогда унитарно эквивалентны, когда их унитарные инварианты: $\mathrm{Tr}\, A$, $\mathrm{Tr}\, A^2, \ldots$, $\mathrm{Tr}\, A^n$, $\mathrm{Tr}\, A^* A, \ldots$, $\mathrm{Tr}\, A^* A^{n-1}$, $\mathrm{Tr}\, A^{*2} A^2, \ldots$, $\mathrm{Tr}\, A^{*2} A^{n-1}, \ldots, \mathrm{Tr} A^{*n-1} A^{n-1}$ одинаковы. Вопрос детально исследуется для $n = 2, 3$, но общий случай не рассматривается, приводятся лишь некоторые соображения, позволяющие ожидать, что высказанное предложение будет справедливым при любом n. А. Ф. Голубчиков

4330. О характеристических корнях нормальных матриц. Ту Бао-юй 〈關於正規方陣的特徵根. 屠寶瑜〉, 新科學 (Синь кэсюэ), 1955, № 1, 31—33 (кит.)

Пусть A — произвольная матрица. $S = (A + \bar{A}')/2$, $Q = (A - \bar{A}')/2i$ и пусть $\lambda_k = a_k + ib_k$, $k = 1, 2, \ldots n$ — характеристические числа матрицы A. Оказывается, что следующие четыре условия эквивалентны друг другу: 1) матрица A нормальна $(A\bar{A}' = \bar{A}'A)$; 2) числа a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, являются характеристическими числами матрицы S; 3) числа b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, являются характеристическими числами матрицы Q; 4) матрицы S и Q перестановочны.

Показывается также, что матрица A нормальна и ее характеристические числа расположены на прямой: $\zeta = a + \mu e^{i\theta}$, где μ и θ действительны, или на окружности: $|\zeta - a| = \rho$ тогда и только тогда, когда $A = e^{i\theta} H + aI$ или $A = \rho U + aI$ соответственно, где матрица H — эрмитова, а U — унитарна; I — единичная матрица. Отсюда следует, что любая нормальная матрица третьего порядка имеет вид: $\rho U + aI$, где $\rho > 0$. Чжань Юань-да, Лю Шао-сюэ

4331. Об одном неравенстве для положительно определенных матриц. Мирский (An inequality for positive definite matrices. Mirsky L.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 6, 428—430 (англ.)

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — положительные числа, сумма которых равна единице, и пусть $A_1, \ldots, A_k$ — эрмитовы положительно определенные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\det(\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k) \geqslant (\det A_1)^{\alpha_1} \ldots (\det A_k)^{\alpha_k},$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда $A_1 = \ldots = A_k$. Для $k = 2$ это неравенство доказано Белманом (РЖМат, 1953, 76). Н. П. Соколов

4332. Заметка о некоторых нильпотентных матрицах. Ансари, Шах (A note on certain nilpotent matrices. Ansari A. R., Shah S. M.), Math. Student, 1952, 20, 113—114 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Статья содержит некоторые элементарные теоремы о нильпотентных матрицах. Например показывается, что если матрица $B^{(n)}$ нильпотентна, то $f(1)$ является n-кратным характеристическим корнем матрицы $f(I + B)$. I. Reiner.

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 8, 671.

4333. Обобщенные обратные матрицы. Пенроз (A generalized inverse for matrices. Penrose R.) Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 3, 406—413 (англ.)

Доказано, что для любой прямоугольной матрицы с комплексными элементами четыре уравнения $AXA = A$, $XAX = X$, $(AX)^* = AX$, $(XA)^* = XA$, где A^* — сопряженная с A' матрица, имеют единственное общее решение. Это решение обозначается через A^+ и называется обобщенной обратной матрицей к A. Если A — диагональная матрица $(a_1, \ldots, a_n)$, то матрица A^+ также диагональна и $A^+ = (a_1^+, a_2^+, \ldots, a_n^+)$, где

$$a_i^+ = \begin{cases} a_i^{-1}, & \text{если } a_i \neq 0, \\ 0, & \text{если } a_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так как любая квадратная матрица A имеет вид $A = VBW$, где V и W — унитарные матрицы, а B — диагональная матрица, то $A^+ = W^* B^+ V^*$. Матричное уравнение $AXB = C$ тогда и только тогда имеет решение, когда $AA^+ CB^+ B = C$. Решение имеет вид $X = A^+ CB^+ + Y - A^+ AYBB^+$, где Y — произвольная матрица.

Главными идемпотентными элементами некоторой квадратной матрицы A называется такая система матриц K_λ, зависящая от комплексного параметра λ, что $K_\lambda K_\mu = f(\lambda, \mu) K_\lambda$, где $f(\lambda, \mu)$ — некоторая числовая функция, причем $\Sigma K_\lambda = I$, $AK_\lambda = K_\lambda A$ и матрица $(A - \lambda I) K_\lambda$ — нильпотентна (I — единичная матрица). Оказывается, что $K_\lambda = (F_\lambda E_\lambda)^+$, где $E_\lambda = I - \{(A - \lambda I)^n\}^+ \times (A - \lambda I)^n$, $F_\lambda = I - (A - \lambda I)^n \{(A - \lambda I)^n\}^+$ (n — целое число, не превышающее порядка матрицы A). Число n равно единице тогда и только тогда, когда матрица A диагонализируема.

Любая матрица A единственным образом представима в форме $A = \Sigma_{\alpha > 0} \alpha U_\alpha$, где α — действительное число и U_α — такое семейство матриц, что $U_\alpha^+ = U_\alpha^*$, $U_\alpha^* U_\beta = U_\alpha U_\beta^* = 0$ при $\alpha \neq \beta$. А. П. Ершов

4334. Некоммутативные решения матричного уравнения $\exp(X + Y) = \exp X \cdot \exp Y$. Какар (Non-commuting solutions of the matrix equation $\exp(X + Y) =$

$= \exp X \cdot \exp Y$. Kakar A. G.). Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, 2, № 3, 1—15 (англ.)

Рассматривается задача, поставленная Фреше (Fréchet M., РЖМат, 1956, 1438), о решении уравнения

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \qquad (1)$$

в матрицах A, B n-го порядка, причем $AB \neq BA$. Если A, B — решение, то $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ также будет решением задачи. Если пара матриц (A, B) вполне приводима, решение называется тривиальным, так как соответствующие блоки приведенных матриц также будут решениями задачи. Указываются следующие критерии приводимости.

Если алгебра $\{A, B\}$, порожденная матрицами A и B, содержит n^2 линейно-независимых матриц, то пара (A, B) неприводима.

Пара матриц (A, B) вполне приводима тогда и только тогда, если существует нетривиальный (т. е. не равный единичной или нулевой матрице) идемпотент, коммутирующий как с A, так и с B.

Строится класс неприводимых решений уравнения (1) в матрицах любого порядка. При этом матрица A берется в диагональной форме, а матрица B — в форме произведения столбца на строку. Для этих решений оказывается $e^A = e^B = E$. Далее показывается, что можно построить решение (1) в матрицах любого порядка, для которых e^A и e^B некоммутативны, причем матрица A диагональна, а B — треугольна. Построение проводится индукцией по n. Доказывается, что полученное решение не будет тривиальным.

Г. Н. Чеботарев

4335. О функциях от матрицы. Фантапье (Sulle funzioni di una matrice. Fantappié Luigi), An. Acad. brasileira cienc., 1954, 26, № 1, 25—33 (итал.)

Дается аксиоматическое определение аналитических функций от матриц.

Пусть Φ — некоторый класс аналитических функций $g(\lambda)$ содержащий линейные функции и замкнутый относительно сложения и умножения, а K — произвольная матрица. Предположим, что любой функции $g(\lambda) \in \Phi$ отнесена матрица $g(K)$, причем выполнены следующие аксиомы: 1) $(g_1 + g_2)(K) = g_1(K) + g_2(K)$, $g_1, g_2 \in \Phi$; 2) $(g_1 g_2)(K) = g_1(K)\ g_2(K)$, $g_1, g_2 \in \Phi$; 3) функциям $1 \in \Phi$, $\lambda \in \Phi$ отвечают соответственно единичная матрица и матрица K; 4) элементы $g_{rs}(K)$ матрицы $g(K)$ являются аналитическими функционалами от $g(\lambda)$. Из этих аксиом легко следуют хорошо известные свойства матрицы $g(K)$, в частности два следующих: 1) $g_{rs}(K) = \frac{1}{2\pi i}\int_C u_{rs}(\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda$, где $u_{rs}(\lambda)$ — элементы матрицы $(\lambda 1 - K)^{-1}$, а C — жорданов спрямляемый контур, на котором и внутри которого функция $g(\lambda)$ регулярна, и внутри которого находится весь спектр матрицы K. 2) Если $p(\lambda)$ — многочлен степени m, для которого $p(K) = 0$ (например, характеристический многочлен матрицы K), то матрица $g(K)$ имеет вид $g(K) = g_1 K^{m-1} + g_2 K^{m-2} + \ldots + g_m 1$, где $g_1, \ldots, g_m$ — числовые множители, вычисляемые по определенным формулам.

М. А. Наймарк

4336. Несколько теорем о матрицах с вещественными кватернионными элементами. Уигман (Some theorems on matrices with real quaternion elements. Wiegmann N. A.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 2, 191—201 (англ.)

Известные теоремы, относящиеся к матрицам с комплексными элементами, переносятся на матрицы, элементами которых являются вещественные кватернионы. Например, доказано, что любая матрица с вещественными кватернионными элементами может быть преобразована с помощью такой же матрицы к нормальной жордановой форме, на диагонали которой стоят комплексные числа вида $a + bi$, $b \geqslant 0$.

П. А. Шварцман

4337. Квадратичные формы над дискретно нормированными полями. I. Классы эквивалентности определенных форм. Спрингер (Quadratic forms over fields with a discrete valuation. I. Equivalence classes of definite forms. Springer T. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 3, 352—362; Indagationes math., 1955, 17, № 3, 352—362 (англ.)

Квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_m)$ над некоторым полем K называется определенной, если равенство $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$, $x_i \in K$, имеет место лишь при $x_1 = \ldots = x_m = 0$. Пусть K — полное дискретно нормированное поле, характеристика $\chi(K)$ которого отлична от двух, и $\bar{K}$ — его поле классов вычетов. Пусть n_0 — такое число, что любая квадратичная форма над $\bar{K}$, зависящая более чем от n_0, переменных, является неопределенной формой. Тогда любая квадратичная форма над K, зависящая более чем от $2n_0$ переменных, также будет неопределенной формой.

Далее рассматривается вопрос об эквивалентности квадратичных форм над K. Оказывается, что в случае, когда $\chi(\bar{K}) \neq 2$, этот вопрос сводится к вопросу о эквивалентности некоторых форм над $\bar{K}$. Условия эквивалентности форм над K в случае, когда $\chi(\bar{K}) = 2$, исследуются отдельно.

Примечание референта. Все содержащиеся в работе факты, относящиеся к случаю $\chi(\bar{K}) \neq 2$, могут быть получены простым обобщением известных рассуждений, с помощью которых эти факты доказываются, когда поле $\bar{K}$ конечно.

В. Б. Демьянов

4338. Представления эрмитовыми формами в конечном поле. Карлиц, Ходжес (Representations by Hermitian forms in a finite field. Carlitz L., Hodges John H.), Duke Math. J., 1955, 22, № 3, 393—405 (англ.)

Пусть A — матрица (вообще говоря, прямоугольная), элементы которой принадлежат конечному полю $GF(p^{2n})$ четной степени относительно простого поля $GF(p)$, а A^* — матрица, получающаяся из A транспонированием с одновременной заменой элементов на сопряженные относительно содержащегося в $GF(p^{2n})$ подполя $GF(p^n)$ (матрица A^* определена однозначно, так как степень $GF(p^{2n})/GF(p^n)$ равна 2). Если $A^* = A$, то A называется эрмитовой. Пусть A — эрмитова (и потому квадратная) невырожденная матрица порядка m, и B — эрмитова матрица порядка t и ранга $r \leqslant m$. В работе находится точное выражение для числа (которое оказывается зависящим только от m, t и r) таких $m \times t$-матриц U, что $U^*AU = B$. Попутно определяется также количество всех эрмитовых матриц, имеющих заданные порядок и ранг. Полученные результаты используются для определения числа всевозможных представлений эрмитовой матрицы B порядка t и ранга r в виде $B = X_1 + \ldots + X_n$, где $X_1, \ldots, X_n$ — эрмитовы матрицы порядка t, имеющие заданные ранги $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Это число также зависит только от t, r, $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

В. Б. Демьянов

4339. Пары симметрических и кососимметрических форм второго порядка. Клинценберг (Paare symmetrischer und alternierender Formen zweiten Grades. Klingenberg Wilhelm), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1954, 19, № 1-2, 78—93 (нем.)

Излагается полная классификация пар симметрических или кососимметрических билинейных форм над произвольным полем, характеристика которого отлична от 2. Указываются канонические представления пар форм. Случаи регулярной и сингулярной пары форм рассматриваются отдельно. Полученные результаты применяются для классификации регулярных пучков квадрик и линейных комплексов. Полученные в работе результаты в основном не являются новыми.
И. М. Яглом

4340. Об инвариантах кубической тройничной формы над полем вещественных чисел. Соколов Н. П., Укр. матем. ж., 1954, **6**, № 3, 282—294

Работа является первой частью подробного изложения результатов, опубликованных автором ранее без доказательств (РЖМат, 1955, 3065). Эта часть содержит определение ряда инвариантов тройничной кубической формы с вещественными коэффициентами относительно невырожденных вещественных линейных преобразований.
В. Б. Демьянов

ГРУППЫ

4341. Конечные группы с данным типом сопряженности. I. Итo (On finite groups with given conjugate types. I. Itô Noboru), Nagoya Math. J., 1953, **6**, 17—28 (англ.)

Конечная группа G называется группой с типом сопряженности $(n_1, \ldots, n_r)$ $(n_1 > \ldots > n_r)$, если числа $n_1, \ldots, n_r$ и только эти числа являются порядками классов сопряженных элементов группы G (каждое из чисел n_i может быть порядком нескольких классов). В работе исследуется структура групп с типом $(n, 1)$.

Доказано, что каждая группа G с типом $(n, 1)$ нильпотентна; при этом $n = p^\alpha$ (p — простое число), и G представляется в виде прямого произведения p-группы с типом $(p^\alpha, 1)$ на абелеву группу. Далее, в каждой p-группе с типом $(p^\alpha, 1)$ существует такой абелев нормальный делитель A, что наименьшее общее кратное порядков элементов фактор-группы G/A равно p. Если центр p группы G с типом $(p^\alpha, 1)$ цикличен, то G — группа класса 2. Работа содержит также ряд теорем о нормализаторах элементов конечных групп.
С. Д. Берман

4342. Аналитическое рассмотрение конечных групп и их представлений. Хонда (Analytic considerations on finite groups and their representations. Honda Kin'ya), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1952—1953, I—II, 41—46 (англ.)

Пусть D — изоморфное представление степени d конечной группы $\mathfrak{G}$ порядка g, D^n — его n-я кронекеровская степень и $u_{n,\mu}$ — кратность вхождения неприводимого представления D_μ в D^n. Устанавливается формула

$$\frac{1}{g}\sum_{a\in\mathfrak{G}}\frac{\bar{\chi}_\mu(a)\chi_\rho(a)z}{1-\chi(a)z} = u_{1,\mu}z + u_{2,\mu}z^2 + \cdots,$$

откуда выводится что $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_{n,\mu} = d$ и что хотя бы одно из чисел $u_{1,\mu}, \ldots, u_{h,\mu}$ отлично от 0, где h — число классов сопряженных элементов в группе $\mathfrak{G}$. Аналогично доказываются следующие двойственные результаты. Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное подмножество элементов группы $\mathfrak{G}$, порождающее группу $\mathfrak{G}$, и $v_{n,\nu}$ — число упорядоченных систем $(b_1, \ldots, b_n)$ таких элементов из $\mathfrak{M}$, что $b_1, \ldots, b_n = a_\nu$. Тогда $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{v_{n,\nu}} = m$ и хотя бы одно из чисел $v_{1,\nu}, \ldots, v_{h,\mu}$ отлично от нуля (m — число элементов множества $\mathfrak{M}$).
Д. К. Фаддеев

4343. О модулярных элементах p-группы. Цакер (Sugli elementi modulari in un p-gruppo. Zacher Giovanni), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, 1955, **24**, 165—182 (итал.)

Элемент m структуры L называется модулярным, если подструктура $\{m, R\}$, порожденная элементом m и любой модулярной (дедекиндовой) подструктурой $R \subset L$, также модулярна. Оказывается, что множество всех модулярных элементов структуры L образует модулярную подструктуру; элементы центра и нейтральные элементы модулярны и т. д.

Подгруппа H группы G называется модулярной, если H является модулярным элементом в структуре $L(G)$ подгрупп группы G. Модулярная подгруппа H конечной p-группы G перестановочна с любой подгруппой $K \subset G$ (т. е. $HK = KH$).

Конечная p-группа G, все элементы которой имеют порядок p, содержит модулярную подгруппу порядка p тогда и только тогда, когда G—элементарная группа. Если группа G — не абелева, то никакая ее максимальная подгруппа не может быть модулярной. Для того, чтобы группа G содержала истинную нетривиальную модулярную подгруппу, необходимо и достаточно, чтобы G была абелевой.

Пусть G — конечная p-группа, $V(G)$ — подгруппа G, порожденная p-ми степенями всех элементов и M — истинная модулярная подгруппа G, не содержащаяся в $V(G)$. Тогда $V(G)$ совпадает с подгруппой Фраттини группы G.

Приведен пример p-группы с немодулярной структурой подгрупп, обладающей модулярной подгруппой.
Л. М. Глускин

4344. Критерий непростоты конечной группы. Цакер (Un criterio di non semplicità di un gruppo finito. Zacher Giovanni), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, 1955, **24**, 215—219 (итал.)

Если конечная группа G содержит истинную нетривиальную модулярную подгруппу H (реф. 4343), то группа G не проста.
Л. М. Глускин

4345. Заметки о блоках групповых характеров. Осима (Notes on blocks of group characters. Osima Masaru), Math. J. Okayama Univ., 1955, **4**, № 2, 175—188 (англ.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа конечного порядка $g = p^a g'$, где p — простое число, $(g', p) = 1$, Ω — алгебраическое числовое поле, содержащее корни степени g из 1, Λ — центр группового кольца группы $\mathfrak{G}$ над Ω, $\mathfrak{o}$ — кольцо целых чисел поля Ω и $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца $\mathfrak{o}$, являющийся делителем числа p. Исследуются свойства центра Λ^* модулярного группового кольца группы $\mathfrak{G}$ над полем классов вычетов $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$.

Часть полученных результатов была ранее опубликована без доказательства (Brauer R., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1944, **30**, 109—114; 1946, **32**, 182—186).

В первом разделе работы рассматриваются идеалы кольца Λ^*. Пусть K_β — класс сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}_\beta$ — соответствующая дефектная группа (т. е. p-подгруппа Силова нормализатора относительно $\mathfrak{G}$ какого-либо элемента из K_β). Тогда классы сопряженных элементов, дефектные группы которых сопряжены с подгруппами группы $\mathfrak{H}_\beta$, образуют базис некоторого идеала $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}_\beta)$ кольца Λ^*.

Во втором разделе рассматриваются модулярные характеры кольца Λ^*. Если χ_i — обычный неприводимый характер группы $\mathfrak{G}$, то соответствующий модулярный характер кольца Λ^* получается путем сопоставления классу K_α вычета $\bmod \mathfrak{p}$ числа $\omega_i(K_\alpha) =$

$= g_\alpha \chi_i(G_\alpha)/z_i$, где $G_\alpha \in K_\alpha$; g_α — порядок класса K_α; z_i — степень неприводимого представления, которому соответствует характер χ_i. Характеры χ_i и χ_k входят в один блок, если соответствующие модулярные характеры совпадают для любого класса K_α. Каждый блок содержит неразложимый характер, степень которого $\not\equiv 0 \pmod{p^{a+1}}$. Характеры χ_i и χ_j тогда и только тогда входят в один блок, когда $\omega_i(K_\alpha) \equiv \omega_j(K_\alpha) \pmod{\mathfrak{p}}$ для всех p-регулярных классов K_α (класс называется p-регулярным, если порядки входящих в него элементов не делятся на p, и p-сингулярным в противоположном случае; эта терминология применяется и к элементам, входящим в класс). Некоторая совокупность B характеров группы $\mathfrak{G}$ состоит из блоков, если $\Sigma_{\chi_i \in B} \chi_i(V)\chi_i(S) = 0$ для любого p-регулярного элемента V и любого p-сингулярного элемента S.

В третьем разделе рассматриваются идемпотентные элементы и дефектные группы блоков. Примитивный идемпотентный элемент кольца Λ, соответствующий характеру χ_i, имеет вид $e_i = \frac{1}{g}\sum_{\alpha=1}^{m} z_i \chi_i(G_\alpha^{-1}) K_\alpha$ (m — число классов группы $\mathfrak{G}$). Пусть $E_\sigma = \Sigma_i' e_i$, где суммирование производится по значениям i, для которых $\chi_i \in B_\sigma$. Таким образом $E_\sigma = \Sigma_{\alpha=1}^{m} b_\alpha K_\alpha$, где $b_\alpha = \frac{1}{g}\Sigma_i' z_i \chi_i(G_\alpha^{-1})$. Тогда соответствующий элемент $E_\sigma^* = \Sigma_{\alpha=1}^{m} b_\alpha^* K_\alpha$ ($b_\alpha^* \equiv b_\alpha \pmod{\mathfrak{p}}$) кольца Λ^* является примитивным идемпотентом. Если для некоторого γ $b_\gamma^* \neq 0$ и $\omega_i(K_\gamma) \not\equiv \pmod{\mathfrak{p}}$ при $\chi_i \in B_\sigma$, то соответствующая группа $\mathfrak{D} = \mathfrak{H}_\gamma$ называется дефектной группой блока B_σ. Если порядок группы $\mathfrak{D}$ равен p^d, то d называется дефектом блока B_σ. Группа $\mathfrak{D}$ является максимальной инвариантной p-подгруппой своего нормализатора $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ в $\mathfrak{G}$. Группа тогда и только тогда имеет r блоков с дефектом d и дефектной группой $\mathfrak{D}$, когда группа $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ имеет r блоков с дефектом d и дефектной группой $\mathfrak{D}$. Если группа $\mathfrak{G}$ содержит инвариантную p-подгруппу $\mathfrak{H}$, централизатор $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ которой в $\mathfrak{G}$ также является p-группой, то $\mathfrak{G}$ имеет лишь один блок.

В четвертом разделе рассматривается матрица Картана, соответствующая блоку B_σ. Выведена формула Брауера для элементарных делителей этой матрицы. Эти элементарные делители равны порядкам дефектных групп некоторых p-регулярных классов группы $\mathfrak{G}$, называемых ассоциированными с блоком B_σ. Если $\mathfrak{D}$ — дефектная группа блока B_σ, то дефектные группы всех классов, ассоциированных с B_σ, сопряжены с подгруппами группы $\mathfrak{D}$ (причем только для одного класса соответствующая дефектная группа сопряжена с $\mathfrak{D}$). В. К. Туркин

4346. О проблеме И. Г. Ц. Уайтхеда из теории абелевых групп. Эренфёйхт А., Бюлл. Польской АН, Отд. 3, 1955, **3**, № 3, 127—129

О проблеме И. Г. Ц. Уайтхеда из теории абелевых групп. Эренфёйхт (On a problem of J. H. C. Whitehead concerning Abelian groups. Ehrenfeucht A.), Bull. Acad. polon. sci. Cl. III, 1955, **3**, № 3, 127—128 (англ.)

Доказывается, что если каждый гомоморфизм подгруппы H счетной свободной абелевой группы F в группу всех целых чисел C может быть продолжен до гомоморфизма группы F в C, то H служит для F прямым слагаемым. Отмечается, что теорема остается в силе и для группы F большей мощности, если предположить, что фактор-группа F/H счетна. В общем случае вопрос не решен.

Примечание референта. В предложении (3, 2) пропущено условие $g(H) = 0$, без которого это предложение, вообще говоря, не верно. Однако на дальнейший ход доказательства это влияния не оказывает. А. П. Мишина

4347. О некоторых перестановках элементов абелевой группы. Дуингер (On certain permutations of an abelian group. Dwinger Ph.), Simon Stevin., 1954, **30**, № 3, 140—143 (англ.)

Рассматриваются взаимно однозначные отображения вида $I_A(X) = A^2X^\sigma$ некоторой абелевой группы $\mathfrak{G}$ на себя, где $A \in \mathfrak{G}$, а σ — фиксированный автоморфизм второго порядка группы $\mathfrak{G}$. Доказывается, что группа, порожденная всеми отображениями I_A, кроме этих отображений, содержит только отображения вида $I_A'(X) = A^2X$ и что эта группа изоморфна факторгруппе некоторого расширения $\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}$ с помощью циклической группы второго порядка по нормальному делителю $\mathfrak{N}$, состоящему из всех элементов второго порядка группы $\mathfrak{G}$.

В расширении $\mathfrak{G}'$ отличный от нуля элемент факторгруппы $\mathfrak{G}'/\mathfrak{G}$ должен определять заданный автоморфизм σ группы $\mathfrak{G}$. Если $X^\sigma = X^{-1}$ для любого $X \in \mathfrak{G}$, а в группе $\mathfrak{G}$ не все элементы имеют порядок 2, то $\mathfrak{N}$ совпадает с центром группы $\mathfrak{G}'$. А. П. Мишина

4348. О строении бесконечных абелевых групп. Фукс (Über die Strukturfrage der unendlichen abelschen Gruppen. Fuchs L.), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math.-naturwiss. Reihe, 1954—1955, **4**, № 2, 91—95 (нем.)

Обзор известных результатов теории абелевых групп. А. П. Мишина

4349. О произведении двух абелевых групп. Итo (Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen. Itô Noboru), Math. Z., 1955, **62**, № 4, 400—401 (нем.)

Доказывается, что всякая (конечная или бесконечная) группа G, представимая в виде произведения двух своих абелевых подгрупп, метабелева.

Отмечаются также некоторые дополнительные свойства группы G в случае, когда она конечна. А. П. Мишина

4350. Конечные расширения абелевых групп с условием минимальности. Бэр (Finite extensions of Abelian groups with minimum condition. Baer Reinhold), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, № 2, 521—540 (англ.)

В первой части работы рассматриваются группы, в которых выполнено условие минимальности для подгрупп и коммутант которых конечен. Доказывается эквивалентность указанных свойств группы G с каждым из следующих пяти свойств: 1) группа G периодическая и каждая ее периодическая группа автоморфизмов конечна; 2) фактор-группа группы G по ее центру конечна и для подгрупп центра выполнено условие минимальности; 3) коммутант группы G конечен и в фактор-группе по коммутанту выполнено условие минимальности для подгрупп; 4) классы сопряженных элементов группы G конечны, и в G выполнено условие минимальности для абелевых подгрупп; 5) в каждом гомоморфном образе $J \neq 1$ группы G число отличных от единицы элементов, порядок которых конечен и не делится на квадрат, конечно и положительно.

На основании полученных результатов доказывается, что любая периодическая группа, группа всех автоморфизмов которой конечна, является конечной груп-

пой. Доказывается также конечность всякой группы, обладающей лишь конечным числом эндоморфизмов.

Во второй части работы рассматривается более широкий класс групп — группы с условием минимальности для подгрупп, обладающие абелевой подгруппой конечного индекса. Доказывается эквивалентность этих свойств группы G с каждым из следующих ее свойств: 1) в группе G выполнено условие минимальности для нормальных делителей, и существует абелева подгруппа конечного индекса; 2) в группе G выполнено условие минимальности для абелевых подгрупп и существует максимальная абелева подгруппа, обладающая лишь конечным числом сопряженных с нею подгрупп; 3) в группе G выполнено условие минимальности для абелевых подгрупп и всякий бесконечный гомоморфный образ группы G содержит отличный от единицы элемент x, обладающий лишь конечным числом сопряженных с ним элементов; 4) группа G периодическая; простые подгруппы гомоморфных образов группы G конечны; если H — бесконечный гомоморфный образ группы G, в котором пересечение всех подгрупп конечного индекса равно 1, то в H существует минимальный нормальный делитель; для всякой подгруппы S группы G любая периодическая подгруппа фактор-группы группы всех автоморфизмов группы S по подгруппе ее внутренних автоморфизмов конечна.

Из полученных результатов выводится, что любые две силовские p-подгруппы группы G с условием минимальности для подгрупп, обладающей абелевой подгруппой конечного индекса, сопряжены между собой (хотя число всех силовских p-подгрупп группы G при данном p может быть и бесконечным). А. П. Мишина

4351. Расширение группы целых чисел с помощью такой же группы. Лонстра (The groupextension of the group of the integers by that same group. Loonstra Frans), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 42—43 (англ.)

Показано, что любое расширение аддитивной группы целых чисел с помощью такой же группы изоморфно расширению, элементами которого являются пары целых чисел (m, n) и в котором групповая операция задается либо формулой

$$(m;\ n) + (m';\ n') = (m + m';\ n + n' + c_{m,\,m'}),$$

где $c_{m,\,m'}$ — целые числа, для которых

$$c_{m+n,\,p} + c_{m,\,n} = c_{m,\,n+p} + c_{n,\,p};\quad c_{0,\,n} = c_{n,\,0} = 0,$$

либо формулой

$$(m;\ n) + (2m';\ n') = (m + 2m';\ n + n' + c_{m,\,2m'}),$$

$$(m;\ n) + (2m' + 1;\ n') = (m + 2m' + 1;\ -n + n' + c_{m,\,2m'+1}),$$

где

$$c_{m+n,\,2p} + c_{m,\,n} = c_{m,\,n+2p} + c_{n,\,2p};$$

$$c_{m+n,\,2p+1} - c_{m,\,n} = c_{m,\,n+2p+1} + c_{n,\,2p+1};$$

$$c_{m,\,0} = c_{0,\,m} = 0.$$

Л. Е. Садовский

4352. Силовские p-подгруппы полной линейной группы над конечным полем характеристики p. Уир (Sylow p-subgroups of the general linear group over finite fields of characteristic p. Weir A. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 454—464 (англ.)

Пусть $GL(n,\ K)$ — полная линейная группа над полем $K = GF(p^k)$. Все матрицы вида $1 + \Sigma_{i<j} a_{ij} e_{ij}$ составляют p-подгруппу Силова G_n группы $GL(n,\ K)$.

Рассматриваются группы P_{ij}, $i<j$, состоящие из всех элементов $1 + ae_{ij}$, $a \in K$ и группы P, порождаемые несколькими группами вида P_{ij}. Устанавливается необходимое и достаточное условие инвариантности группы P в G_n. Описываются все характеристические подгруппы группы G_n, ее максимальные абелевы нормальные делители и автоморфизмы. Для случая, когда $K = GF(p)$, группа автоморфизмов группы G_n была изучена П. П. Павловым (Изв. АН СССР, сер. матем. 1952, 16, 437—458). П. П. Павловым же отмечено, что его результаты переносятся на случай любого конечного поля. Доказывается, что для группы G_n возрастающий центральный ряд совпадает с убывающим центральным рядом.

Указанное на стр. 459 отображение τ: $1 + \Sigma a_{ij} e_{ij} \to 1 + \Sigma b_{ij} e_{ij}$, где $b_{ij} = a_{n+1-j,\ n+1-i}$ вопреки утверждению автора, не является автоморфизмом группы G_n. Тем не менее существует автоморфизм, при котором $1 + e_{i,\ i+1}$ переходит в $1 + e_{n-i,\ n-i+1}$ (см. стр. 456 цитированной работы П. П. Павлова).

Д. А. Супруненко

4353. Разложение группы с одним определяющим соотношением в свободное произведение. Шеницер (Decomposition of a group with a single defining relation into a free product. Shenitzer Abe), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 273—279 (англ.)

Пусть F — свободная группа со свободными образующими $a_1, \ldots, a_n$. T-трансформацией элементов $a_1, \ldots, a_n$ называется такое отображение, что: $Ta_k = a_k$ для некоторого фиксированного k ($1 \leqslant k \leqslant n$), $Ta_i = a_i$, или $= a_i a_k^{\varepsilon}$, или $= a_k^{-\varepsilon} a_i$, или же $= a_k^{-\varepsilon} a_i a_k^{\varepsilon}$ ($i \neq k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varepsilon = \pm 1$). Слово $W = W(a_1, \ldots, a_n)$ называется минимальным, если для каждой T-трансформации элементов $a_1, \ldots, a_n$ длина слова TW, полученного из $W(Ta_1, \ldots, Ta_n)$ вычеркиванием стоящих рядом элементов a_i и a_i^{-1}, больше или равна длине слова W.

Пусть группа G порождается элементами $a_1, \ldots, a_n$, связанными одним определяющим соотношением $R(a_1, \ldots, a_n) = 1$, в левую часть которого входят все образующие, причем ни один из них не может сократиться в результате их циклической перестановки. Доказано, что группа G тогда и только тогда является свободным произведением бесконечной циклической группы и некоторой нетривиальной группы, когда всякое минимальное слово, полученное из $R(a_1, \ldots, a_n)$ с помощью T-трансформаций, содержит самое большее $n-1$ различных элементов a_i.

Найдены также некоторые критерии неразложимости группы G в свободное произведение, связанные со свойствами слова $R(a_1, \ldots, a_n)$. Как следствие одного из них получается, что фундаментальная группа замкнутой поверхности не разлагается в свободное произведение.

А. П. Мишина

4354. Представление групп в виде фактор-групп подходяще подобранных групп. Вефер (Darstellung von Gruppen als Faktorgruppen von invariant zugeordneten Gruppen. Wever Franz), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 70—71 (нем.)

Пусть группа G представима как фактор-группа свободной группы $\mathfrak{F}_k$ с k образующими по ее нормальным делителям $\mathfrak{R}^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Пусть $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ — максимальная характеристическая подгруппа в $\mathfrak{R}^{(\nu)}$,

$\mathfrak{U} = \bigcap_{\nu} \mathfrak{T}^{(\nu)}$ и $\mathfrak{K}$ — максимальная вполне характеристическая подгруппа в $\mathfrak{U}$. Пусть $T^{(\nu)} \cong \mathfrak{F}_k/\mathfrak{T}^{(\nu)}$, $U \cong \mathfrak{F}_k/\mathfrak{U}$, $V \cong \mathfrak{F}_k/\mathfrak{K}$. Нейман (Math. Ann., 1937, 114, 506—525) доказал, что группа V/V' порождается точно k элементами, имеющими порядок n, если $x^n = 1$, для всех $x \in G$. В заметке утверждается, что группы $T^{(\nu)}/T^{(\nu)\prime}$ и U/U' также порождаются точно k элементами, имеющими порядок d, если $x^d \in G'$ для всех $x \in G$. В частности, $T^{(\nu)}/T^{(\nu)\prime} \simeq U/U'$.

М. И. Граев

4355. О радикалах в группах. Плоткин Б. И., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 3, 179—180

Произведение $R(G)$ всех локально нильпотентных нормальных делителей произвольной группы G является локально нильпотентной характеристической подгруппой, называемой радикалом группы G. Группа называется радикальной, если она обладает возрастающим инвариантным рядом с локально нильпотентными факторами. В радикальной группе радикал содержит свой централизатор. Всякая RN^*-группа радикальна. Произведение всех радикальных нормальных делителей группы G является радикальной характеристической подгруппой $\tilde{R}(G)$ группы G, называемой верхним радикалом этой группы. Фактор-группа $G/\tilde{R}(G)$ не содержит нетривиальных локально нильпотентных нормальных делителей. С помощью этих утверждений некоторые вопросы относительно радикальных групп сводятся на вопросы относительно локально нильпотентных групп. Рассматривается также общее понятие радикала относительно произвольного теоретико-группового свойства.

В. М. Глушков

4356. Системно-транзитивные группы подстановок. Бомонт, Питерсон (Set-transitive permutation groups. Beaumont R. A., Peterson R. P.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 1, 35—42 (англ.)

Группа $\mathfrak{G}$ подстановок множества $N = [1, 2, \ldots, n]$ называется s системно-транзитивной ($1 \leqslant s \leqslant n-1$), если для любой пары подмножеств (неупорядоченных) S и T множества N, содержащих по s элементов, в $\mathfrak{G}$ существует подстановка, переводящая S в T. Группа подстановок n символов называется системно-транзитивной, если она s системно-транзитивна для всех s ($1 \leqslant s \leqslant n-1$). Доказано, что 1) знакопеременная группа A_n системно-транзитивна при $n > 2$; симметрическая группа S_n системно-транзитивна при любом n; 2) группа, сопряженная в S_n с s системно-транзитивной группой, также s системно-транзитивна; 3) s системно-транзитивная группа подстановок степени n также $n-s$ системно-транзитивна; 4) порядок s системно-транзитивной группы степени n равен mC_n^s, где m — порядок подгруппы, состоящей из подстановок, переводящих совокупность символов $[1, 2, \ldots, s]$ в себя; 5) если группа s системно-транзитивна хотя бы для одного значения s, то она транзитивна; 6) если группа s системно-транзитивна хотя бы для одного $s > 1$, то она примитивна; 7) если группа подстановок степени n является s системно-транзитивной группой и если существует такое простое число p, делящее C_n^s, что $\frac{1}{2}n < p \leqslant n$, то группа $(n-p+1)$-кратно транзитивна; 8) если $n \neq 5, 6, 9$, то группа подстановок степени n, не содержащая группы A_n, не $\left[\frac{1}{2}n\right]$ системно-транзитивна. При доказательстве последней теоремы, помимо теоретико-групповых методов, используется усиление постулата Бертрана, доказанное Брёйшем (Breusch R., Math. Z., 1932, **34**, 505—526). Кроме групп A_n и S_n, системно-транзитивными являются лишь одна группа степени 5, одна группа степени 6 и две группы степени 9. Для этих групп указаны порядки и порождающие подстановки. Указывается, что в книге Неймана и Моргенштерна (von Neumann J., Morgenstern O., Theory of games and economic behavior, Princeton, 1947) сказано, что все возможные типы системно-транзитивных групп определены Шеваллеем, однако никаких работ, посвященных этому вопросу, опубликовано не было.

В. К. Туркин

4357. О разложениях дробнолинейной группы LF $(2, p^n)$. Ито (On the factorizations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$. Itô Noboru), Acta scient. math., 1953, **15**, № 1, 79—84 (англ.)

Конечная группа G называется разложимой, если она является произведением двух ее собственных подгрупп H и K; представление $G = H \cdot K$ называется разложением группы G, а подгруппы H и K — множителями этого разложения. Описываются разложения дробнолинейной группы $LF(2, p^n)$. Если $p^n \equiv 1 \pmod 4$, то группа разложима тогда и только тогда, когда либо $p = 5$, $n = 1$, либо $p = 3$, $n = 2$, либо $p = 29$, $n = 1$. В первом случае имеется два различных разложения, во втором — семь, а в третьем — четыре. Если $p^n \equiv 3 \pmod 4$, то, за исключением четырех случаев, существует только одно разложение, множители которого являются неинвариантными максимальными подгруппами взаимно простых порядков. Исключительными случаями являются следующие: а) $p = 7$, $n = 1$; б) $p = 11$, $n = 1$; в) $p = 19$, $n = 1$ и г) $p = 23$, $n = 1$; в случае а) группа имеет 5, в случае б) — 6 и в случаях в) и г) — 3 различных разложения. Если $p = 2$, то при $n = 1$ существует только одно разложение, а при $n \geqslant 2$ — два.

С. П. Азлецкий

4358. Некоторые новые теоремы разложения для полупростых групп. Мостов (Some new decomposition theorems for semi-simple groups. Mostow G. D.), Mem. Amer. Math. Soc., 1955, № 14, 31—54 (англ.)

Пусть $\mathfrak{S}$ — пространство всех симметрических действительных матриц порядка n и $\mathfrak{E}$ — такое подпространство пространства $\mathfrak{S}$, что $[x\,[xy]] \in \mathfrak{E}$ для всех x и y из $\mathfrak{E}$. Пусть далее $\mathfrak{F}$ — такое множество матриц из $\mathfrak{S}$, что $x \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Sp}\, xg = 0$ для всех $g \in \mathfrak{E}$ ($\mathrm{Sp}\, x$ — след матрицы x).

Теорема. Любая положительно определенная действительная матрица порядка n может быть представлена в виде efe, где $e \in \exp \mathfrak{E}$, $f \in \exp \mathfrak{F}$. Это представление единственно и непрерывно.

Теорема. Любая неособенная действительная матрица может быть представлена в виде kfe, где k — ортогональная матрица, $f \in \exp \mathfrak{F}$, $e \in \exp \mathfrak{E}$.

Аналогичные теоремы верны для комплексных положительно определенных матриц.

Пусть $\mathfrak{G}$ — действительная полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{G}_c$ — ее комплексная оболочка. Пусть θ — операция сопряжения в $\mathfrak{G}_c$ относительно $\mathfrak{G}$, т. е. $\theta(x+yi) = x - yi$, где $x, y \in \mathfrak{G}$. Картановским разложением алгебры $\mathfrak{G}$ называется разложение $\mathfrak{G}$ в прямую сумму подалгебры $\mathfrak{K}$ и подпространства $\mathfrak{E}$, для которых существует такая компактная форма $\mathfrak{G}_k$ алгебры $\mathfrak{G}_c$, инвариантная относительно θ, что $\mathfrak{K} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{G}_k$, $\mathfrak{E} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{G}_k i$.

Теорема. Пусть G — связная полупростая группа Ли, $\mathfrak{S} = \mathfrak{K} + \mathfrak{E}$ — картановское разложение ее алгебры Ли. Пусть далее $\mathfrak{E}'$ — такое подпространство $\mathfrak{E}$, что $[x\,[xy]] \in \mathfrak{E}'$ для всех x и y из $\mathfrak{E}'$, и $\mathfrak{F}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{E}'$ в $\mathfrak{E}$ в смысле картановской метрики. Тогда пространство группы G является прямым про-

изведением $K \times F \times E'$, где K — подгруппа, определяемая алгеброй $\mathfrak{K}$, $F = \exp \mathfrak{F}$, $E' = \exp \mathfrak{E}'$.

Теорема. Пусть $\mathfrak{G}$ — действительная полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{G}'$ — полупростая подалгебра алгебры $\mathfrak{G}$. Пусть далее $\mathfrak{G}' = \mathfrak{K}' + \mathfrak{E}'$ — картановское разложение алгебры $\mathfrak{G}'$. Тогда существует такое картановское разложение $\mathfrak{K} + \mathfrak{E} = \mathfrak{G}$ алгебры $\mathfrak{G}$, что $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ и $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{E}$.

Как указывается автором, другие результаты, содержащиеся в статье, являются в основном повторением результатов Э. Картана, найденных им при развитии теории симметрических пространств. С их помощью можно доказать, что всякое однородное пространство с полупростой группой движений и полупростой стационарной подгруппой будет расслоенным пространством, слоем которого является евклидово пространство, а базой — однородное пространство с компактной группой движений. Доказательство этого утверждения будет опубликовано позднее. Некоторые результаты автора были ранее получены референтом (РЖМат, 1954, 5761). Ф. И. Карпелевич

4359. О многообразиях алгебраических групп. Шевалле (On algebraic group varieties. Chevalley C.), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 3-4, 303—324 (англ.)

Пусть G — неприводимая r-мерная алгебраическая группа автоморфизмов конечномерного векторного пространства над полем K нулевой характеристики. Доказано, что поле $\mathfrak{R}(G)$ рациональных функций на группе G изоморфно (как алгебра над K) подполю чисто трансцендентного расширения поля K степени трансцендентности r. Если поле K алгебраически замкнуто, то поле $\mathfrak{R}(G)$ чисто трансцендентно над K. В то же время построен пример алгебраической группы G над полем p адических чисел, для которого $\mathfrak{R}(G)$ не является чисто трансцендентным расширением этого поля. В. М. Глушков

4360. Соотношения между группами $\mathfrak{E}_7$ и $\mathfrak{E}_8$ и октавной плоскостью. II. Фрейденталь (Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. II. Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 4, 363—368 (нем.)

Часть I см. РЖМат, 1953, 1357. Обозначив через $\mathfrak{Z}$ экземпляр алгебры Ли $\mathfrak{A}_2$ с базисными элементами Γ, $\underline{\Delta}$, $\overline{\Delta}$ и через $\underline{\mathfrak{K}}$ и $\overline{\mathfrak{K}}$ — два экземпляра пространства $\mathfrak{K}$, автор строит линейное представление прямого произведения $\mathrm{Inv}(\mathfrak{M}) \times \mathfrak{Z}$ в пространстве $\underline{\mathfrak{K}} + \overline{\mathfrak{K}}$, полагая:

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}, \quad \underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где ϑ — элемент множества $\mathfrak{L}$ с компонентами φ, ρ, A, B (ρ — действительное число, $\varphi \in \mathrm{Inv}(\det X)$, A, $B \in \mathfrak{J}$), нули и единицы рассматриваются как линейные операторы в $\underline{\mathfrak{K}}$ и $\overline{\mathfrak{K}}$. Элементы пространства $\underline{\mathfrak{K}} + \overline{\mathfrak{K}}$ обозначаются через $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$, $P_1 \in \underline{\mathfrak{K}}$, $P_2 \in \overline{\mathfrak{K}}$.

В сумме $\mathfrak{R}$ пространств $\mathrm{Inv}(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{Z}$, $\underline{\mathfrak{K}}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ следующим образом определяется операция коммутирования: $[\Lambda, Q] = \Lambda Q$, $\Lambda \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{M}) + \mathfrak{Z}$, $Q \in \underline{\mathfrak{K}} + \overline{\mathfrak{K}}$; $[\overline{P}_1, \overline{P}_2] = -\frac{1}{4}\{P_1, P_2\}\overline{\Delta}$; $[\underline{P}_1, \underline{P}_2] = \frac{1}{4}\{P_1, P_2\}\underline{\Delta}$; $[\underline{P}_1, \overline{P}_2] = P_1 \times P_2 - \frac{1}{8}\{P_1, P_2\}\Gamma$, где $\underline{P} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix}$, и при $P_1 = (X_1, U_1, \xi_1, \omega_1)$, $P_2 = (X_2, U_2, \xi_2, \omega_2)$ положено $\{P_1, P_2\} = (X_1, U_2) - (X_2, U_1) + \xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1$.

Относительно этой операции пространство $\mathfrak{R}$ является алгеброй Ли. Оказывается, что эта алгебра дает полное представление для $\mathfrak{E}_8$. Далее устанавливаются некоторые свойства множеств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ и $\mathrm{Inv}(\det X)$. Из них отметим следующие: если для $P_i \in \mathfrak{M}$ имеют место соотношения $P_i \times P_j = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), то P_1, P_2, P_3 — линейно зависимы; если $P_i \in \mathfrak{M}$, $(P_1 \times P_2)P_3 = 0$, $\{P_i, P_j\} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), то все $P_i \times P_j$ попарно линейно зависимы; элемент θ множества $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда удовлетворяет для любого $P \in \mathfrak{M}$ уравнению $\theta\theta P = 0$, когда он представим в виде $\theta = P_0 \times P_1$, $\{P_0, P_1\} = 0$, $P_0, P_1 \in \mathfrak{M}$; если $\varphi \in \mathrm{Inv}(\det X)$ и $\varphi\varphi X = 0$ для всех $X \in \mathfrak{J}$, то $\varphi = 0$. Г. Б. Гуревич

4361. Соотношения между группами $\mathfrak{E}_7$ и $\mathfrak{E}_8$ и октавной плоскостью. III. Фрейденталь (Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. III. Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 2, 151—157; Indagationes math., 1955, 17, № 2, 151—157 (нем.)

Часть II см. реф. 4360.

Множество элементов $\Theta \in \mathfrak{L}$, для которых $\Theta^2 = 0$, обозначается через $\mathfrak{N}$, множество элементов $X \in \mathfrak{J}$, для которых $X \times X = 0$, — через $\mathfrak{P}$ (если $X \in \mathfrak{P}$, $X \neq 0$, то матрице X соответствует точка октавной плоскости). Если $\Theta = (\varphi, \rho, A, B) \in \mathfrak{N}$, то

$$A, B \in \mathfrak{P}: \quad (A, B) = -\rho^2; \tag{1}$$

$$\left(\varphi + \frac{4}{3}\rho\right)A = \left(\varphi' - \frac{4}{3}\rho\right)B = 0; \tag{2}$$

φ' определяется по φ из условия, что для любых $X, U \in \mathfrak{J}$ $(\varphi X, U) + (X, \varphi' U) = 0$. Кроме того,

$$\rho\varphi = -2 < A, B >, \tag{3}$$

$$\chi(A \times B) \leqslant 0 \tag{4}$$

и

$$\left(\varphi + \frac{1}{3}\rho\right)^2 X + 4B \times (A \times X) + (B, X)A = 0;$$
$$\left(\varphi' - \frac{1}{3}\rho\right)^2 U + 4A \times (B \times U) + (A, U)B = 0; \tag{5}$$

$$A \times \varphi X = \frac{2}{3}\rho A \times X; \quad B \times \varphi' U = -\frac{2}{3}\rho B \times U \tag{6}$$

для любых $X, U \in \mathfrak{J}$.

Соотношения (1), (2), (5), (6) необходимы и достаточны для принадлежности Θ к множеству $\mathfrak{N}$.

Далее показано, что с помощью присоединенной группы для $\mathfrak{E}_7$ каждый элемент Θ множества $\mathfrak{N}$ может быть преобразован (с точностью до скалярного множителя) в любой другой элемент того же множества и что $[\Theta, [\Theta, \Theta_1]] = -\frac{1}{12}\chi(\Theta\Theta_1)\Theta$. Если $\rho \neq 0$, то уравнения (1), (3) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы $\Theta \in \mathfrak{N}$.

Пусть теперь $\rho = 0$, и A, B — отличные от нуля элементы множества $\mathfrak{P}$, удовлетворяющие соотношениям (1) и (4). Тогда для любого $M \in \mathfrak{J}$, удовлетворяющего условиям $M \times B = 0$, $A \times (M \times M) \neq 0$, уравнения

$$\zeta\varphi = -2 < A, M >; \qquad A \times M = \frac{1}{2}\zeta^2 B$$

определяют такой элемент φ, что $(\varphi, 0, A, B) \in \mathfrak{N}$. Выбор матрицы M может быть подчинен таким дополнительным условиям, чтобы M определяла элемент φ однозначно. Г. Б. Гуревич

4362. Об алгебраических группах Ли над полем характеристики $p > 0$. Дьёдонне (Sur les groupes de Lie algébriques sur un corps de caractérisitique $p > 0$.

Dieudonné Jean), Rend. Circolo mat. Palermo, 1952 (1953), **1**, sér 2, 380—402 (франц.)

Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов конечномерного векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p>0$ и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Элементы алгебры $\mathfrak{g}$ можно рассматривать как эндоморфизмы пространства V. При этом оказывается, что для всякого эндоморфизма $X\in\mathfrak{g}$ имеем: $X^p\in\mathfrak{g}$. Алгебры Ли эндоморфизмов пространства V, обладающие таким свойством, называются p-алгебрами Ли.

Если G — неприводимая алгебраическая группа диагональных матриц (над K) размерности $q>0$, то для всякой p-подалгебры $\mathfrak{H}$ ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует неприводимая подгруппа $H\subset G$, алгебра Ли которой совпадает с $\mathfrak{H}$. Любая же неприводимая алгебраическая группа диагональных матриц размерности $q>0$ может быть определена следующим образом: это есть множество диагональных матриц с диагональными элементами $u_1, \ldots, u_n$, для которого $u_i=t_1^{\alpha_{1i}}\ldots t_q^{\alpha_{qi}}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, где каждое t_j пробегает мультипликативную группу поля K, а α_{ji} — такие целые рациональные числа, что матрица (α_{ji}) с n строками и q столбцами имеет ранг q и о. н. д. элементов любого ее столбца равен единице.

Пусть далее N — некоторый нильпотентный эндоморфизм пространства V и l — его показатель. Множество J автоморфизмов пространства V, имеющих вид $E+u_1N+u_2N^2+\cdots+u_{l-1}N^{l-1}$, где E — тождественный автоморфизм, а u_i пробегают поле K, является неприводимой алгебраической абелевой группой размерности $l-1$. Обозначим через p^r наибольшую степень p, меньшую чем l. Тогда для всякой неприводимой алгебраической подгруппы G группы J, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм N, существует неприводимая алгебраическая подгруппа $H\subset G$ размерности $r+1$, алгебра Ли которой также содержит эндоморфизм N. В. М. Глушков

4363. Формальные однопараметрические группы Ли. **Лазар** (Groupes de Lie formels à un paramètre. Lazard M.), Sémin. P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1954/1955, **8**, № 5, 1—31 (франц.)

Работа, за исключением небольших деталей, совпадает с другой работой автора (РЖМат, 1956, 3681).

В. М. Глушков

4364. Группы Ли и гипералгебры Ли над полем характеристики $p>0$. II. Дьёдонне (Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p>0$ (II). Dieudonné Jean), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 2, 218—244 (англ.)

Начало см. РЖМат, 1955, 4283.

Доказывается, что всякая формальная однопараметрическая группа Ли над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p>0$ изоморфна либо аддитивной группе W_1 с законом $x+y$, либо одной из групп I_r $(r=0, 1, \ldots)$, гипералгебры которых (РЖМат, 1955, 4283) задаются, кроме соотношений коммутативности, соотношениями $X_k^p=0$ для $k<r$, $X_k^p=X_{k-r}$ для $k\geqslant r$ $(0\leqslant k<\infty)$. Группа I_0 имеет канонический групповой закон вида $x+y+xy$. Аналогичные результаты с помощью других методов были получены также Лазаром (РЖМат, 1956, 3681).

Пусть далее G — любая формальная абелева группа Ли над K и $\mathfrak{G}$ — ее алгебра Ли. Тогда для полулинейного отображения $q: x\to x^p$ алгебры $\mathfrak{G}$ в себя существует такое целое число k, что $q^k(\mathfrak{G})=q^{k+1}(\mathfrak{G})$ и $q^{-k}(0)=q^{-(k+1)}(0)$. Алгебра $\mathfrak{G}_1=q^k(\mathfrak{G})$ называется ядром, а алгебра $\mathfrak{G}_2=q^{-k}(0)$ — p-радикалом алгебры $\mathfrak{G}$. Если размерность ядра $\mathfrak{G}_1$ равна m, то группа G является прямым произведением m групп, изоморфных группе I_0, и группы, имеющей $\mathfrak{G}_2$ своей алгеброй Ли (радикальной группы). В. М. Глушков

4365. Группы Ли и гипералгебры Ли над полем характеристики $p>0$. III. Дьедонне (Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p>0$ (III). Dieudonné Jean), Math. Z., 1955, **63**, № 1, 53—75 (франц.)

Строится формальная абелева группа Ли бесконечной размерности над простым полем характеристики $p>0$, называемая универсальной, и семейство S абелевых радикальных групп Ли конечной размерности, являющихся ее гомоморфными образами. Это семейство содержит (с точностью до расширения поля) все однопараметрические радикальные группы I_r $(r\geqslant 1)$, введенные в предыдущей работе (реф. 4364). Подробно изучаются также двумерные группы семейства S. Высказывается предположение, что S содержит все радикальные абелевы группы Ли конечной размерности.

В. М. Глушков

4366. Группы Ли и гипералгебры Ли над полем характеристики $p>0$. IV. Дьёдонне (Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p>0$ (IV). Dieudonné Jean), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 3, 429—452 (англ.)

Для любого поля K характеристики $p>0$ определяется ассоциативное кольцо $E(K)$, являющееся кольцом эндоморфизмов некоторой формальной абелевой группы Ли бесконечной размерности над K. Произвольной квадратной матрице степени n над кольцом $E(K)$ по определенному правилу сопоставляется формальная абелева группа Ли размерности n над K, причем всякая формальная конечномерная абелева группа над K может быть получена таким способом. В случае, когда поле K совершенно, кольцо $E(K)$ может быть заменено своим подкольцом $E^+(K)$, допускающим достаточно эффективное построение, а задача классификации конечномерных формальных абелевых групп Ли над полем K оказывается эквивалентной задаче классификации левых $E^+(K)$-модулей с конечным числом образующих. В. М. Глушков

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

4367. Теорема о трех полях. Херстейн (A theorem concerning three fields. Herstein I. N.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 2, 202—203 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $F\subset K\subset L$ — такие три несовпадающих поля, что для каждого элемента $x\in L$ существует над полем F отличный от нуля многочлен $f_x(t)$, для которого $f_x(x)\in K$. Тогда или L чисто несепарабельно над K, или L алгебраично над F. Этот результат содержит как частные случаи некоторые теоремы автора, Икеда, Капланского, Краснера, Нагаты, Тудзуки и Накаямы. Доказательство основывается на рассмотрении метрик в полях F, K и L.

И. Р. Шафаревич

4368. Несуществование некоторых расширений полей. Краснер (La non-existence de certaines extensions des corps. Kranser M.), Sémin. P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1954/1955, **8**, № 3, 1—3 (франц.)

Пусть k — поле, не являющееся алгебраическим расширением конечного поля. Тогда не существует отличного от k расширения K/k, в котором любой элемент $\alpha\in K$ является корнем многочлена вида x^n+x+a, $a\in K$. Приводятся наброски доказательств этого факта, а также двух его обобщений. С подробн-

ными доказательствами эти результаты опубликованы автором ранее (РЖМат, 1953, 102; 1954, 2878, 2879).
В. Б. Демьянов

4369. Явное построение сепарабельно замкнутого расширения одного поля степенных рядов. Арф (Eine explizite Konstruktion der separablen Hülle eines Potenzreihenkörpers. Arf C.), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, 19, № 3/4, 117—126 (нем.)

Строится сепарабельно замкнутое расширение $\mathfrak{A}$ поля $\mathfrak{P}$ формальных степенных рядов с коэффициентами из конечного поля $P = GF(p)$. Рассматривается группа Галуа расширения $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$. Сначала находятся три специальных типа подстановок этой группы, а затем доказывается, что всякий элемент группы однозначно представляется в виде произведения трех подстановок, по одной из каждого типа. Подробное исследование группы Галуа автор предполагает дать во второй части работы. В. Б. Демьянов

4370. Об индексах алгебраических уравнений. Уразбаев Б. М., Уч. зап. Алма-Атин. гос. пед. и учит. ин-та, 1953, 3, № 2, 14—22

Пусть α — целое алгебраическое число. Индексом уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ — неприводимый многочлен над полем рациональных чисел P, имеющий корнем число α, называется целое рациональное число $m = \sqrt{d(\alpha)/d}$, где $d(\alpha)$ — дискриминант степенного базиса $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$, а d — дискриминант поля $P(\alpha)$. Пусть $f(x) = \prod_{i=1}^{s} f_i^{e_i}(x) - pM(x)$, где $f_i(x)$ — многочлены, неприводимые по простому модулю p, а $M(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда p входит в индекс уравнения $f(x) = 0$ в том и только в том случае, когда $M(x)$ делится хотя бы на один из тех многочленов $f_i(x)$, для которых $e_i \geqslant 2$. Если существует такое целое число c, что $f(c) \equiv 0 \pmod{p^2}$ и $f'(c) \not\equiv 0 \pmod{p}$, то p входит в индекс уравнения $f(x) = 0$. В работе содержатся также результаты, относящиеся к специальному случаю двучленных уравнений $x^n + a = 0$.
В. Б. Демьянов

4371. Автоморфизмы полей функций. Розенлихт (Automorphisms of function fields. Rosenlicht Maxwell), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 1, 1—11 (англ.)

Исследуется группа G всех автоморфизмов поля K (рода g) алгебраических функций одной переменной над полем констант k характеристики p (при $g = 1$, G — группа k-автоморфизмов K, оставляющих инвариантной заданную точку P_0 поля K). В первую очередь заново доказывается конечность группы G для алгебраически замкнутого поля k. Основная часть работы посвящена исследованию случая, когда группа G бесконечна. Оказывается, что тогда в K найдется система таких величин $x, y_1, \ldots, y_n$, что $[K:k(x)] = p^n$, $K = k(x, y_1, \ldots, y_n)$, $y_i^p - y_i = a_i x^{p m_i} + b_i$ ($a_i \in k$, $a_i \notin k^p$, $b_i \in k$, m_i — целые положительные). Каждому набору $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ элементов поля k, удовлетворяющих уравнениям $\alpha_i^p - \alpha_i = a_i \beta^{p m_i}$, соответствует автоморфизм $\sigma(\sigma(x) = x,\ \sigma(y_i) = y_i + \alpha_i)$ поля K/k. Множество всех этих автоморфизмов образует нормальный делитель G_1 группы G, фактор-группа G/G_1 по которому является конечной циклической группой порядка, не делящегося на p. Обратно, если a_i, b_i определены как выше, и K — поле разложения многочлена $\prod (Y^p - Y - a_i x^{p m_i} - b_i)$ над $k(x)$, то $[K:k(x)] = p^n$. Если при этом найдется бесконечное множество наборов $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (определенных как выше) и если $g > 0$, то группа G поля K бесконечна. При этом род g имеет вид $(sp - 2)(p - 1)/2$, где s — целое число.
В. В. Морозов

4372. Обобщенная теория Галуа для колец с условием минимальности. II. Накаяма (Generalized Galois theory for rings with minimum condition, II. Nakayama Tadasi), Amer. J. Math., 1955, 77, № 1, 1—16 (англ.)

Строится теория Галуа для примарных колец R с единицей, удовлетворяющих условию минимальности (для левых и правых идеалов). Группа автоморфизмов Φ кольца R называется регулярной, если выполнены следующие условия I и II.

I. Совокупность Φ_0 внутренних автоморфизмов, содержащихся в Φ, совпадает с совокупностью внутренних автоморфизмов, индуцированных регулярными элементами некоторого подкольца K, которое содержит центр Z кольца R, порождается своими регулярными элементами, имеет такой конечный базис $a_1, \ldots, a_k$ над Z, что $a_{1r}, \ldots, a_{kr}$ линейно независимы над R_l (здесь a_r при $a \in R$ — правое умножение на a, рассматриваемое как эндоморфизм модуля R; R_l — совокупность всех левых умножений), и для которого фактор-кольцо $(K + N)/N$ и его произведение на центр кольца R/N, где N — радикал кольца R, являются простыми кольцами.

II. Фактор-группа Φ/Φ_0 конечна, и двусторонние R_l-модули $\rho_i R_l$, где ρ_i — система представителей из смежных классов группы Φ по Φ_0, не имеют изоморфных композиционных факторов.

Пусть S — подкольцо элементов, инвариантных относительно регулярной группы автоморфизмов Φ кольца R. Тогда фактор-кольцо $(S + N)/N$ просто, кольцо R обладает конечным правым базисом над подкольцом S, число элементов в этом базисе равно $(\Phi : \Phi_0)(K : Z)$ и группа Φ состоит из всех автоморфизмов кольца R, тождественных на S. Если T — подкольцо элементов, инвариантных относительно регулярной подгруппы Ψ группы Φ, то 1) $R \supset T \supset S$, 2) кольцо R имеет правый базис над T, 3) фактор-кольцо $(T + N)/N$ просто, 4) коммутаторное кольцо L подкольца T примарно, 5) произведение $(L + N)/N$ на центр кольца R/N просто. Отображение $\Psi \to T$ является взаимно однозначным соответствием Галуа между всеми регулярными подгруппами Ψ группы Φ и всеми подкольцами T, обладающими перечисленными выше свойствами. Любой изоморфизм α подкольца $T_0 \supset S$ в R, тождественный на S, для которого коммутаторные кольца подкольца T_0 и αT_0 примарны, может быть продолжен до автоморфизма из группы Φ.
З. И. Боревич

4373. Кольцо Ли, удовлетворяющее условию Энгеля, и группа Энгеля, не являющиеся нильпотентными. Кон (A non-nilpotent Lie ring satisfying the Engel condition and a non-nilpotent Engel group. Cohn P. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 3, 401—405 (англ.)

Пусть $K = F(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — счетное чисто трансцендентное расширение некоторого поля F характеристики p, где ξ_i алгебраически независимы над F. Рассматривается прямая сумма $A = K + M$, где M — двусторонний K-модуль, определяемый следующим образом:

1) счетный базис модуля M составляют символы $u(i_1, i_2, \ldots) = u(i)$, где $i_1, i_2, \ldots$ — последовательность чисел по mod p, среди которых только конечное число отлично от нуля. Общий элемент x модуля M имеет вид $x = \sum \gamma_{i_1 i_2 \ldots} u(i_1, i_2, \ldots) = \sum \gamma_i u_i$, с суммированием по конечному числу отличных от нуля элементов $\gamma_i \in K$.

2) $\alpha x = \sum \alpha\gamma_i u_i$, $x\lambda = \lambda x$, $\alpha \in K$, $\lambda \in F$, $x \in M$. $u(i_1, \ldots, i_\nu, \ldots)\xi_\nu = \xi_\nu u(i_1, \ldots, i_\nu + 1, \ldots)$ для $\nu = 1, 2, \ldots$ и для всех последовательностей (i).

Имеют место равенства $\alpha(x\beta) = (\alpha x)\beta$, $x \in M$, $\alpha, \beta \in K$, и $\alpha' x = x\alpha'$ для любого α' из подполя $K^* = F(\xi_1^p, \xi_2^p, \ldots)$. Далее автор полагает $xy = 0$ ($x, y \in M$), определяя тем самым произведение для всех элементов из A. Относительно операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$, ($x, y \in A$) множество A образует алгебру Ли L.

Оказывается, что алгебра L разрешима ($[[x, y], [z, t]] = 0$ для всех $x, y, z, t \in L$), удовлетворяет $(p+1)$-му условию Энгеля ($[\ldots[x, y], \ldots, y] = 0$ для $p+1$ любой пары элементов x, y из L), но не является нильпотентной.

Используя конструкцию алгебры L, автор строит группу G, обладающую аналогичными свойствами; и кольцо L и группа G являются, как легко видеть, счетными.

Полученные результаты непосредственно связаны с исследованиями Грюнберга (РЖМат, 1954, 1566) и Хиггинса (РЖМат, 1955, 112), рассматривающих условия, при которых кольцо Ли, удовлетворяющее n-му условию Энгеля, будет нильпотентным.

А. И. Кострикин

4374. Простые алгебры с чисто несепарабельными полями расщепления показателя 1. Хошшилд (Simple algebras with purely inseparable splitting fields of exponent 1. Hochschild G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, № 2, 477—489 (англ.)

Как известно в случае, когда K/C есть нормальное сепарабельное расширение, брауэровские классы подобных простых центральных алгебр с центром C и с полем расщепления K образуют подгруппу группы Брауэра, изоморфную группе расширений мультипликативной группы поля K посредством группы Галуа поля K относительно C. Устанавливается аналог этого результата для случая, когда C есть поле характеристики $p \neq 0$, а K — его такое конечное алгебраическое расширение, что p-я степень любого элемента из K содержится в C (чисто несепарабельное расширение показателя 1). При этом используется вариант теории Галуа, построенный для таких расширений Джекобсоном. Роль группы расширений играет так называемая ограниченная алгебра Ли расширений K посредством алгебры T дифференцирований поля K, аннулирующих C. Строится также аналог классической теории скрещенных произведений, в котором роль группы Галуа играет алгебра дифференцирований T.

В. М. Глушков

4375. Об инволютивных алгебрах. Алберт (On involutorial algebras. Albert A. A.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 7, 480—482 (англ.)

Пусть в алгебре $\mathfrak{A}$ конечного ранга над некоторым вещественным полем F определена инволюция, т. е. линейное отображение $a \to a^*$, обладающее свойствами: $(xy)^* = y^*x^*$, $(x^*)^* = x$ для x и y из $\mathfrak{A}$, и такая линейная функция $\delta(x)$, что $\delta(xx^*) > 0$ для $x \in \mathfrak{A}$, $x \neq 0$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ полупроста. Если $a^* = a$, то все характеристические числа матрицы R_a, соответствующей элементу a в регулярном представлении, вещественны. Если, кроме того, $\delta(xax^*) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathfrak{A}$ (такой элемент называется положительным), то характеристические числа матрицы R_a неотрицательны.

Основной результат работы: Если поле F является полем рациональных чисел, то элемент $a = a^*$ тогда и только тогда положителен, когда он представляется в виде $a = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, где x_i — некоторые многочлены от a с рациональными коэффициентами, причем $x_i = x_i^*$. В некоторой ослабленной форме этот результат был в качестве гипотезы высказан Вейлем.

И. Р. Шафаревич

4376. Заметка об обобщенно однорядных алгебрах. I. Йосии (Note on generalised uniserial algebras. I. Yoshii Tensho), Osaka Math. J., 1954, **6**, № 1, 105—107 (англ.)

Ассоциативная алгебра конечного ранга с единицей называется обобщенно однорядной алгеброй, если каждый ее односторонний идеал, порожденный примитивным идемпотентным элементом (такие идеалы называются примитивными), обладает одним композиционным рядом. Обобщенно однорядная алгебра, разложимая в прямую сумму примарных алгебр, называется однорядной алгеброй. Однорядная алгебра называется вполне однорядной алгеброй, если она остается однорядной алгеброй при любом расширении основного поля; аналогично определяется вполне обобщенно однорядная алгебра. Доказывается, что алгебра тогда и только тогда является вполне обобщенно однорядной алгеброй, когда она разлагается в прямую сумму алгебры, фактор-алгебра которой по радикалу сепарабельна, и вполне однорядной алгебры.

Е. Г. Шульгейфер

4377. Заметка об обобщенно однорядных алгебрах. II. Йосии, Икеда (Note on generalized uniserial algebras. II. Yoshii Tensho, Ikeda Masatoshi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 7, 550—552 (англ.)

Для ассоциативной алгебры A с единицей конечного ранга над полем K доказываются следующие теоремы: 1) Если алгебра A_L, где L — некоторое расширение поля K, является обобщенно однорядной алгеброй (реф. 4376), то такой же является и алгебра A. 2) Если радикал алгебры A_L является главным идеалом, то главным идеалом будет и радикал алгебры A_L. На примере показывается, что если A_L является левой (правой) обобщенно однорядной алгеброй (т. е. алгеброй, у которой каждый левый (правый) примитивный идеал обладает одним композиционным рядом), то алгебра A может не быть левой (правой) обобщенно однорядной алгеброй.

Е. Г. Шульгейфер

4378. Об уравнении $x^m = 1$ в целочисленном групповом кольце. Берман С. Д., Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 3, 253—261

Пусть G — конечная группа, K — числовое поле или кольцо целых величин числового поля, C — кольцо целых рациональных чисел, $R(G, K)$ — групповое кольцо группы G над K.

Рассматривается уравнение $x^m = 1$ (m — натуральное число) в кольце $R(G, K)$. Элементы кольца $R(G, K)$, удовлетворяющие этому уравнению, называются корнями из 1. Порядком корня u из 1 называется наименьшее натуральное число n, для которого $u^n = \varepsilon \cdot 1$, где ε — корень из 1, содержащийся в K. Корень из 1 вида εa, где $a \in G$, называется тривиальным. Для любого $x = \sum_i \alpha_i a_i$ ($\alpha_i \in K$, $a_i \in G$) — через x^* обозначается выражение $\sum_i \bar{\alpha}_i a_i^{-1}$; где $\bar{\alpha}_i$ — число комплексно-сопряженное с α_i. Если $xx^* = x^*x$, то элемент x называется нормальным. Доказано, что порядок корня из 1 в $R(G, K)$, где K — кольцо целых величин некоторого числового поля, является делителем порядка группы G. Кроме того, оказывается, что следующие три предложения равносильны: I. Кольцо $R(G, C)$ содержит только тривиальные корни из 1; II. Все элементы кольца $R(G, C)$ нормальны; III. Группа G — либо абелева, либо гамильтонова группа порядка 2^m.

В. К. Туркин

4379. Об эрмитовых операторах над алгеброй Кэли. **Албе рт** (On Hermitian operators over the Cayley algebra. Albert A. A.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 9, 639—640 (англ.)

В n-мерном векторном пространстве L над действительной алгеброй Кэли вводится скалярное произведение $(x, y) = \Sigma x_i y_i^*$, где x_i и y_i — координаты векторов x и y соответственно, а y_i^* — элемент, сопряженный с y_i. Линейное преобразование T пространства L, рассматриваемого как $8n$-мерное пространство над полем действительных чисел, называется эрмитовым, если $(xT, y) = (x, yT)$ для любых $x, y \in L$. Оказывается, что эрмитовы преобразования образуют J-алгебру, изоморфную специальной J-алгебре n-мерных действительных симметрических матриц. Л. А. Скорняков

4380. Стандартные алгебры Ли. Гуревич Г. Б., Матем. сб., 1954, **35**, 437—460; Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 204—205

Линейная алгебра Ли $\mathfrak{A}$, состоящая из нильпотентных матриц, называется нуль-алгеброй. Пусть R_k — совокупность всех векторов x, для которых $A^k x = 0$, при всех $A \in \mathfrak{A}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется полной нуль-алгеброй, если она содержит все матрицы A, для которых $A^k x = 0$, когда $x \in R_k$. Нормализатор полной нуль-алгебры называется главной алгеброй. Любая линейная алгебра Ли, нормализатор которой является главной алгеброй, называется стандартной.

Пусть e_{ij} — матрица, все элементы которой равны нулю, кроме элемента, находящегося на пересечении i-й строки и j-го столбца, который равен 1. Доказывается, что базис полной нуль-алгебры состоит из всех матриц e_{ij}, для которых $r_{s-1} < i \leqslant r_s$, $j > r_s$, $s = 1, 2, \ldots, m-1$; $r_0 = 0$, r_s — размерность пространства R_s. Базис соответствующей главной алгебры состоит из всех матриц e_{ij}, для которых $r_{s-1} < i \leqslant r_s$, $j > r_{s-1}$ ($s = 1, 2, \ldots, m$). Стандартная нуль-алгебра определяется q матрицами $e_{i_1 j_1}$, $e_{i_2 j_2}$, $\ldots$, $e_{i_q j_q}$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_q$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_q$; $i_1 < j_1$, $i_2 < j_2$, $\ldots$, $i_q < j_q$; вместе с каждой матрицей $e_{i_\alpha j_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, q$, она содержит все матрицы e_{ij}, для которых $i \leqslant i_\alpha$; $j \geqslant j_\alpha$. Разрешимая стандартная алгебра получается из стандартной нуль-алгебры добавлением некоторых диагональных матриц. Неразрешимая стандартная алгебра получается из разрешимой добавлением некоторых клеточно-диагональных матриц.

Выводится признак, с помощью которого можно выяснить, является стандартная нуль-алгебра, содержащая данную нуль-алгебру, минимальной или нет, а также признак для распознавания, является данная нуль-алгебра стандартной или нет.

Вторая работа является кратким изложением первой. А. В. Сульдин

4381. Нормированные алгебры Ли и аналитические группы. Дынкин (Normed Lie algebras and analytic groups. Dynkin E. B.), Amer. Math. Soc. Translation, № 97, 1953, 66 pp. (англ.)

Перевод из журнала «Успехи матем. наук»; 1950, 5, № 1, 135—186.

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 282.

4382. О производных алгебрах алгебры Ли. Дикс мье (Sur les algèbres dérivées d'une algèbre de Lie. Dixmier J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 4, 541—544 (франц.)

Пусть G — конечномерная нильпотентная алгебра Ли над коммутативным полем K и пусть $D^0 G = G$, $D^i G = [D^{i-1} G, D^{i-1} G]$ ($i = 1, 2, \ldots$). Тогда, если алгебра $D^i G$ некоммутативна, то алгебра $D^i G / D^{i-1} G$ имеет размерность $\geqslant 2^i + 1$ ($i \geqslant 0$). Если характеристика поля K отлична от 2 и $\dim (D^1 G / D^2 G) = 3$, то $D^2 G$ имеет размерность 0 или 1, причем обе возможности фактически могут иметь место. В. М. Глушков

4383. Об алгебрах Ньюмена. III. Военака (On Newman algebra. III. Wooyenaka Yuki), Proc. Japan. Acad., 1955, **31**, № 2, 66—69 (англ.)

Ч. I, II см. РЖМат, 1955, 5657; 1956, 1149. Дается новая (слегка модифицированная) система аксиом так называемой алгебры Ньюмена, где аксиомы 3. $a + b = b + a$ и 6. $a(b + c) = ab + ac$ из первой работы и аксиомы 6. $a(b + c) = ab + ac$ и 8′. $a + b'b = b'b + a$ из второй заменены одной аксиомой 6′. $a(b + c) = ca + ba$. Новая система попрежнему независима.

Л. И. Головина

4384. Представление мультидифференциальных полиномов в полях простой характеристики. Егер (A representation of multidifferential polynomials in fields of prime characteristic. Jaeger Arno), Math. Ann., 1955, **130**, № 1, 1—6 (англ.)

Пусть F — сепарабельное поле алгебраических функций от n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ над основным полем f характеристики $p > 0$. Тогда существует n дифференцирований $D_1, \ldots, D_n$ поля F над f, однозначно определяемых уравнениями $D_i(x_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \ldots, n$).

Поле констант C относительно всех этих дифференцирований порождается полем f и p-ми степенями элементов поля F. Доказывается, что F есть алгебра с делением ранга p^n над полем C с базисом $\{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}; 0 \leqslant \alpha_i < p, i = 1, \ldots, n\}$. Строка $D = (D_1, \ldots, D_n)$ называется мультидифференцированием, а конечные формальные суммы вида $\Sigma_\alpha a_\alpha D^\alpha = \Sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — целые неотрицательные числа, $a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \in F$, — мультидифференциальными полиномами в поле F относительно мультидифференцирования D. Сумма и произведение двух мультидифференциальных полиномов $A = \Sigma a_\alpha D^\alpha$ и $B = \Sigma b_\beta L^\beta$ определяется формулами

$$A + B = \sum\nolimits_\alpha (a_\alpha + b_\alpha) D^\alpha,$$

$$AB = \sum\nolimits_{\alpha, \beta} \sum\nolimits_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} a_\alpha D^{\alpha-\gamma}(b_\beta) D^{\beta+\gamma},$$

где $\binom{\alpha}{\gamma} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\gamma_i}$.

Относительно этих операций множество $\Omega(F, D)$ всех мультидифференциальных полиномов является кольцом.

Доказывается, что фактор-кольцо этого кольца по идеалу, порожденному мультидифференциальными полиномами $D_1^p, \ldots, D_n^p$, изоморфно полному кольцу эндоморфизмов алгебры F над полем C.

В. М. Глушков

4385. Связь между присоединенными мультидифференциальными полиномами и транспонированными матрицами для полей простой характеристики. Егер (A relation between adjoint multidifferential polynomials and transposed matrices for fields of prime characteristic. Jaeger Arno), Math. Ann., 1955, **130**, № 1, 7—10 (англ.)

В предыдущей заметке того же автора (реф. 4384) построено отображение, сопоставляющее каждому мультидифференциальному полиному $A = \Sigma a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ матрицу $(b_{\alpha\beta})$ над полем дифференциальных констант исходного поля F алгебраических функций характеристики $p > 0$; здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, а α_i и β_i — неотрицательные целые числа, не превосходящие $q = p - 1$.

В реферируемой заметке доказано, что при этом отображении присоединенный (к полиному A) мультидифференциальный полином $A^* = \Sigma(-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_n}$ переходит в матрицу вида $(b_{\beta', \alpha'})$, где $\alpha' = (q - \alpha_1, \ldots, q - \alpha_n)$, $\beta' = (q - \beta_1, \ldots, q - \beta_n)$. В. М. Глушков

См. также: 4292, 4300, 4301, 4393, 4396, 4397, 4490, 4497, 4514, 4568, 4569, 4590 К, 4638. 4712, 4759, 4784, 4802, 4803, 4805, 4807, 4833, 4835, 4856, 4866, 4877, 4878, 4882, 4916—4926

ТОПОЛОГИЯ

4386. О пространстве ультрафильтров. Банашевский (Über den Ultrafilterraum. Banaschewski Bernhard), Math. Nachr., 1955, **13**, № 5, 273—281 (нем.)

Изучается пространство Ω всех ультрафильтров (т. е. максимальных центрированных систем подмножеств) данного множества E, являющееся, очевидно, максимальным бикомпактным (чеховским) расширением βE множества E с дискретной топологией. В п. 1 приводятся результаты Поспишила (Pospišil B., Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, 1939, № 270, 1—16) о мощности пространства $\Omega = \beta E$. В п. 2 рассматривается группа автоморфизмов пространства $\Omega = \beta E$ и доказывается, что эта группа в некотором естественном смысле совпадает с группой всех изоморфизмов частично упорядоченного множества всех фильтров множества E на себя, а также и с группой всех перестановок множества E (теоремы 4,5). Для любого множества E мощности $\mathfrak{e}$ имеется ровно $2^{2^{\mathfrak{e}}}$ различных классов изоморфных (в смысле частичного упорядочивания) систем подмножеств множества E. В п. 3 рассматриваются замкнутые инвариантные множества пространства $\Omega = \beta E$ относительно группы всех перестановок множества E и изучается вопрос о мощности $\mathfrak{m}$ каждой области транзитивности пространства $\Omega^* = \beta E \setminus E$. Оказывается, что (в предположении справедливости обобщенной континуум-гипотезы) $\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{e}}$, где $\mathfrak{e}$ — мощность множества E (теорема 8). Ю. М. Смирнов

4387. Заметка о неархимедовых метризациях. Грот, Врис (A note on non-Archimedean metrizations. Groot J. de, Vries H. de), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 2, 222—224; Indagationes math., 1955, **17**, № 2, 222—224 (англ.)

По аналогии с неархимедовыми телами метризуемое пространство называется неархимедовым, если в нем возможно ввести метрику (в обычном смысле), удовлетворяющую более сильному, чем аксиома треугольника, условию: для любых точек x, y и z всегда $\rho(x, z) \leqslant \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$.

Первый автор обнаружил, что класс неархимедово метризуемых пространств совпадает с классом метризуемых пространств, нульмерных в смысле размерности dim (или, что эквивалентно, Ind), и нашел необходимое и достаточное условие, аналогичное условию референта (Успехи матем. наук, 1951, 6, № 6, 100—111); хаусдорфово пространство метризуемо и нульмерно тогда и только тогда, когда оно имеет базу, распадающуюся в сумму счетного или конечного числа локально конечных систем открыто-замкнутых множеств. Совместно доказано, что локально (неархимедово) метризуемое пространство (неархимедово) метризуемо лишь тогда, когда оно паракомпактно, а также, что всякое метризуемое пространство мощности, меньшей чем мощность континуума, метризуемо неархимедовым образом.

Примечание референта. Предпоследнее утверждение без требования неархимедовости, как указано авторами, доказано референтом (там же). Последнее утверждение работы вытекает из следующего факта: всякое нормальное пространство положительной размерности dim имеет мощность $\geqslant \mathfrak{c}$. Ю. М. Смирнов

4388. Паракомпактность и сильная скринабельность. Нагами (Paracompactness and strong screenability. Nagami Keiô), Nagoya Math. J., 1955, 8, February, 83—88 (англ.)

Семейство множеств $\{A_\lambda\}$ топологического пространства R называется дискретным, если их замыкания $[A_\lambda]$ попарно не пересекаются. Топологическое пространство называется сильно скринабельным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать покрытие, являющееся суммой счетного или конечного числа дискретных систем открытых множеств (Bing R. H., Canad J. Math., 1951, **3**, 175—186). Целью работы является доказательство эквивалентности свойств сильной скринабельности и паракомпактности для регулярных пространств.

Примечание референта. Полученный результат не нов (см. работу Майкла — РЖМат, 1954, 5481; в реферате этой работы указанная теорема не упоминается). Ю. М. Смирнов

4389. Теорема Александрова об отображениях для паракомпактных пространств. Нагами (Alexandroff's mapping theorem for paracompact spaces. Nagami Keiô), Kôdai Math. Sem. Repts, 1955, **7**, № 1, 21—22 (англ.)

Скажем, что топологическое пространство R аппроксимируется комплексами со слабой топологией (Whitehead J. H. C., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **53**, № 3, 213—245), если для каждого открытого покрытия γ пространства R существует такое непрерывное отображение пространства R в некоторый (вообще говоря, в бесконечный) комплекс K со слабой топологией, что полные прообразы открытых звезд вершин комплекса K составляют вписанное в γ покрытие. Аналогично Даукеру (Dowker C. H., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, 386—391) автор доказывает, что хаусдорфово пространство паракомпактно тогда и только тогда, когда оно аппроксимируется комплексами со слабой топологией. Ю. М. Смирнов

4390. Об одном характеристическом свойстве наследственно-нормальных пространств. Инокума (On a characteristic property of completely normal spaces. Inokuma Takeshi), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 2, 56—59 (англ.)

Доказывается, что в любом наследственно-нормальном пространстве R выполняется следующее условие P:

к любой конечной системе множеств $H_1, \ldots, H_n$ можно подобрать такие замкнутые множества $\Phi_1 \supseteq [H_1], \ldots, \Phi_n \supseteq [H_n]$, что $R = U_{i \leqslant n} \Phi_i$ и $\Phi_i \cap \Phi_j \cap [H_i \cup H_j] = [H_i] \cap [H_j]$ для любых $i \leqslant n$ и $j \leqslant n$. Наоборот, если свойство P выполняется в данном пространстве R для любой пары множеств, то пространство R наследственно-нормально. В случае паракомпактности наследственно-нормального пространства R свойство P выполняется для любой локально конечной системы множеств $\{H_\lambda\}$.

Примечание референта. Последнее предложение автора в силу одной леммы Дьедонне (Dieudonné J., J. math. pures et appl., 1944, 23, 65—76) верно и без предположения о паракомпактности.

Ю. М. Смирнов

4391. Одно свойство бикомпактных абсолютно окрестностных ретрактов. Фэйделл (A property of compact absolute neighborhood retracts. Fadell E. R.), Duke Math. J., 1955, 22, № 2, 179—184 (англ.)

Легко построить такие континуумы (например, окружность с навертывающейся на нее спиралью), которые можно непрерывно отобразить «в себя» без неподвижной точки, а «на себя» отобразить их таким образом уже невозможно. Известен класс таких континуумов, для которых из существования отображения «в себя» без неподвижной точки следует наличие отображения «на себя» также без неподвижной точки. Это—так называемые мультикогерентные пеановские континуумы (Куратовский К., Fundam. math., 1929, 14, 304—310).

Автор доказывает, что для континуумов, являющихся абсолютно окрестностными ретрактами, выполняется следующее более сильное свойство: для каждого отображения f_0 такого континуума R «в себя» без неподвижной точки существует гомотопное ему отображение f_1 континуума R «на себя» с такой гомотопией $F(x, t) = f_t(x)$, что ни одно из отображений f_t не имеет неподвижной точки. Если, кроме того, континуум R цикличен (т. е. не разбивается ни одной своей точкой), то каждому отображению f_0 континуума R «в себя» гомотопно некоторое отображение f_1 континуума R «на себя» с такой гомотопией $F(x, t) = f_t(x)$, что множество неподвижных точек у всех отображений f_t одно и то же. (Отображения f_0 и f_1, соединенные такого рода гомотопией, автор называет F-гомотопными).

Обе эти теоремы вытекают из следующего общего утверждения: Назовём предварительно отображение f континуума R «в себя» φ-отображением, если для каждой его точки x существует такая точка $x' \neq x$, что $f(x') \neq x'$ и что точки x и $f(x')$ лежат в одной и той же компоненте связности дополнения $R \setminus x'$. Оказывается, что если метрическое пространство R является абсолютно окрестностным ретрактом, то для всякого φ-отображения пространства R «в себя» существует F-гомотопное ему отображение пространства R «на себя».

Ю. М. Смирнов

4392. О размерности паракомпактных хаусдорфовых пространств. Нагами (On the dimension of paracompact Hausdorff spaces. Nagami Keiô), Nagoya, Math. J., 1955, 8, February, 69—70 (англ.)

Доказывается, что всякое локально n-мерное паракомпактное хаусдорфово пространство n-мерно. (Размерность определяется с помощью покрытий). Отсюда выводится, что всякое паракомпактное хаусдорфово пространство, обладающее замкнутым локально конечным покрытием, каждый элемент которого имеет размерность $\leqslant n$, также имеет размерность $\leqslant n$. Доказывается также, что для наследственно-паракомпактных пространств размерность, определенная с помощью покрытий, монотонна.

Примечание референта. Первое предложение непосредственно вытекает из второго. Второе в несравненно более сильной форме доказано Морита (РЖМат, 1955, 3661). Третье предложение непосредственно вытекает из аналогичной теоремы Даукера для тотально-нормальных пространств (РЖМат, 1956, 2037).

Ю. М. Смирнов

4393. К эквивалентности последовательностей Мура—Смита и фильтров. Брунс, Шмидт (Zur Äquivalenz von Moore—Smith-Folgen und Filtern. Bruns Günter, Schmidt Jürgen), Math. Nachr., 1955, 13, № 3—4, 169—186 (нем.)

Устанавливается и подробно изучается соответствие между направленными множествами (последовательностями Мура—Смита; Биркгоф, Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952, 301) и фильтрами (Bourbaki N., Topologie générale. Chap. I—II. Actual. sci. industr., 1940, 858).

А. С. Шварц

4394. Некоторые типы однородных континуумов. Берджесс (Certain types of homogeneous continua. Burgess C. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 348—350 (англ.)

Исследуются некоторые обобщения понятия однородности, данные ранее автором (РЖМат, 1955, 2593). Доказываются следующие теоремы: 1) Если всякий собственный подконтинуум континуума M однороден в смысле близости, то континуум M является наследственно неразложимым. 2) Если разложимый континуум M обладает тем свойством, что для всяких двух собственных невырожденных подконтинуумов H и K континуума M существует гомеоморфное отображение континуума M на себя, переводящее H в K, то M есть простая замкнутая линия. 3) Если при некотором целом $n > 1$ плоский, нелокально связный континуум M является n-однородным в смысле близости, то континуум M не разложим. 4) Если при некотором $n > 1$ собственное замкнутое неограниченное подмножество плоскости является n-однородным, то это подмножество гомеоморфно прямой линии.

А. С. Пархоменко

4395. О расцвечивании графов. Мыцельский (Sur le coloriage des graphs. Mycielski J.), Colloq. math., 1955, 3, № 2, 161—162 (франц.)

Автор определяет индуктивно не содержащий треугольников граф с $3 \cdot 2^{n-1} - 1$ вершинами, для расцвечивания которого необходимо иметь не менее $n+1$ цветов. Ставится аналогичная проблема для графов, не содержащих m-звенных циклов (m — фиксированное натуральное число).

Примечание референта. Для $m = 5$ эта проблема решена (РЖМат, 1955, 4308). Однако результат, полученный в цитируемой статье, не заключает результата реферируемой статьи, ибо, как следует из построения, изложенного в цитированной статье, число вершин n-цветного графа больше, чем в реферируемой работе.

H. Fast

4396. О правильных поверхностях Римана и линейных изображениях конечных групп. Липин Н. В., Сб. науч. работ общетехн. и спец. кафедр. Ленингр. технич. ин-та холодильной пром-сти, 1954, 6, 38—50

Пусть S — регулярная (быть может, разветвленная), накрывающая поверхность сферы. Группа скольжения поверхности S над сферой естественно представляется автоморфизмами одномерной группы Бетти поверхности S. Доказывается, что это представление точное.

Примечание референта. Для справедливости утверждения и доказательства теоремы необходимо предположить, что поверхность S не гомеоморфна сфере. Без этого ограничения противоречащим примером будет служить двулистное накрытие сферы с двумя точками ветвления (риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$).

И. Р. Шафаревич

4397. Заметка об инвариантных факторах группы $\Gamma(A)$. Пехтер (A note on the invariant factors of $\Gamma(A)$. Paechter G. F.), Ann. Math., 1954, 60, № 3, 558—559 (англ.)

Исправляется доказательство одной теоремы из работы Уайтхеда (Whitehead J. H. C., Ann. Math., 1950, 52, 51—110, теорема 8). А. П. Мишина

4398. К одной проблеме Борсука относительно гомологий функционального пространства S_m^x. Мардешич (Sur un problème de M. Borsuk concernant l'homologie de l'espace fonctionnel S_m^x. Mardešić Sibe), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 24, 2287—2288 (франц.)

Пусть S_m^X — пространство отображений компакта X размерности k ($k>0$) в m-мерную сферу S_m, снабженное топологией равномерной сходимости.

Теорема. Пусть $H_k(X, P)=0$ (P — группа действительных чисел, приведенных по модулю 1). Тогда для любой группы Y $H_{m-k}(S_m^X, Y)=0$ при $m\geqslant k$ (группы гомологий пространства S_m^X можно брать основанными на сходящихся циклах Вьеториса, на компактных сходящихся циклах Вьеториса или на непрерывных циклах, так как для S_m^X эти группы гомологий совпадают). Доказательства проведены достаточно подробно. А. С. Шварц

4399 К. Введение в теорию множеств и топологию. Куратовский (Wstęp do teorii mnogości i topologii. Kuratowski Kazimierz. Warszawa, PWN, 1955, 218 str., 14.20 zł.) (польск.)

Книга состоит из двух частей; первая часть посвящена абстрактной теории множеств, вторая — основам теоретико-множественной топологии и введению в комбинаторную топологию. В первых четырех главах излагаются действия над множествами (включая «внешнее» или «декартово» произведение), понятие отображения (функции) в самом общем виде и т. п. При всей элементарности изложения (не предполагающего никакой подготовки — книга задумана как книга для первого чтения по теории множеств и действительно может быть таковой) — оно ведется на уровне и в свете современных общелогических понятий. Четвертая и пятая главы посвящены кардинальным числам и действиям над ними. В главах седьмой и восьмой излагаются упорядоченные и вполне упорядоченные множества, порядковые типы и порядковые числа, включая доказательство теоремы Цермело.

Вторая часть начинается с краткого исторического введения, за которым следует элементарная теория метрических пространств (гл. 9—11) и их непрерывных отображений (гл. 12), включая теорему Лебега-Брауэра-Урысона о продолжении непрерывных функций (называемую согласно распространенной, но не кажущейся референту вполне оправданной традиции теоремой Титце). Далее излагаются свойства метрических пространств со счетной базой (включая теорему Урысона о погружении этих пространств в гильбертов кирпич).

Гл. 14 посвящена теории полных, а гл. 15 — теории компактных метрических пространств. В гл. 16 и 17 излагается теория связности и введение в теорию континуумов. Гл. 18 посвящена локальной связности. В гл 19 излагается определение размерности в двух основных его формах (индуктивной и «с покрытиями»). Доказательство эквивалентности этих двух определений опускается как выходящее за элементарные рамки книги, поставленные автором. Гл. 20 и 21 содержат изложение основных свойств симплексов (включая лемму Шпернера, размерность и теорему о неподвижных точках) и основные понятия комбинаторной топологии — кончая понятием групп Бетти, иллюстрированным примерами и подробно изложенным. Последняя 22-я глава посвящена проблемам разбиения плоскости; доказываются теоремы Жордана и Янишевского. Приведенное краткое изложение содержания книги дает представление о его богатстве: на 200 страницах автору удалось изложить большое количество важных фактов и изложить их так, что от читателя не требуется никакой специальной подготовки; весьма компактное изложение ведется с обычным для автора мастерством, никогда не делается формальным и не теряет наглядности. П. С. Александров

См. также: 4358, 4414, 4454, 4557, 4639, 4647, 4648, 4800, 4835, 4856, 4857, 4859, 4862, 4872

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4400. Новый вариант теории неотрицательных вещественных чисел. Гонин Е. Г., Уч. зап. Молотовск. гос. пед. ин-та, 1954, № 13, 47—52

Предложенная А. Н. Колмогоровым (Успехи матем. наук, 1946, 1, № 1, 217—219) программа построения теории вещественных чисел как целочисленных функций натурального аргумента, как известно, аналогична теории систематических (в частности, десятичных) дробей, но не содержит ее как частный случай, так как целочисленные функции теории систематических дробей определяются лишь на множестве степеней основания принятой системы счисления. В реферируемой статье дается расширение концепции А. Н. Колмогорова, позволяющее включить в нее теорию систематических дробей как частный случай. Идея этого расширения состоит в рассмотрении целочисленных функций, аргумент которых пробегает лишь некоторое бесконечное подмножество натурального ряда (так называемый «базис»). Статья содержит только определения и формулировки теорем, доказательства не приводятся. А. Я. Хинчин

4401. О расширении меры. Сринивасан (On extensions of measures. Srinivasan T. P.), J. Indian Math. Soc., 1955, 19, № 1, 31—60 (англ.)

Изучаются меры в σ-алгебре множеств (т. е. классе множеств, замкнутом относительно операций счетного объединения, пересечения и операции взятия дополнения), определенные, исходя из внутренней меры. Обозначения и определения такие же, как и в предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 4318). Доказывается ряд теорем, аналогичных теоремам предыдущей работы, для более широкого класса мер. Рассматривается также регулярная мера Бореля в локально компактном хаусдорфовом пространстве, являющаяся обобщением меры Лебега в евклидовом пространстве. Р. С. Гутер

4402. Иррегулярные меры Бореля на топологических пространствах. Свифт (Irregular Borel measures on topological spaces. Swift George), Duke Math. J., 1955, 22, № 3, 427—433 (англ.)

Пусть X — топологическое пространство; U и C — классы его открытых и компактных (т. е. бикомпактных) подмножеств соответственно; B — порожденная классом C σ-алгебра; и $V=U\cap B$. Множества из B называются борелевскими, и всякая мера, область определения которой содержит B, называется борелев-

ской. Борелевская мера μ называется внешне (внутренне) регулярной на множестве $b \in B$, если

$$\mu(b) = \inf\{\mu(v) : b \subset v \in V\} \quad (\mu(b) = \sup\{\mu(c) : b \supset c \in C\}).$$

Мера, внешне и внутренне регулярная на $b \in B$, называется регулярной на b. Мера, не регулярная на b, называется иррегулярной на b. Работа содержит несколько примеров иррегулярных мер и ряд замечаний об иррегулярных мерах и о множествах, на которых они иррегулярны. В. А. Рохлин

4403. Круговая плотность плоских множеств. Марстранд (Circular density of plane sets. Marstrand J. M.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 2, 238—246 (англ.)

Продолжение и развитие другой статьи автора (РЖМат, 1955, 4948). Рассматриваются множества размерности $s\ (0 \leqslant s \leqslant 2)$ на евклидовой плоскости (s-множества). Ранее вводилось понятие круговой плотности множества в точке и доказывалось, что если s — не целое число, то круговая плотность не может равняться 1 почти во всех точках s-множества. Уточняя этот результат, автор доказывает, что если s — не целое число, то почти во всех точках любого s-множества круговая плотность не существует. Говоря о «почти всех точках s-множества», мы подразумеваем, что из него исключается подмножество E с $\Lambda^s(E) = 0$ (определение хаусдорфовой меры размерности s $\Lambda^s(E)$ см. в указанной выше статье). Ю. С. Очан

4404. Некоторые замечания о площади поверхности в смысле Минковского. Кнезер (Einige Bemerkungen über das Minkowskischen Flächermaß. Kneser Martin), Arch. Math., 1955, **6**, № 5, 382—390 (нем.)

Рассматривается мера Минковского (определения см. РЖМат, 1956, 2864) и ее взаимоотношения с различными другими мерами для случая топологических образов единичного квадрата плоскости. Отображение φ одного метрического пространства в другое называется ограниченно растягивающим, если существует такая константа c, что для произвольных точек P и Q и их образов справедливо неравенство $d(\varphi P, \varphi Q) \leqslant c d(P, Q)$. Для ограниченно растягивающего отображения доказывается совпадение площади в смысле Минковского с другими площадями и строится пример полиэдрической поверхности с конечной суммой площадей и бесконечной мерой Минковского. Устанавливаются независимость измеримости и меры Минковского от объемлющего пространства и другие свойства меры. Р. С. Гутер

4405. Подход к теореме Радона — Никодима. Викраман (An approach to the Radon-Nikodym theorem. Vikraman V.), Math. Student, 1955, **23**, № 1—2, 1—26 (англ.)

Пусть B — булева σ-алгебра подмножеств основного множества Ω (т. е. B содержит вместе с каждой последовательностью множеств их соединение и вместе с каждым множеством его дополнение) и $\{\mu\}$ — совокупность всех ограниченных действительных вполне аддитивных функций, определенных на B. Считаем $\mu_1 \geqslant \mu_2$, если $\mu_1(X) \geqslant \mu_2(X)$ для всякого множества $X \in B$. Это отношение превращает $\{\mu\}$ в частично упорядоченное множество, в котором всякое ограниченное сверху или снизу множество имеет соответственно точную верхнюю или нижнюю грань. По мнению автора, в обычных изложениях теории меры указанное частичное упорядочение совокупности $\{\mu\}$ и его свойства игнорируются. В терминах структуры $\{\mu\}$ в работе трактуется ряд вопросов теории меры, в том числе разложения Жордана и Хана, понятия сингулярности и абсолютной непрерывности и теорема Радона — Никодима. В. А. Рохлин

4406. К дифференциальным свойствам измеримых функций. Пламеннов И. Я., Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 6, 819—820

Пусть $f(x)$ — измеримая функция и $B(f; E)$ — ее график.

Точка $x \in E$ называется точкой положительной нижней плотности $B(f; E)$, если существует такое λ $(0 < \lambda < +\infty)$, что

$$\varliminf_{h \to 0} \frac{\operatorname{mes} E(x, \lambda)\,(x - h, x + h)}{2h} > 0,$$

где $E(x, \lambda) = E_{x' \in E}\,[|f(x') - f(x)| < \lambda\,|x' - x|]$.

Из результатов А. Я. Хинчина следует, что $f(x)$ имеет асимптотическую производную почти всюду на множестве тех точек $x \in E$, в которых нижняя плотность $B(f; E)$ больше половины. А. Н. Колмогоров показал, что на множестве точек положительной нижней плотности $f(x)$ может почти всюду не иметь асимптотической производной (когда нижняя плотность не превышает половины).

Пусть $\psi(M)$ означает какой-нибудь угол на плоскости (x, y) с вершиной в точке $M = [x, f(x)] \in B(f; E)$ и $E_{\psi(M)}$ — множество тех точек $x' \in E$, для которых точки $B(f; E)$ принадлежат углу $\psi(M)$. Референтом было установлено, что почти в каждой точке $x \in E$, в которой $f(x)$ не имеет асимптотической производной и которая является точкой положительной нижней плотности $B(f; E)$, множество $E_{\psi(M)}$ имеет положительную верхнюю плотность при любом угле $\psi(M)$ с вершиной в точке $M = [x, f(x)]$.

Невыясненным оставался вопрос о том, может ли верхняя плотность множества $E_{\psi(M)}$ для какого-нибудь угла $\psi(M)$ быть промежуточной между нулем и единицей на множестве положительной меры. Автор решает вопрос положительно. На $[0, 1]$ строится непрерывная функция $\varphi(x)$ такая, что в каждой точке $x \in E$ $(E \subset (0, 1), \operatorname{mes} E > 1 - \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1)$: 1) нижняя плотность $B(\varphi; E)$ равна половине при любом $\lambda > 0$, 2) $\varphi(x)$ лишена асимптотической производной, 3) если замкнутый угол $\psi(M)$ не содержит лучей, параллельных осям координат, то

$$\varlimsup_{h \to 0} \frac{\operatorname{mes} E_{\psi(M)}\,(x, x + h)}{|h|} = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

в любой точке $x \in E$, где α_1 и α_2 — угловые коэффициенты сторон $\psi(M)$, $0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < +\infty$; если же $\psi(M)$ содержит луч, параллельный оси x, то верхняя плотность $E_{\psi(M)}$ равна 1 в каждой точке $x \in E$.

Изучается также поведение $f(x)$ в окрестностях тех точек $x \in E$, которые не являются точками положительной нижней плотности $B(f; E)$. Приводится случай, когда $B(f; E)$ не имеет положительной нижней плотности на множестве полной меры. Такой пример строился раньше Ярником. Ф. И. Шмидов

4407. Обобщенные производные и разложения. Менгер, Шу (Generalized derivatives and expansions. Menger Karl, Shü S. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 8, 591—595 (англ.)

Пусть B — система n чисел (действительных или комплексных) не обязательно различных, входящих в область определения функции f. Тогда $f|B|$ означает полином степени $< n$, совпадающий с f в точках системы B (в точках кратности $m > 1$ из B требуется еще совпадение производных порядка $< m$). Если $B(t)$ — система n чисел, зависящая от t, то $f|B(t)|$ будет полиномиальнозначной функцией от t. В работе затрагиваются некоторые вопросы дифференциального исчисления таких функций. П. И. Романовский

4408. Тотализация обобщенных первых производных. I. Данжуа (Totalisation des dérivées premi-

ères généralisées. I. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 8, 617—620 (франц.)

Первая обобщенная производная Римана $f(x) = D_s F(x)$ от непрерывной функции $F(x)$ является второй обобщенной производной $D_{2.s}G$ от всякой первообразной $G(x)$ для $F(x)$. Ранее автор (Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique, Gauthier-Villars, 1941—1948) рассматривал процесс $(T_{2.s})_0$, позволяющий во всех случаях по $D_{2.s}G$ найти G (определенную с точностью до произвольного линейного слагаемого), после чего равенство $F(x) = G'(x)$ решало задачу нахождения $F(x)$ по $f(x)$. В общем случае G может не иметь производной на всюду плотном несчетном множестве и возникает потребность в процессе тотализации T_s, позволяющем находить $F(x)$ непосредственно по $f(x)$. Излагаются предварительные замечания о построении процесса T_s.

П. И. Романовский

4409. Очень простой пример недифференцируемой непрерывной функции. Лю Мэн-хуэй (一個簡單的不可微分的連續函數.柳孟輝), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, **4**, № 4, 479—482 (кит.; рез. англ.)

4410. Поправка (更正), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1955, **5**, № 1, после стр. 135 (кит.; рез. англ.)

Показывается, что в примере статьи (реф. 4409) функция разрывна и, следовательно, пример несостоятелен.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

4411. О счетности множества многочленов с целыми коэффициентами. Тот (Cu privire la puterea numerabil. a mulțimii polinoamelor cu coeficienți intregi. Tóth E.), Rev. Univ. «C. J. Parhon» și Politehn. București. Ser științ. natur., 1955, № 6—7, 55—59 (рум.; рез. русс., франц.)

4412. О вполне упорядоченности множества мощностей частей данного множества. Фара (Sur le bon ordre de l'ensemble des puissances des parties d'un ensemble donné. Farah E.), Summa Brasil. math., 1953, **3**, 37—42 (франц.)

Доказывается известный результат о том, что аксиома выбора влечет вполне упорядоченность множества мощностей подмножеств данного множества при обычном способе упорядочивания. F. Bagemihl

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 513

4413. Построение теории множеств на основе теории порядковых чисел. Такеути (Construction of the set theory from the theory of ordinal numbers. Takeuti Gaisi), J. Math. Soc. Japan, 1954, **6**, № 2, 196—220 (англ.)

Видоизменением метода Гёделя (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 1, 96—149) система Σ указанной работы Гёделя строится посредством теории порядковых чисел, так что из непротиворечивости теории порядковых чисел вытекает непротиворечивость системы Σ. Система аксиом для теории порядковых чисел состоит при этом из 17 аксиом. 1-я и 13-я — аксиомы равенства; 2-я гласит $0 < \omega$; аксиомы 3—6 утверждают сравнимость любых порядковых чисел в отношении $<$, а также нерефлексивность, антисимметричность и транзитивность этого отношения; следующие 5 аксиом суть: $\forall x\,(0 < x \vee 0 = x)$, $0' = 1$, $\forall x\,(x < y \supset x' = y \vee x' < y)$, $\forall x\,(x \leq x')$, $\forall x \forall y\,(x' = y' \supset x = y)$; 12-я аксиома: $\forall x\,(x < \omega \supset x' < \omega)$; 14-я аксиома — это аксиома математической индукции: $\forall \varphi \forall x\,\{\varphi(0) \& \forall y(\varphi(y) \supset \varphi(y')) \& x < \omega \supset \varphi(x)\}$ (φ — переменный предикат); 15-я аксиома — это аксиома минимума $\forall \varphi\,|\,\{\forall x \neg \varphi(x) \supset \mathrm{Min}_z \varphi(z) = 0\}$ & & $\{(Ex)\,\varphi(x) \supset \varphi(\mathrm{Min}_z \varphi(z))\}$ & $\forall x\,\{\varphi(x) \supset x \geqslant \mathrm{Min}_z \varphi(z)\}$].

Две последние аксиомы: аксиома подстановки $\forall \varphi_2 \forall u\ [\forall x \forall y\ \ \forall z\,(\varphi_2(x, z) \& \varphi_2(y, z) \supset x = y) \supset \supset Ex \forall y\{(Ez)\,(\varphi_2(y, z) \& z < u) \supset y < x\}]$ и аксиома мощностей $\forall u\ Ev \forall \varphi_2\,[\forall x \forall y \forall z\,(\varphi_2(x, z) \& \varphi_2(y, z) \supset x = y) \supset \supset Ex\{x < v \& \forall y \neg (\varphi_2(x, y) \& y < u)\}]$.

А. С. Есенин-Вольпин

4414. О взаимно однозначных непрерывных образах гильбертова пространства. Мацкина Р. Ю., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, **19**, № 4, 267—272

Усиливается результат, ранее полученный автором (Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, **15**, 533—544) и заключающийся в том, что непрерывный взаимно однозначный образ гильбертова пространства может быть B-множеством любого сколь угодно высокого класса. В реферируемой работе доказывается, что взаимно однозначным непрерывным образом гильбертова пространства может быть B-множество любого класса α. Этот результат является следствием теоремы, доказанной автором: если E — B-множество класса α, представляющее собой непрерывный взаимно однозначный образ бэровского пространства, то можно построить взаимно однозначный непрерывный образ гильбертова пространства, содержащий замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное множеству E, который сам является B-множеством класса α. З. И. Козлова

4415. Об арифметических суммах множеств. Содномов Б. С., Уч. зап. Бурят-Монг. гос. пед. ин-та, 1954, № 5, 3—20

Приводится более подробное изложение результатов заметки автора (РЖМат, 1955, 3692). В. Я. Арсенин

4416. О несимметричных совершенных множествах с постоянным разбиением. Салем, Зигмунд (Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant. Salem Raphaël, Zygmund Antoni), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 24, 2281—2283 (франц.)

Доказывается, что совершенное множество с постоянным разбиением $\xi = \theta^{-1}$, где θ — число Пизо, является U-множеством. Ранее Салемом было установлено, что в остальных случаях множество с постоянным разбиением является M-множеством (Успехи матем. наук, 1949, **4**, № 3, 41). Точная формулировка результата авторов следующая.

Пусть q — целое число, θ — число Пизо, большее $q + 1$, $\eta_0 = 0 < \eta_1 < \ldots < \eta_q = 1 - \theta^{-1}$ — алгебраические числа из поля $R(\theta)$, где R — поле рациональных чисел. Обозначим через F множество точек отрезка $[0, 1]$ вида $x = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta^{-1} + \varepsilon_2\theta^{-2} + \cdots$, где каждое ε принимает значения $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_q$. Такое множество всегда есть множество класса $H^{(n)}$, по терминологии, введенной референтом, и следовательно, U-множество. Метод доказательства такой же, как в предыдущей заметке авторов (РЖМат, 1956, 982).

И. И. Пятецкий-Шапиро

4417 Д. Аксиоматическая теория пустых множеств. Вегель (Axiomatische Theorie der elementefreien Mengen. Wegel Herbert. Diss. Math.-naturwiss. F. Göttingen, 1953, 81 Bl. Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, **B**, № 1, 77 (нем.)

ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

4418. Порядок величины коэффициентов Фурье функций, имеющих изолированные особенности. Рейсбек (The order of magnitude of the Fourier coefficients in functions having isolated singularities. Raisbeck Gordon), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 3, 149—154 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $f(x)$ в $(0, \pi)$ положи-

тельна, не возрастает, выпукла и не является постоянной и пусть $xf(x) \in L(0, \pi)$. Тогда

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx < n \int_0^{\pi/n} xf(x)\,dx, \quad \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx >$$

$$> \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi/(2n)} x\,[f(x) + (-1)^n f(\pi - x)]\,dx >$$

$$> cn \int_0^{\pi/(2n)} xf(x)\,dx,$$

где c — константа, не зависящая от n.

Для интеграла $\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$ (если наложить на $f'(x)$ условия вышеуказанной теоремы) получаются неравенства:

$$-\int_0^{\pi/n} xf'(x)\,dx < \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx < -c \int_0^{\pi/(2n)} xf'(x)\,dx.$$

Эти неравенства предлагаются для оценки коэффициентов Фурье. И. Г. Соколов

4419. Об интегральном скачке функции и ее коэффициентах Фурье. Кинукава (On the integro-jump of a function and its Fourier coefficients. Kinukawa Masakiti), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 2, 45—48 (англ.)

Пусть $\bar{\sigma}_n^{\alpha}$ — средние Чезаро порядка α последовательности $\bar{s}_n(x) = \sum_1^n b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x = \sum_1^n B_\nu(x)$, где a_ν и b_ν — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ из $L(-\pi; \pi)$ периода 2π.

Доказывается теорема: Если $0 < \alpha < 1$ и $\int_0^t \psi(u)\,du = o(t^{1/\alpha})$ при $t \to 0$, где $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) - L(x)$, то при $n \to \infty$

$$\lim [\bar{\sigma}_{2n}^{\alpha}(x) - \bar{\sigma}_n^{\alpha}(x)] = \pi^{-1} \log 2\ L(x), \qquad (1)$$

$$\lim nB_n(x) = -\pi^{-1} L(x)\ \ (C, 1+\alpha). \qquad (2)$$

Утверждения теоремы остаются справедливыми, если $0 < \beta < \gamma$,

$$\alpha = \beta/(\gamma - \beta + 1),\ \ 0 < \alpha < 2,$$

$$\int_0^t (t-u)^{\beta-1} \psi(u)\,du = o(t^{\gamma}).$$

При несколько других условиях, налагаемых на $\psi(t)$, равенство (1) было доказано Чжоу (Chow. H. C., J. London Math. Soc., 1941, 16, 23—27), а равенство (2)— Сасом (Szász O., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, 50).

Н. А. Давыдов

4420. Ограниченность, нули функции и коэффициенты Эйлера — Фурье. Баяда (La limitatezza gli zeri di una funzione e i coefficienti di Eulero-Fourier. Baiada Emilio), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, 4, № 1, 91—111 (итал.)

Автор продолжает исследования Каратеодори и Тёплица, посвященные вопросу о том, как по коэффициентам Фурье судить об ограниченности, положительности или монотонности функции.

Следуя Каратеодори, рассмотрим в $(2n)$-мерном евклидовом пространстве с координатами $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ наименьшее выпуклое тело K_n, содержащее замкнутую кривую с уравнениями

$x_1 = \cos\theta, \ldots, x_n = \cos n\theta,\ \ y_1 = \sin\theta, \ldots, y_n = \sin n\theta$, где $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

Как было показано Тёплицем, если $\alpha_k = a_k + ib_k$, $\alpha_{-k} = a_k - ib_k$, $k = 1, 2, \ldots$, то внутренние точки K_n характеризуются неравенствами

$$D_k(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1),$$

$$D_n(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0,$$

где $D_k(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = |\beta_{ij}|_{i,j=0}^k$ с $\beta_{ij} = \alpha_{-i+j}$.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям: $f(x)$ с ограниченным изменением, периодическая, в точках разрыва x_0 ее значения являются средними арифметическими для пределов слева и справа, наконец

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi. \qquad (1)$$

Пусть a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказывается теорема: Для того чтобы $f(x)$ была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы для всякого n точка с координатами $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ лежала внутри выпуклого тела K_n, или же, чтобы $D_k(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. При тех же предположениях и обозначениях для того, чтобы $f(x)$ была заключена между 0 и 1, необходимо и достаточно, чтобы для любого k

$$D_k(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) > 0 \ \text{ и } \ D_k(1, -\alpha_1, \ldots, -\alpha_k) > 0.$$

Доказывается также, что если $f(x)$ непрерывна, с ограниченным изменением и удовлетворяет условию (1), то для ее положительности необходимо и достаточно существование такого $k > 1$, что при любом n $D_n(1, k\alpha_1, \ldots, k\alpha_n) > 0$.

Далее делаются некоторые замечания по поводу результатов Гидзетти (Ghizzetti A., Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1940, 9, 215—223), а также сравниваются методы Каратеодори и Гидзетти. Наконец, развиваются результаты Гурвица (Hurwitz A., Math. Ann., 1903, 57, 425—446) о числе нулей функции, у которой первые n коэффициентов Фурье равны нулю. Автор называет интервалом постоянства знака для функции $f(x)$ такой интервал, где все значения $f(x)$, отличные от нуля, имеют одинаковый знак; смотря по тому, каков этот знак, интервалы называются положительными или отрицательными.

Доказывается теорема: Пусть $f(x)$ имеет ограниченное изменение и в точках разрыва принимает значения, равные средним арифметическим между пределами слева и справа, и пусть $a_0/2 + \Sigma_1^{\infty}(a_r \cos rx + b_r \sin rx)$ — ее ряд Фурье. Если $f(x)$ имеет n интервалов постоянства знака, то существует $2m+1$ констант $p_0, p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m$, где $n = 2m$ или $n = 2m+1$, таких, что

1) $a_0 p_0/2 + \Sigma_1^m (a_r p_r + b_r q_r) = 1$,

2) точка с координатами

$$c_u = \frac{1}{2} a_0 p_u + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} a_r (p_{u+r} + p_{u-r}) + b_r (q_{u+r} - q_{u-r}),$$

$$d_u = \frac{1}{2}a_0 q_u + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} a_r (q_{u+r} + q_{u-r}) - b_r (p_{u+r} - q_{u-r})$$

(где $u = 1, \ldots, t$ и $p_u = p_{-u}$, $q_u = -q_{-u}$) лежит при любом t внутри выпуклого тела K_t.

Доказывается еще несколько теорем такого же типа.

Н. К. Бари

4421. О некоторых тригонометрических рядах. XIV. **Идзуми** (Some trigonometrical series. XIV. Izumi Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 6, 324—326 (англ.)

Пусть $f(t) \in L^p(0,2\pi)$ $(p \geqslant 1)$ и $f(t) \neq \text{const}$. Положим

$$m_p(h) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \int_0^h |f(x+t)|^p \, dt,$$

$$\omega_p(h) = \max_{|t| \leqslant h} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx.$$

Доказывается, что $m_p(h) \leqslant A\omega_p(h) h^{1-p}$. Для случая $p = 1$ это результат Хилле и Клейна (РЖМат, 1955, 4961), полученный ими другим способом, основанным на применении интерполяционных полиномов.

Н. К. Бари

4422. Равномерная сходимость рядов Фурье. IV. **Сато** (Uniform convergence of Fourier series. IV. Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 5, 261—263 (англ.)

Дается оценка приближения функции $f(x)$ частными суммами ее ряда Фурье через модуль непрерывности $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$ и интегральный модуль непрерывности $\omega_1(\delta) = \omega_1(\delta, f)$. Работа является продолжением двух предыдущих работ автора (РЖМат, 1955, 4340; 1956, 1229).

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая функция, не эквивалентная постоянной, тогда

$$|s_n(x) - f(x)| \leqslant A\omega(n^{-1}) \log [Bn\,\omega_1(n^{-1})/\omega(n^{-1})], \quad (1)$$

где A и B — величины, не зависящие от n и x, а $s_n(x)$ — n-я частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая функция, не эквивалентная постоянной, тогда для $0 < \alpha < 1$

$$|\sigma_n^{-\alpha}(x) - f(x)| \leqslant C [\omega(n^{-1}) (n\omega_1(n^{-1})/\omega(n^{-1}))^{\alpha} + n^{-1} \int_{\pi/n}^{\pi} t^{-2}\omega(t)\, dt], \quad (2)$$

где $\sigma_n^{-\alpha}(x)$ — чезаровская средняя порядка $-\alpha$ от ряда Фурье функции $f(x)$.

Примечание референта. По мнению референта, в формулировках теорем 2 и 4 следует говорить о непрерывных функциях, ибо в противном случае оценки (1) и (2) могут стать бессодержательными.

П. Л. Ульянов

4423. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. **Стечкин С. Б.**, Докл. АН СССР, 1955, 102, № 1, 37—40

Пусть c_n — коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$ по полной ортонормированной системе $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\{c_n^*\}$ — последовательность, образованная из последовательности $\{c_n\}$ так, чтобы коэффициенты Фурье следовали в порядке убывания их модулей $|c_n^*| \geqslant |c_{n+1}^*|$; тогда для сходимости ряда $\sum |c_n|$ необходима и достаточна сходимость ряда $\sum n^{-1/2} E_n^*(f)$, где $E_n^*(f) = (\sum_{k=n}^{\infty} |c_k^*|^2)^{1/2}$. Это утверждение является следствием при $\alpha = 1/2$ двух неравенств для сходящихся числовых рядов $\sum_1^{\infty} u_k$ с монотонно убывающими к нулю членами

$$(1-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} r_k^{\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{\alpha} \leqslant \alpha^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} r_k^{\alpha}$$

$$(0 < \alpha < 1,\ r_k = \sum_{\nu=k}^{\infty} u_\nu),$$

второе из которых известно (Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г., Неравенства, М., 1948, теор. 345) (а первое неравенство индукцией и предельным переходом вытекает из неравенства $(1+x)^{\alpha} \leqslant 1 + \alpha x$ $(x \geqslant 0)$. *Реф.*).

В частности, для тригонометрических рядов с монотонно убывающими по модулю коэффициентами сходимость $\sum |c_n|$ имеет место тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum n^{-1/2} \sup_{|t| \leqslant 1/n} \left(\int_0^{2\pi} |\Delta_t f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Примечание референта. 1) Последнее утверждение непосредственно вытекает из теоремы Джексона для метрики L_p и неравенства М. Ф. Тимана и референта (Докл. АН СССР, 1950, 71, № 1, 17—20, теорема 4).

2) Отметим работу Пейли (Paley R. E. A. C., Studia math., 1931, 3, 226—238), в которой применялась идея введения последовательности коэффициентов Фурье, расположенных в порядке убывания их модулей (см. также Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М., 1939).

А. Ф. Тиман

4424. Некоторые свойства обобщенно-квазигладких функций. **Сакович Г. Н.**, Студ. наук. праці Київськ. ун-ту, 1955, № 16, 119—150

Пусть $F(t)$ — неубывающая на $[0, (b-a)/2]$ $(b > a)$ вогнутая функция, для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} F[2^{-k}(b-a)]$ сходится. Рассматриваются непрерывные на $[a, b]$ функции $f(x)$, удовлетворяющие условию

$$|f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)| \leqslant F(|2h|). \quad (1)$$

Используя метод и развивая результаты статьи референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, 15, № 3, 243—254), автор обобщает соответствующее случаю $F(t) = t$ неравенство

$$\omega(f; h) = \sup_{|t| \leqslant h} \max_x |f(x+t) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\ln 2} h \ln h^{-1} + O(h)$$

и получает асимптотически точную при $h \to 0$ оценку $\omega(f; h) \leqslant \varphi(h) + O(h)$, где $\varphi(t)$ есть любое решение функционального уравнения $2\varphi(t) - \varphi(2t) = F(2t)$. В частности, если $F(t) = t^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, то

$$\omega(f; h) \leqslant h^{\alpha}/(2^{1-\alpha} - 1) + O(h).$$

Исследуются также некоторые другие частные случаи.

Примечание референта. Автор рассматривает задачу референта (см. вышеприведенную ссылку, замечание к лемме 1) о максимуме модуля квазигладкой функции $(F(t) = t)$, принимающей на концах от-

резка $[a, b]$ значения, равные нулю, и высказывает некоторые предположения. В общем случае задача, повидимому, является достаточно трудной. Вместе с тем можно показать, что в классе функций, четных относительно середины отрезка $[a, b]$, справедливо точное неравенство $|f(x)| \leqslant 5(b-a)/8$.

В статье имеются опечатки (см., например, стр. 127, 146). А. Ф. Тиман

4425. О некоторых применениях теорем С. Н. Бернштейна и И. И. Привалова. Жак И. Е., Сообщ. АН ГрузССР, 1955, **16**, № 3, 185—190

О некоторых применениях теорем С. Н. Бернштейна и И. И. Привалова. Жак (ს. ბერნშტეინისა და ი. პრივალოვის თეორემების ზოგიერთი გამოყენების შესახებ. ჟაკი ი.), საქ. სსრ მეცნ. აკად. მოამბე. (Мецниереоата Академиис моамбе), 1955, **16**, № 3, 185—190 (груз.)

Рассматриваются ряды Фурье функции $f(x, y)$ и сопряженных с ней $\overline{f}_1(x, y)$, $\overline{f}_2(x, y)$, $\overline{f}_3(x, y)$ соответственно по x, по y и по совокупности x, y. Применением неравенства С. Н. Бернштейна для тригонометрических полиномов к случаю функций двух переменных доказываются теоремы:

1. Если все функции f, $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, $\overline{f}_3$ непрерывны и какие-нибудь три из рядов Фурье для них равномерно сходятся, то и четвертый ряд также равномерно сходится.

2. Если три из этих четырех рядов равномерно сходятся, то четвертый сходится почти всюду.

Обозначая через $E^T_{m,n}(f)$ наилучшее приближение функции $f(x, y)$ тригонометрическими многочленами $T_{m,n}(x, y)$ порядка $\leqslant m$ по x и порядка $\leqslant n$ по y, автор доказывает теорему: Если $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $G = [a, b; c, d] \subset [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$ и если при всех натуральных m и n

$$E^T_{m,n}(f) < C(m^{-\alpha} + n^{-\alpha}) \quad (0 < \alpha < 1),$$

то $f(x, y) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ во всяком внутреннем прямоугольнике $C_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = [a+\varepsilon_1, b-\varepsilon_1; c+\varepsilon_2, d-\varepsilon_2]$. Это результат применения неравенства Привалова, перенесенного на функции двух переменных. Указывается одно приложение полученной теоремы. Н. К. Бари

4426. Разложение непрерывной функции в обобщенный степенной ряд. Нилов Г. Н., Уч. зап. Кабардинск. гос. пед. ин-та, 1955, № 8, 25—27

Доказывается теорема: Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то можно найти последовательность $S_{k,n}(x) = \Sigma_{j=1}^{n-1} P_j(x) + \Sigma_{i=0}^{k} a_i^{(n)} x^i$, где $P_n(x) = \Sigma_{i=0}^{n} a_i^{(n)} x^i$, которая при $n \to \infty$ стремится равномерно к $f(x)$ на $[a, b]$ при любом варьировании числа $k\,(0 \leqslant k \leqslant n)$. И. Г. Соколов

4427. О некоторых свойствах многочленов с целыми коэффициентами и о приближении функций в среднем многочленами с целыми коэффициентами. Апарисио Бернардо Э., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, **19**, № 5, 303—318

Доказывается ряд теорем относительно многочленов с целыми коэффициентами и приближений в среднем такими многочленами.

Приведем две основные из них.

1. Если $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$; $\Sigma_1^n \lambda_k/\lambda_n^2 \to \infty$, $n \to \infty$, то при любом заданном $\lambda > 0$ и произвольно малом $\varepsilon > 0$ существуют такие целые числа $a_1, \ldots, a_n$, что

$$\int_0^\lambda (a_1 x^{\lambda_1} + \ldots + a_n x^{\lambda_n})^2 dx < \varepsilon$$

для $n > n_0(\lambda, \varepsilon)$.

2. Если $f(x)$ допускает на отрезке $[\alpha, \beta]$, $|\alpha - \beta| < 4$, сколь угодно хорошие приближения многочленами в среднем, т. е. если для любого ε существует $n_0(\varepsilon)$ такое, что при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$\int_\alpha^\beta [f(x) - P_n(x)]^2 dx < \varepsilon,$$

где $P_n(x)$ — многочлен, то существует многочлен с целыми коэффициентами, который удовлетворяет этому же неравенству.

Дана также оценка ε в зависимости от n и дифференциальных свойств $f(x)$. Первая теорема является обобщением одной теоремы Гильберта.

А. О. Гельфонд

4428. О применимости теоремы Фишера — Рисса к почти-периодическим функциям Вейля. Кованько А. С., Доповіді та повідомлення Львівськ. ун-та, 1955, № 5, ч. 2, 93

Пусть $\Sigma_1^\infty |a_n|^2 < \infty$ и последовательность $\{\lambda_n\}$ такова, что

$$\left| \sum_{\substack{(k,l)\\(k \neq l)}} \frac{a_k \bar{a}_l}{\lambda_k - \lambda_l} [e^{i(\lambda_k - \lambda_l)(a+T)} - e^{i(\lambda_k - \lambda_l)T}] \right| < M,$$

где M — константа. При этих условиях существует $W^{(2)}$-почти периодическая функция $f(x)$ такая, что

$$a_n = \lim_{T \to \infty} T^{-1} \int_a^{a+T} f(x) e^{-i\lambda_n x} dx,$$

$$\lim_{T \to \infty} T^{-1} \int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \sum_1^\infty |a_n|^2.$$

В частности, если $\Sigma_{(k,l)(k \neq l)} |a_k a_l| |\lambda_k - \lambda_l|^{-1} < M$, то $f(x)$ — $S^{(2)}$-почти периодическая функция. Доказательства не приводятся. Б. М. Левитан

4429. О новом свойстве и новом определении обобщенных почти-периодических функций А. С. Безиковича. Кованько А. С., Докл. Львовск. политехн. ин-та, 1955, **1**, № 1, 3—4

Приводится без доказательства теорема: Для того чтобы $f(x)$ являлась B^p-почти периодической функцией, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое η, что

$$\overline{\lim}_{T \to \infty} \{(2T)^{-1} \int_{E(-T, T)} |f(x)|^p dx\} < \varepsilon,$$

если

$$\overline{\lim}_{T \to \infty} |E(-T, T)|\,(2T)^{-1} < \eta.$$

2) Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ и относительно плотное множество чисел τ такие, что $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ для $t \in (\tau - \eta, \tau + \eta)$ и любого x, исключая, быть может, множество E_t такое, что $\overline{\lim}_{T \to \infty} |E_t(-T, T)|\,(2T)^{-1} < \varepsilon$.

3) При любом a последовательность функций

$$\sigma_{na}[f(x)] = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + ka) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится «B по мере» к некоторой периодической периода a функции $f^{(a)}(x) \in L^p$, т. е. если $E_{n\varepsilon}$ — множество точек, в которых $|f^{(a)}(x) - \sigma_{na}[f(x)]| \geqslant \varepsilon$ $(\varepsilon > 0$

произвольно), то

$$\lim_{n\to\infty}\{\overline{\lim}_{T\to\infty}|E_{n\varepsilon}(-T,\ T)|\cdot(2T)^{-1}\}=0.$$

Б. М. Левитан

4430. Некоторые оценки наилучших приближений почти-периодических функций. Бредихина Е. А., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 5, 751—754

Пусть фиксирована последовательность частот $\{\lambda_k\}$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots;\lambda_0=0,\lambda_k<\lambda_{k+1}$ при $k\geqslant 0$, $\lambda_{-k}=-\lambda_k$, $\lambda_k\to\infty$). По определению, $f(x)\in Q(\lambda_k)$, если $f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_{\lambda_{m_k}}e^{i\lambda_{m_k}x}$, где m_k — целые, $\lambda_{m_0}=\lambda_0$, $\lambda_{m_{-k}}=\lambda_{-m_k}$, $|A_{\lambda_{m_k}}|+|A_{\lambda_{m_{-k}}}|>0$ при $k\neq 0$; $f(x)\in L(\lambda_k)$, если $f(x)\in Q(\lambda_k)$ и, кроме того, $A_{\lambda_{m_0}}=0$, $\arg A_{\lambda_{m_{-k}}}=-\arg A_{\lambda_{m_k}}$, $\lambda_{m_{k+1}}/\lambda_{m_k}=q_k\geqslant\theta>8$ при $k\geqslant 1$.

Обобщаются некоторые результаты о наилучших приближениях периодических функций на почти периодические функции.

Приводятся, в частности, следующие теоремы:

I. Если $f\in Q(\lambda_k)$ и имеет p равномерно непрерывных производных, то

$$\inf_x\{\sup_x|f(x)-\sum_{|\lambda_{m_k}|<\mu}c_ke^{i\lambda_{m_k}x}|\}<5^{p+1}\mu^{-p}\omega_f^{(p)}(\mu^{-1}),$$

где $\omega_f^{(p)}(\delta)$ — модуль непрерывности p-й производной.

II. Если $f(x)\in L(\lambda_k)$, $q_k\to\infty$ монотонно и при всех $k>k_0$ $\lambda_{m_k}/\lambda_{m_{k+1}}<(\lambda_{m_k}-\lambda_{m_{k-1}})/(\lambda_{m_k}+\lambda_{m_{k-1}})$, то имеет место асимптотическое равенство

$$\inf_x\{\sup_x|f(x)-\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{i\lambda_kx}|\}\approx\sup_x|f(x)-\sum_{|m_k|\leqslant n}A_{\lambda_{m_k}}e^{i\lambda_{m_k}x}|\approx\sum_{|m_k|>n}|A_{\lambda_{m_k}}|.$$

Последняя теорема обобщает один результат С. Б. Стечкина, доказанный им для случая периодических функций (Докл. АН СССР, 1951, **76**, № 1, 33—36).

Примечание референта. Теоремы, аналогичные теореме 1, рассматривал Бохнер (Bochner S., Proc. London Math. Soc., 1926, **26**, 433—452).

Б. М. Левитан

4431. О компактности систем почти-периодических функций Б. М. Левитана. Кованько А. С., Наук. зап. Львівськ. ун-ту, 1955, **29**, № 1 (6), 45—49

Приводятся доказательства ранее опубликованных теорем (РЖМат, 1955, 3686). Б. М. Левитан

См. также: 4399 К, 4536, 4581, 4601 Д, 4602 Д, 4604, 4611, 4639, 4644, 4658, 4659, 4873, 4891, 4894

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4432. Доказательство основной теоремы высшей алгебры посредством формулы Коши. Нилов Г. Н., Уч. зап. Кабардинск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 8, 28

4433. К вопросу о представлении аналитической функции многочленами Фабера. Лохин И. Ф., Матем. сб. 1955, **36** (**78**), № 3, 441—444

Метод суммирования рядов Тейлора в прямолинейной звезде аналитической функции, принадлежащий Миттаг-Леффлеру, распространяется на случай рядов, расположенных по полиномам Фабера. При этом вводится понятие звезды функции относительно данной области G со связным дополнением, обобщающее понятие прямолинейной звезды. П. К. Суетин

4434. Неалгебраические базисные множества полиномов. Нассиф, Макар (On non-algebraic basic sets of polynomials. Nassif M., Makar Ragy H.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 1, 120—129; Indagationes math., 1955, **17**, № 1, 120—129 (англ.)

Основные понятия см. РЖМат, 1954, 1628, 1994, 3671.

Ранее автором было доказано (РЖМат, 1956, 339), что если $\{P_n(z)\}$ — алгебраическое простое единичное множество полиномов со свойствами: 1) эффективное в $|z|\leqslant R$ для всех $R\geqslant\rho$; 2) эффективное в начале координат для всех функций или 3) эффективное в начале координат для всех целых функций, то множество $\{U_n(z)\}=\alpha\{P_n(z)\}+\beta\{z^n\}$, $\alpha+\beta\neq 0$, обладает теми же свойствами. Было также известно, что если $\{P_n(z)\}$ — неалгебраическое множество, обладающее первым свойством, то множество $\{U_n(z)\}$ может быть эффективным в $|z|\leqslant R$ для всех $R\geqslant\rho'\neq\rho$. В настоящей статье строится пример неалгебраического множества $\{P_n(z)\}$, эффективного в каждом круге $|z|\leqslant R$ (и, следовательно, эффективного в начале координат и тем более эффективного для всех целых функций), но для которого $\{U_n(z)\}$ не обладает ни свойством 2), ни свойством 3).

В одной из предыдущих работ (РЖМат, 1956, 1042) автор доказал, что если $\{P_n(z)\}$ — алгебраическое простое множество степени m и порядка ω, то множество $\{U_n(z)\}=\alpha\{P_n(z)\}+\beta\{z^n\}$, $\alpha+\beta\neq 0$, имеет порядок Ω, $\omega/(m-1)\leqslant\Omega\leqslant\omega(m-1)$.

В настоящей статье строится неалгебраическое простое единичное множество $\{P_n(z)\}$ порядка нуль, но для которого множество $\{U_n(z)\}$ имеет бесконечный порядок.

Если $\{P_n(z)\}$ — простое алгебраическое единичное множество, то множества $\{P_n(z)\}^2$ и $\{P_n(z)\}^{1/2}$ имеют те же свойства эффективности, что и $\{P_n(z)\}$. Построен пример неалгебраического множества, эффективного в каждом круге $|z|\leqslant R$, но для которого $\{P_n(z)\}^{1/2}$ не эффективно ни в каждом круге $|z|\leqslant R$, ни в начале координат, ни для целых функций.

Доказаны теоремы:

Теорема 1. Если $\{P_n(z)\}$ — простое единичное множество (об алгебраичности предположения не делается), причем $|P_{ni}|\leqslant Ma^{n-i}$, $0\leqslant i\leqslant n-1$, тогда множество $\{P_n(z)\}^{1/2}$ эффективно в каждом круге $|z|\leqslant R$, где $R\geqslant(1+M)\cdot a$, но может не быть эффективно в некотором круге $|z|\leqslant R$, где $R<(1+M)\cdot a$.

Теорема 2. Если $\{P_n(z)\}$ — простое единичное

множество, причем $|P_{ni}| \leqslant Mn^{\lambda(n-i)}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, то множество $\{P_n(z)\}^{1/n}$ имеет порядок $\leqslant \lambda$. Граница λ достижима.

Последняя теорема была известна ранее для множества $\{P_n(z)\}$[2]. С. Я. Хавинсон

4435. О базисном множестве полиномов с заданными коэффициентами. Макар, Хамза (On basic sets of polynomials with given coefficients. Makar Ragy H., Hamza A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 4, 438—448. Indagationes math., 1955, 17, № 4, 438—448 (англ.)

4436. О некоторых последовательностях аналитических функций, образующих полные системы и базисы. Альпер С. Я., Уч. зап. Ростовск.-н./Д. ун-та, 1955, 32, № 4, 9—13

Боасом (Boas R. P., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1940, 26, № 2, 139—143) было доказано, что система функций $z^n[1+h_n(z)]$ образует базис в каждом круге $|z|<r$, $r \leqslant R$, если существует общая мажоранта для рядов аналитических в круге $|z| \leqslant R$ функций $h_n(z)$, $h_n(0)=0$. При этом система аналитических функций $\{\varphi_n(z)\}$ называется базисом в круге $|z|<r$, если всякая аналитическая функция в круге $|z|<r$ разлагается единственным образом в ряд $\sum_0^\infty a_n \varphi_n(z)$, сходящийся равномерно в каждом круге $|z| \leqslant r'$, $r'<r$.

Автор выводит ряд следствий из упомянутой теоремы Боаса. Основные результаты следующие: Если $f(z)=\sum_{k=0}^\infty \frac{b_k}{k!} z^k$ $(b_k \neq 0)$ — целая функция экспоненциального типа, для которой

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} |b_{k+1}/b_k| = \tau < \infty,$$

то система функций $\{z^{n_i} f^{(n_i)}(\xi_i z)\}$ полна в круге $|z|<\frac{\ln 2}{\tau}$, где $\{n_i\}$ — некоторая последовательность натуральных чисел, ξ_i — комплексные числа $(|\xi_i| \leqslant 1)$ и $|n_i - n_j| + |\xi_i - \xi_j| \neq 0$ при $i \neq j$.

При условиях этой теоремы доказывается, что системы функций

$$\{\Delta_n[f(z\xi);\ \xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}]\}$$

или

$$\{z^{n-k}\Delta_k[f^n(z\xi);\ \xi_0^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}]\}$$

образуют базисы в каждом круге $|z|<r$, $r \leqslant \frac{\ln 2}{\tau}$; $\Delta_n[f(\xi), \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ означает разделенную разность n-го порядка от функции $f(z)$ в точках $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$.

В работе имеются опечатки. И. И. Ибрагимов

4437. Экстремальные задачи для звездообразных отображений. Робинсон (Extremal problems for star mappings. Robinson Raphael M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 364—377 (англ.)

Устанавливаются некоторые экстремальные свойства в классе функций

$$w = f(z) = z + \sum_{n=2}^\infty a_n z^n, \qquad (1)$$

регулярных в круге $|z|<1$ и отображающих его однолистно на области, звездообразные относительно точки $w=0$.

Теорема 5. В классе функций (1) наибольшее значение в точке $z_0 (0<|z_0|<1)$ величины $\Re\{B \ln f'(z) + C \ln [f(z)/z]\}$, где B и C — постоянные числа, не равные оба нулю, достигается только функцией, отображающей круг $|z|<1$ на плоскость с не более чем двумя радиальными разрезами.

Теорема 6. В классе функций (1) наибольшее значение в точке $z_0 (0<|z_0|<1)$ величины $\Re\{e^{-i\alpha}(\ln f'(z) + \lambda \ln [f(z)/z])\}$, где α и λ — действительные числа, может достигаться только функцией, отображающей круг $|z|<1$ на плоскость с одним радиальным разрезом, если $|\arg(1+\lambda)| + 3\arcsin r + 2\operatorname{arc\,tg} r \leqslant \pi$.

Теорема 7. В классе функций (1) множество всех значений функционала $\ln f'(z)$ в точке z_0, $|z_0| = r < 1$, совпадает с отображением круга $|z| \leqslant r$ функцией $h(z) = \ln[(1+z)/(1-z)^3]$ по крайней мере, если $r \leqslant 0{,}6$.

Теорема 8. В классе функций (1) наибольшее значение в точке $z_0 (0<|z_0|<1)$ величины $|z^2 f'(z)/[f(z)]^2|$ может достигаться только функцией, отображающей круг $|z|<1$ на плоскость с двумя радиальными разрезами.

Из теоремы (5) при $B = \pm i$, $C=0$ получается, в частности, теорема «вращения» Строганова, а при $B=0$, $C \neq 0$ — результат, который следует также из одной теоремы Маркса. В теореме 7 получает свое дальнейшее улучшение результат, установленный ранее Марксом и улучшенный затем автором.

Цитированные теоремы доказываются на основании установленных автором теорем (1, 2, 3, 4) о наибольшем значении на окружности $|z|=1$ величины

$$\Re\{\textstyle\sum_{\nu=1}^n \beta_\nu \varphi(z_\nu) + \psi(\zeta)\}, \qquad (2)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — регулярные в области $|z| \leqslant 1$ функции, $|z_\nu| = 1$, $\beta_\nu > 0$, $\sum_{\nu=1}^n \beta_\nu = 1$, $\zeta = \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu z_\nu$. В этих теоремах доказывается существование наибольшего значения величины (2) при неограниченном n и устанавливается, что в реализующих наибольшее значение точках должно быть $z[\varphi'(z) + \psi'(z)] \geqslant 0$, а если n не ограничено, то эти точки реализуют также наибольшее значение на окружности $|z|=1$ величины $\Re\{\varphi(z) + z\psi'(\zeta)\}$, причем $z[\varphi'(z) + \psi'(\zeta)]$ имеет действительные значения во всех точках экстремума функции $\Re\{\varphi(z) + z\psi'(\zeta)\}$ на окружности $|z|=1$.

Г. В. Корицкий

4438. О конформном отображении многосвязных областей. Уолш (Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes. Walsh Joseph L.), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 25, 1756—1758 (франц.)

Доказывается теорема. Пусть D — область плоскости z, граница которой состоит из жордановых кривых $C_1, \ldots, C_\nu$, попарно без общих точек; $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ — произвольные различные точки области D; $M_1, \ldots, M_\mu$ — положительные числа, для которых $\sum_j M_j = 1$. Тогда существует взаимно однозначное и непрерывное вплоть до границы конформное отображение $Z = f(z)$ области D на область Δ плоскости Z, определяемую неравенством

$$\left| A \prod_{j=1}^\mu (Z - a_j)^{M_j} \prod_{k=1}^\nu (Z - b_k)^{-N_k} \right| < 1,$$

где $\sum_1^\nu N_k = 1$, $a_j = f(\alpha_j)$ $(j=1, \ldots, \mu)$, точки $b_1, \ldots, b_\nu$ отделены от Δ соответственно образами кривых $C_1, \ldots, C_\nu$. Эта теорема, как указывает автор, является предельным случаем другой доказанной им теоремы (РЖМат, 1956, 2147) и доказывается посредством некоторого видоизменения того же самого метода. Отмечается, что приведенная теорема имеет значение для

теории аппроксимации и интерполяции функций в комплексной области, когда приходится заключать заданную область плоскости z в область этой же плоскости с границей, состоящей из линий уровня некоторой гармонической функции. В. А. Зморович

4439. Представление аналитических функций посредством краевого угла области отображения. **Мешковский** (Darstellung analytischer Funktionen durch den Randwinkel des Bildbereiches. Meschkowski H.), Math. Z., 1955, 62, № 2, 161—166 (нем.)

Пусть $\mathfrak{B}$ есть ограниченная n-связная однолистная область, граница которой $\mathfrak{L}$ состоит из аналитических дуг $\mathfrak{L}_\nu$. Пусть $\mathfrak{L}_1$ есть внешняя компонента границы. Обозначим через $A(z; u)$ и $B(z; u)$ функции, которые отображают $\mathfrak{B}$ на плоскость с прямолинейными разрезами, параллельными вещественной (соответственно мнимой) оси, причем так, что внутренняя точка $z = u$ переходит в ∞ (вычет обеих функций есть 1). Через $r(z; u, v)$ и $k(z; u, v)$ обозначим функции, отображающие $\mathfrak{B}$ соответственно на плоскость с радиальными и круговыми разрезами, причем так, что точка $z = u$ переходит в 0, а точка $z = v$ — в ∞ (вычет обеих функций снова 1). Наконец, через $E(z; u)$ обозначим функцию, отображающую $\mathfrak{B}$ на круг, разрезанный вдоль концентрических круговых дуг, причем внешней компоненте $\mathfrak{L}_1$ границы $\mathfrak{L}$ соответствует окружность круга и $E'(u; u) = 1$. Ранее автором было доказано (РЖМат, 1956, 354), что для любой однозначной и регулярной в $\mathfrak{B}$ и непрерывной вплоть до границы $\mathfrak{L}$ функции $f(u)$ справедливы следующие формулы:

$$1)\ f'(u) = -\frac{1}{\pi i}\int_{\mathfrak{L}} \operatorname{Re} f(z)\, N'(z, u)\, dz;$$

$$2)\ f(u) - f(v) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathfrak{L}} \operatorname{Re} f(z)\, Q'(z; u, v)\, dz$$

$$3)\ \operatorname{Re} f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{L}} \operatorname{Re} f(z)\, d\arg E(z, u),$$

где

$$N(z, u) = \frac{1}{2}[A(z, u) + B(z, u)],$$

$$N'(z, u) = \frac{d}{dz} N(z, u),$$

$$Q(z; u, v) = \frac{1}{2}[\ln k(z; u, v) + \ln r(z; u, v)],$$

$$Q'(z; u, v) = \frac{d}{dz} Q(z; u, v).$$

Пользуясь этими формулами, в настоящей заметке автор доказывает две теоремы.

Теорема 1. Любая однозначная регулярная в кольце $r < |z| \leqslant 1$ функция $\zeta(z)$, для которой функция $f(z) = 1 + z\frac{\zeta''}{\zeta'}$ регулярна в этом кольце и $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ кусочно-непрерывна на окружностях кольца, может быть представлена формулой

$$\zeta(z) - \zeta(z_0) =$$

$$= \int_{z_0}^{z} (\omega/z_0)^{f(z_0)-1} \exp\left\{-\frac{1}{\pi i}\int u(\xi)\,\lambda(\omega, \bar{\xi})\, d\bar{\xi}\right\} d\omega, \qquad (1)$$

где

$$\lambda(z, \bar{\xi}) = \int_{z_0}^{z} \frac{M(t, \bar{\xi}) - M(z_0, \bar{\xi})}{t}\, dt,$$

$$M(t, \bar{\xi}) = \frac{1}{2}[A(t, \xi) - B(t, \xi)], \quad |\xi| = 1$$

и z_0 — внутренняя точка кольца. Наоборот, если в (1) $u(\xi)$ есть заданная кусочно-непрерывная в точках границы кольца функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_{\mathfrak{L}_\nu} u(z)\, d\omega_\nu^*(z) = 0 \quad (\nu = 1, 2)$$

($\omega_\nu^*(z)$ — сопряженная по отношению к гармонической мере $\omega_\nu(z)$ компоненты $\mathfrak{L}_\nu$ границы кольца потенциальная функция), то $\zeta(z)$ в (1) однозначна и регулярна в кольце, а во всех точках непрерывности $u(\xi)$ функция $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \operatorname{Re}\left(1 + z\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)$, где $\varphi = \arg z$, $\psi = \arg d\zeta(z)$, имеет заданные граничные значения $u(\xi)$.

Теорема 2. Пусть $\zeta(u)$ однозначна и регулярна в ограниченной однолистной области $\mathfrak{B}$, граница которой $\mathfrak{L}$ состоит из n аналитических дуг. Пусть, далее $\ln \zeta'(u)$ также однозначна и регулярна в $\mathfrak{B}$, а $v(z) = \arg \zeta'(z)$ кусочно-непрерывна на $\mathfrak{L}$, причем $\zeta'(u_0) = 1$, где u_0 — заданная точка области $\mathfrak{B}$. Тогда

$$\zeta(u) - \zeta(u_0) = \int_{u_0}^{u} \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_L v(z)\, Q'(z; t, u_0)\, dz\right\} dt. \qquad (2)$$

Наоборот, если $v(z)$ кусочно-непрерывна на $\mathfrak{L}$ и удовлетворяет условиям $\int_{\mathfrak{L}_\nu} v(z)\, d\omega_\nu^*(z) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, то функция $\zeta(u)$ в (2) однозначна и регулярна в $\mathfrak{B}$ и в точках непрерывности $v(z)$ граничные значения $\arg \zeta'(u)$ совпадают с $v(z)$. Автор указывает, что данное им обобщение формулы Шварца не позволило получить структурных формул более общего вида, чем установленные в обеих вышеуказанных теоремах, даже в случае круговых областей. В. А. Зморович

4440. Производная одной однолистной функции. **Ловатер, Пиранян, Рудин** (The derivative of a schlicht function. Lohwater A. J., Piranian G., Rudin W.), Math. scand., 1955, 3, № 1, 103—106 (англ.)

Доказывается теорема: Существует возрастающая последовательность положительных целых чисел $\{n_p\}$ такая, что функция

$$f(z) = \int_0^z \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} w^{n_p}\right\} dw$$

регулярна в круге $|z| < 1$, непрерывна и однолистна в области $|z| \leqslant 1$ и обладает свойствами

$$\lim_{r\to 1} \sup |f'(re^{i\theta})| = \infty,$$
$$\lim_{r\to 1} \inf |f'(re^{i\theta})| = 0,$$
$$\lim_{r\to 1} \sup \arg f'(re^{i\theta}) = \infty,$$
$$\lim_{r\to 1} \inf \arg f'(re^{i\theta}) = -\infty,$$

для почти всех значений θ; кроме того, ряд Тейлора функции $f(z)$ сходится абсолютно на окружности $|z| = 1$.

Эта теорема является дополнением к результату Фростмана (Frostman O., Kungl. Fysiografiska Söllskapets i Lund Förhandlingar, 1942, 12, № 15, 169—182),

которым дается отрицательный ответ на известный, поставленный А. Блоком вопрос о том, является ли производная функции мероморфной и с ограниченной характеристикой в круге $|z|<1$, также функцией с ограниченной характеристикой в этом круге.

Г. В. Корицкий

4441. О максимальных модулях аналитических функций. Стрелиц Ш., Успехи. матем. наук, 1955, **10**, № 4, 153—160

Рассматривается вопрос о том, могут ли две существенно различные аналитические функции в круге $|z|<r$ иметь один и тот же максимум модуля. Функции $f(z)$ и $g(z)$ считаются существенно различными, если ни для каких ε и ζ, $|\varepsilon|=|\zeta|=1$, не могут выполняться равенства $f(z)=\varepsilon g(\zeta z)$, $f(z)=\varepsilon g(\bar{\zeta}z)$.

Доказывается теорема: Пусть $M(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$ $(a_0\neq 0)$ — аналитическая в круге функция с действительными коэффициентами, удовлетворяющая условиям: 1) при $r>0$ $M(r)>0$ и $rM'(r)/M(r)>0$; 2) $K(z)=zM'(z)/M(z)$ — ограниченная, аналитическая в круге $|z|<R$ $(R<1)$ функция, принимающая на каждой окружности $|z|=r$ положительное значение лишь в одной точке. Тогда существует бесконечное множество существенно различных аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, максимумы модулей которых равны $M(r)$.

Строится также пример целой функции, для которой $M(r)$ имеет в некоторой точке различные левую и правую производные.

В. П. Громов

4442. Экстремальные задачи для некоторых классов функций. Хавинсон С. Я., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 3, 421—424

Рассматривается n-связная конечная область G, ограниченная спрямляемыми контурами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{n}\gamma_i$ и функция $\rho(x)$, $0<m\leqslant\rho(x)\leqslant M<+\infty$ на Γ. Определяются классы функций $B_{\rho(x)}$, $C_{\rho(x)}$, $E_{\rho(x),q}$, $\widetilde{B}_{\rho(x)}$, $\widetilde{E}_1$: $f(z)\in B_{\rho(x)}$, если $f(z)\in B$ и $|f(x)|\leqslant\rho(x)$ ($f(x)$ — граничные значения $f(z)$); $f(z)\in C_{\rho(x)}$, если $f(z)\in B_{\rho(x)}$ и непрерывна в $\overline{G}$; $f(z)\in E_{\rho(x),q}$, если $f(z)\in E_q$ (Привалов, Граничные свойства аналитических функций, стр. 203 $q\geqslant 1$) и $\int_\Gamma[|f(x)|\,\rho^{-1}(x)]^q ds\leqslant 1$; $f(z)\in\widetilde{B}_{\rho(x)}$, если $f(z)\in B$ и существуют (для каждой $f(z)$ свои) числа a_i, $i=1,2,\ldots,n$, такие, что $|f(x)-a_i|\leqslant\rho(x)$, $x\in\gamma_i$; $f(z)\in\widetilde{E}_1$, если $f(z)\in E_1$ и $\int_{\gamma_i}f(x)\,dx=0$, $i=1,\ldots,n$. Если $\rho(x)\equiv 1$, то $B_{\rho(x)}\equiv B'$, $E_{\rho(x),q}\equiv E'_q$. Формулируются результаты, обобщающие соответствующие теоремы из предыдущих работ автора (Успехи матем. наук, 1949, **4**, № 4 (32), 158—159; Уч. зап. МГУ, 1951, № 148, 133—143; РЖМат, 1954, 193, 2104) на случай указанных выше классов функций. Например,

Теорема 1. 1) Пусть $\psi(x)$ — заданная на всех отрезках $[0, l_k]$, где l_k — длина γ_k, функция с ограниченным изменением; тогда

$$\sup_{f\in C_{\rho(x)}}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{0+0}^{l_k-0}f(x)\,d\psi(x)\right|=$$

$$=\inf_{\varphi\in E_1}\sum_{k=1}^{n}\int_{0+0}^{l_k-0}\left|d\left\{\int_0^x\rho(x)\,[d\psi(x)-d\Phi(x)]\right\}\right|,$$

где $\Phi(x)=\int^x\varphi(x)\,dx$.

2) Пусть $\omega(x)\in L_1$; тогда $\sup_{f\in B_{\rho(x)}}|\int_\Gamma f(x)\,\omega(x)\,dx|=$ $=\inf_{\varphi\in E_1}\int_\Gamma\rho(x)\,|\omega(x)-\varphi(x)|\,ds$. 3) Пусть область G удовлетворяет условию В. И. Смирнова; если $\omega(x)$ ограничена на Γ и $\rho(x)$ непрерывна на Γ, то

$$\sup_{f\in E_{\rho(x)}}\left|\int_\Gamma f(x)\,\omega(x)\,dx\right|=$$

$$=\inf_{\varphi\in B}\operatorname{vrai}\max_{x\in\Gamma}\rho(x)\,|\omega(x)-\varphi(x)|.$$

4) Пусть область G удовлетворяет условию В. И. Смирнова и $\omega(x)\in L_p$, $p>1$, $1/p+1/q=1$; тогда

$$\sup_{f\in E_{\rho(x),q}}\left|\int_\Gamma f(x)\,\omega(x)\,dx\right|=$$

$$=\inf_{\varphi\in E_p}\left\{\int_\Gamma[\rho(x)\,|\omega(x)-\varphi(x)|]^p ds\right\}^{1/p}.$$

5) Пусть $\omega(x)\in L_1$ и $\int_{\gamma_i}\omega(x)\,dx=0$, $i=1,2,\ldots,n$; тогда

$$\sup_{f\in\widetilde{B}_{\rho(x)}}\left|\int_\Gamma f(x)\,\omega(x)\,dx\right|=$$

$$=\inf_{f\in\widetilde{E}_1}\left|\int_\Gamma\rho(x)\,|\omega(x)-\varphi(x)|\,ds\right.$$

И. Е. Базилевич

4443. Экстремальные задачи в некоторых классах аналитических функций. Максимов Ю. Д., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 6, 1041-1044

Автор вводит в рассмотрение классы $C_\varepsilon(p;q)$ — локально ε-выпуклых и $S_\varepsilon(p;q)$ — локально ε-звездных функций вида $z^q(1+c_1z+\cdots)$, регулярных в круге $|z|<1$, определяемых условиями

$$\text{а)}\quad\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}d\theta>-\varepsilon,$$

$$\text{б)}\quad\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}d\theta=2p\pi\ \text{ для }\ f(z)\in C_\varepsilon(p;q);$$

$$\text{а)}\quad\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\}d\theta>-\varepsilon,$$

$$\text{б)}\quad\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\}d\theta=2p\pi\ \text{ для }\ F(z)\in S_\varepsilon(p;q),$$

выполняемых в кольце $0\leqslant\rho<|z|<1$ (ρ — зависит от функции), $z=re^{i\theta}$, $\theta_1<\theta_2$, $\varepsilon>0$, p и q — натуральные числа, $1\leqslant q\leqslant p$.

Основной результат: Классы $C_\varepsilon(p;q)$ и $S_\varepsilon(p;q)$ можно представить соответственно следующими структурными формулами

$$f(z)=\int_0^z q\,z^{q-1}\prod_{k=1}^{p-q}\left[\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)(1-\bar{\alpha}_k z)\right]\times$$

$$\times\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+e^{i\varphi}e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z}\,d\alpha(\theta)\right]^{\varepsilon/\pi}\times$$

$$\times\exp\left\{-2p\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-e^{-i\theta}z)\,d\mu(\theta)\right\}dz,\qquad(1)$$

$$F(z) = z^q \prod_{k=1}^{p-q} \left[\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right)(1 - \bar{\alpha}_k z)\right] \times$$

$$\times \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + e^{i\varphi} e^{-i\theta} z}{1 - e^{-i\theta} z}\, d\alpha(\theta)\right]^{\varepsilon/\pi} \times$$

$$\times \exp\left\{-2p \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - e^{-i\theta} z)\, d\mu(\theta)\right\}, \qquad (2)$$

где $\alpha(\theta)$, $\mu(\theta)$ — вещественные неубывающие функции на промежутке $[-\pi, \pi]$ с условием $\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = 1$, $|\alpha_k| < 1$, $k = 1, \ldots, p - q$; φ вещественно, $|\varphi| < \pi$.

Приводится теорема: Среди всех функций класса $C_\varepsilon(p; q)$ с фиксированными нулями производной α_k ($k = 1, \ldots, p - q$) максимум функционалов

$$\operatorname{Re}\left\{P\left[\ln \frac{f'(z)}{qz^{q-1} \prod_{k=1}^{p-q}\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right)(1 - \bar{\alpha}_k z)}\right]\right\}, \quad \operatorname{Re}\{P[f'(z)]\}$$

при данной целой функции $P(w)$ и фиксированном z из $|z| < 1$ достигается для единственной функции вида

$$f(\zeta) = \int_0^{\zeta} q\zeta^{q-1} \prod_{k=1}^{p-q}\left(1 - \frac{\zeta}{\alpha_k}\right)(1 - \bar{\alpha}_k \zeta) \times$$

$$\times \left[\frac{1 + e^{i\varphi} e^{i\vartheta}\zeta}{1 - e^{i\vartheta}\zeta}\right]^{\varepsilon/\pi} \frac{d\zeta}{(1 - e^{i\psi}\zeta)^{2p}}, \qquad (3)$$

где ϑ, φ, ψ — вещественны. Как следствия из этой теоремы отмечаются следующие точные оценки для функций $f(z) \in C_\varepsilon(p; q)$ с фиксированными нулями производной:

$$\left|\arg\left\{\frac{f'(z)}{z^{q-1} \prod_{k=1}^{p-q}\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right)(1 - \bar{\alpha}_k z)}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2(p + \varepsilon/\pi) \arcsin r, \qquad (4)$$

$$qr^{q-1} \prod_{k=1}^{p-q} \left|1 - \frac{r}{|\alpha_k|}\right| (1 - |\alpha_k| r) \frac{(1 - r)^{\varepsilon/\pi}}{(1 + r)^{2p+\varepsilon/\pi}} \leqslant$$

$$\leqslant |f'(z)| \leqslant qr^{q-1} \prod_{k=1}^{p-q}\left(1 + \frac{r}{|\alpha_k|}\right)(1 + |\alpha_k| r) \times$$

$$\times \frac{(1 + r)^{\varepsilon/\pi}}{(1 - r)^{2p+\varepsilon/\pi}}. \qquad (5)$$

Приводятся функции, для которых в (4) и (5) имеет место равенство. Как следствие отмечается также ряд точных оценок для функций $F(z) \in S_\varepsilon(p; q)$. Частные случаи классов $C_\varepsilon(p; q)$ и $S_\varepsilon(p; q)$ рассматривались ранее (Goodmann A. W., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, № 2, 204—223; Kaplan W., Michigan Math. J., 1952, **1**, № 2, 169—185; Robertson M. S., Amer. J. Math., 1936, **58**, № 3). С. А. Гельфер

4444. Избегаемые, но не асимптотические значения функций, аналитических в единичном круге. Багемил, Зайдель (Valeurs évitées, mais non asymptotiques, pour les fonctions holomorphes dans le cercle-unité. Bagemihl Frederick, Seidel Wladimir), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 18, 1195—1196 (франц.)

Комплексное число η называется избегаемым функцией $h(z)$ аналитической в единичном круге U, если η не принимается $h(z)$, но каждое отличное от η значение из некоторой окрестности этой точки принимается $h(z)$ бесчисленное множество раз. Доказывается, что среди функций, аналитических в U, существуют как ограниченные функции, так и функции с неограниченной характеристикой, для которых 0 является избегаемым, но не асимптотическим значением. Этим дается отрицательный ответ на вопрос, поставленный Коллингвудом и Картрайт (Collingwood E. F., Cartwright M. L., Acta math., 1952, **87**, 120).

А. И. Маркушевич

4445. О радиальных граничных значениях аналитических функций. Ловатер (On the radial limits of analytic functions. Lohwater A. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 1, 79—83 (англ.)

Н. Н. Лузин и И. И. Привалов построили примеры аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z) \not\equiv \text{const}$, у которых радиальные граничные значения $f(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$ равны нулю почти всюду на $|z| = 1$. В работе изучаются некоторые свойства таких функций, а также аналитических функций, имеющих нулевые радиальные граничные значения почти всюду на некоторой дуге A окружности $|z| = 1$.

Основной результат: пусть $f(z)$ — аналитическая в $|z| < 1$ функция, радиальные граничные значения которой равны 0 почти всюду на дуге A. Пусть далее $e^{i\theta} \in A$ и ζ таковы, что в некоторой окрестности V точки $e^{i\theta}$ все корни уравнения $f(z) = \zeta$ удовлетворяют условию: $\Sigma_1^{\infty}(1 - |z_k|) < \infty$. Тогда ζ будет являться в V асимптотическим значением функции $f(z)$, т. е. будет существовать жорданова дуга L, лежащая в $|z| < 1$, одним из концов которой является точка $e^{i\theta_0} \in V$ такая, что $\lim f(z) = \zeta$ при $z \to e^{i\theta_0}$ вдоль L.

Доказательство опирается, помимо хорошо известных результатов теории граничных значений аналитических функций, также на ранее полученные автором результаты (РЖМат, 1956, 1278). Г. Ц. Тумаркин

4446. О теореме Эгглстона относительно граничных множеств. Коллингвуд (On a theorem of Eggleston concerning cluster sets. Collingwood E. F.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 4, 425—428 (англ.)

Обозначения см. РЖМат, 1956, 368; РЖМат, 1955, 5738. $e^{i\theta} \in D(f)$ ($e^{i\theta} \in G(f)$), если $C_\rho(f, e^{i\theta})$ ($C(f, e^{i\theta})$) состоит из одной точки. Доказана теорема: Если $f(z)$ мероморфна в $|z| < 1$ и никакая порция $D(f)$ на дуге γ окружности $|z| = 1$ не является множеством 1-й категории ($D(f)$ is of category II at every point of γ), то $\gamma \cap G(f)$ является множеством 2-й категории ($G(f)$ is residual on γ). Из этой теоремы следует теорема Эгглстона (статья должна появиться в Comment. math. helv.), полученная для ограниченных функций. Теорема автора является следствием его более поздней теоремы (РЖМат, 1956, 1279), что отмечено в примечании при корректуре. А. А. Гольдберг

4447. Об алгебраических уравнениях с целыми коэффициентами, корни которых принадлежат данному точечному множеству. Фекете, Сегё (On algebraic equations with integral coefficients whose roots belong to a given point set. Fekete M., Szegő G.), Math. Z., 1955, **63**, № 2, 158—172 (англ.)

Введем обозначения: $P(\vartheta)$ — алгебраическое поле, порожденное фиксированным корнем ϑ квадратного

уравнения $z^2+pz+q=0$ с целыми рациональными коэффициентами p и q, причем $p^2-4q<0$; $K(\vartheta)$ — класс алгебраических уравнений вида $z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=0$ с целыми коэффициентами из поля $P(\vartheta)$ и неприводимых в нем; K — класс таких же уравнений с целыми рациональными коэффициентами из поля P рациональных чисел и неприводимых в нем.

В § 2 доказывается такое обобщение теоремы Фекете (Math. Z., 1923, 17, 228—249): Пусть S — ограниченное замкнутое множество, трансфинитный диаметр $d(S)$ которого меньше 1; тогда существует лишь конечное число уравнений класса $K(\vartheta)$, все корни которых принадлежат S.

Для существования бесконечного числа уравнений класса $K(\vartheta)$, все корни которых принадлежали бы S, необходимо, чтобы выполнялось условие $d(S)\geqslant 1$. Но это условие недостаточно. В последующих параграфах (§ 3 — § 5) авторы дают такие достаточные условия:

1) Если ограниченное множество S точек на плоскости z содержит множество, определяемое неравенством $|z^k+b_1z^{k-1}+\ldots+b_k|\leqslant R$, $R>1$, то существует бесконечное число уравнений класса $K(\vartheta)$, все корни которых лежат в S.

2) Пусть S — ограниченное замкнутое множество точек на плоскости z; $S(\rho)$ — множество точек, принадлежащих кругам радиусов ρ, описанных около точек множества S; $d(S)\geqslant 1$. Для произвольного $\rho>0$ существует бесконечное число уравнений класса $K(\vartheta)$, все корни которых лежат в $S(\rho)$. В случае, когда S симметрично относительно вещественной оси, существует бесконечное число уравнений класса K, все корни которых лежат в $S(\rho)$.

3) Если ограниченное замкнутое множество S содержит замкнутое подмножество S_1, все точки которого — внутренние точки S и $d(S_1)\geqslant 1$, то существует бесконечное число уравнений класса $K(\vartheta)$, корни которых лежат в S. Если S_1 симметрично относительно вещественной оси, то существует бесконечное число уравнений класса K, корни которых лежат в S.

4) Пусть $\Delta\ni\infty$ — область плоскости z, Γ — ее граница, причем $d(\Gamma)>1$, и пусть дополнение E к $\Delta\cup\Gamma$ состоит из конечного числа попарно не пересекающихся односвязных областей D_σ, $1\leqslant\rho\leqslant r$. Тогда существует бесконечное число уравнений класса $K(\vartheta)$, корни которых лежат в E; более того, существует бесконечное число таких уравнений, все корни которых лежат на лемнискате $|z^r+c_1z^{r-1}+\ldots+c_r|=1$, где $c_1,\ldots,c_r$ — целые числа из поля $P(\vartheta)$. С. А. Гельфер

4448. Замечание об одной теореме Партхасаратхи. Клуни (Note on a theorem of Parthasarathy. Cluniе J.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 4, 511—512 (англ.)

Упрощение доказательства леммы, содержащейся в работе Партхасаратхи (РЖМат, 1954, 5113).

4449. Моменты аналитических функций. Боас (Moments of analytic functions. Boas R. P., Jr.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 3, 412—413 (англ.)

Доказана теорема: Если функция $f(z)$, регулярная и экспоненциального типа при $x\geqslant 0$, ограничена на мнимой оси и если

$$\int_0^\infty |f(re^{i\theta})|\,r^n dr<n^n e^{-n\Phi(n)},\quad \Phi(n)\to\infty,$$

при некотором θ, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ для бесконечной последовательности натуральных n, то $f(z)\equiv 0$. Автор замечает, что условие ограниченности функции на мнимой оси можно заменить условием

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln_+|f(iy)|}{1+y^2}dy<\infty$$

или другими аналогичными. Б. Я. Левин

4450. Замечание о нулях одного класса мероморфных функций. Томич (Примедба о нулама једне класе мероморфних функција. Томић М.), Зб. радова Српска АН, 1955, **43**, № 4, 73—80 (серб.; рез. франц.)

Рассматриваются мероморфные функции вида

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[A_n/(z-a_n)+\lambda_n].$$

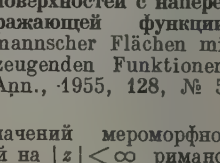
Доказываются три теоремы: 1) Пусть $\ldots\leqslant a_{-2}\leqslant a_{-1}\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots$, $A_i>0$ при $i<k_0$, $A_i<0$ при $i\geqslant k_0$, $\lambda_n\geqslant 0$, $n=0,\pm 1,\ldots$ Тогда $f(z)$ может иметь только действительные нули. 2) Пусть $\lambda_n\equiv 0$, $A_n=A_{-n}>0$, $a_n=-a_{-n}$, $n=1,2,\ldots$, $A_0<0$, $-A_0<A_i$ $i=1,2,\ldots$, $a_0=0$, $0<a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\ldots$ Тогда $f(z)$ может иметь только действительные и чисто мнимые нули. 3) $A_n\geqslant 0$, $\lambda_n\geqslant 0$, $n=0,\pm 1,\ldots$, все a_n лежат на некоторой прямой, не параллельной действительной оси. Тогда $f(z)$ не имеет нулей направо от этой прямой.

В доказательствах использованы только геометрические свойства преобразования $1/z$. Как следствия получается ряд теорем других авторов, в том числе Шермана (Sherman S., J. London Math. Soc., 1952, **27**, 364—366) и Гольденберга (РЖМат, 1955, 1969).

Примечание референта. 1) Если $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то $\varphi(z)=-f(\sqrt{z})/\sqrt{z}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Это замечание делает ненужным специальное доказательство теоремы 2 и позволяет ослабить ограничения на A_i: достаточно, чтобы $A_n=A_{-n}$, $n\geqslant 1$, и $A_i<0$ при $i=0,1,\ldots,k$, $A_i>0$ при $i=k+1,\ k+2,\ldots$ 2) Если в условиях теоремы 3 все a_n лежат на прямой, параллельной действительной оси или сливающейся с нею, то, повторяя построения автора, получим, что $f(z)$ может иметь нули только на этой прямой, при этом можно требовать лишь, чтобы λ_n были действительными числами. А. А. Гольдберг

4451. Построение римановых поверхностей с наперед заданным порядком отображающей функции. Кюнци (Konstruktion Riemannscher Flächen mit vorgegebener Ordnung der erzeugenden Funktionen. Künzi Hans P.), Math. Ann., 1955, **128**, № 5, 471—474 (нем.)

Изучается распределение значений мероморфной функции $w=f(z)$, отображающей на $|z|<\infty$ риманову поверхность («четверть-конец»), задаваемую указанным на рисунке комплексом отрезков, представляющим четвертую часть комплекса отрезков римановой поверхности некоторой $\wp$-функции. С помощью квазиконформных отображений, удовлетворяющих условиям известной теоремы Тейхмюллера—Виттиха (Wittich H., Math. Z., 1948, **51**, 278—288), доказывается, что порядок функции $f(z)$ равен



$$\lambda=\frac{\alpha+\pi}{\pi}\left[1+\left(\frac{\ln A}{\alpha+\pi}\right)^2\right],$$

где α — острый угол параллелограмма периодов $\wp(z)$, а A — отношение длин сторон этого параллелограмма. При соответствующем выборе периодов $\wp(z)$ λ может принимать любое значение из интервала $1<\lambda<\infty$. Как видно из заглавия работы, вступления и заключения, автор считает установление этого обстоятельства основной целью исследования.

Замеченные опечатки: стр. 473, строка 12 сверху, вместо $\operatorname{Im}\Omega_2$ должно быть $\operatorname{Im}\Omega_1$, строка 11 снизу, вместо $A=|\Omega_1|/|\Omega_2|$ должно быть $A=|\Omega_2|/|\Omega_1|$; стр. 474, строки 10 и 12 сверху, вместо $\frac{\alpha+\pi}{\pi}$ должно быть $\frac{\alpha+\pi}{\pi}\beta$.

Примечание референта. Задача, поставленная в заглавии статьи, может быть решена (без ограничений на λ) при помощи более простых конструкций, например, следующей. Пусть $a_n=n^{\frac{1}{\lambda}}$, если $0<\lambda<\infty$, $a_n=e^n$, если $\lambda=0$, $a_n=\ln n$, если $\lambda=\infty$. Проведем на плоскости через точки a_n, $n=1,2,\ldots$ разрезы длиной $\leqslant\frac{1}{2}\min(1, a_n-a_{n-1}, a_{n+1}-a_n)$ и вдоль каждого разреза приклеим по одному листу. Легко убедиться, что функция, отображающая $z\neq\infty$ на полученную риманову поверхность, имеет порядок λ.

А. А. Гольдберг

4452. Свойство некоторых римановых поверхностей и его приложения. Курода (A property of some open Riemann surfaces and its application. Kuroda Tadashi), Nagoya Math. J., 1953, 6, 77—84 (англ.)

Пусть G — некомпактная область на открытой римановой поверхности F и C — ее относительная граница, состоящая из конечного или счетного числа аналитических кривых, не сгущающихся на F. Пусть $\hat{G}$ — открытая риманова поверхность, получаемая из G процессом симметризации (РЖМат, 1955, 2646, удвоение римановой поверхности). G принадлежит, по определению, соответственно классам SO_{HB}, SO_{HD}, NO_{HB}, NO_{HD}, если всякая функция на G класса HB (соответственно HD), непрерывная на $G\cup C$ и обращающаяся в нуль на C (имеющая нормальную производную на C, равную нулю), тождественно равна нулю (есть постоянная). Доказывается, что для поверхности F с нулевой границей G принадлежит всем этим классам. Отсюда, в частности, следует: Если $G\in SO_{HB}$ (или SO_{HD}) и $U(p)$ — функция класса HB (или HD) на $\hat{G}$, то $U(p)=U(\tilde{p})$ для всех $p\in\hat{G}$ (p и $\tilde{p}$ — симметричные точки $\hat{G}$) — теорема Мирберга (Myrberg L., Ann. Acad. Sci. Fenn., 1952, № 107). При этих же условиях $\hat{G}\in O_{AB}$ (или O_{AD}). Далее, если $G\in SO_{HB}$ и NO_{HB} (или SO_{HD} и NO_{HD}), то $\hat{G}$ класса O_{HB} (O_{HD}). В качестве приложения получается ряд теорем по классификации римановых поверхностей, конформно эквивалентных плоской области Ω, дополнительной к ограниченному замкнутому линейному множеству E (Ω эквивалентна $\hat{G}$). Л. И. Волковыский

4453. Об аналитических функциях n комплексных переменных. Карафа (Sulle funzioni analitiche di n variabili complesse. Caraf a Mario), Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl., 1954, (5), 12, 267—284 (итал.)

Пусть D — область пространства $C^n(z_k)$, граница которой γ образована вещественно-аналитическими поверхностями. Автор указывает, распространяя пример Севери (Accad. Italia. Mem. Cl. sci. mat. e natur., 1931, 2, parte 1, 357—411), что можно построить на γ такую аналитическую дугу C вещественной размерности 1, что всякая голоморфная в D, включая границу, функция f, обращающаяся в нуль на C, тождественно равна нулю. C представляется как пересечение γ и аналитического многообразия $z_k=\varphi_k(z_1)$, $2\leqslant k\leqslant n$ и используется тот факт, что голоморфная функция φ_k приближается к любому значению в окрестности существенно особой изолированной точки. Другой интересный пример, показывающий, что голоморфная функция может быть определена ее значениями на вещественно-аналитическом многообразии V_2, вещественной размерности 2, получается из рассмотрения в $|z_k|<\rho$ многообразия $V_2: z_1=\eta be^{i\xi}$, $z_k=\eta g_k(\xi)$, $2\leqslant k\leqslant n$; $g_k(\xi)$ — аналитические функции параметра ξ, изменяющегося на некотором сегменте; f — определена через ее значения на V_2, если для всех целых $\nu>0$ можно выбрать $g_k(\xi)$ так, чтобы функции $b^{k_1}e^{ik_1\xi}g_2^{k_2}(\xi)\ldots g_n^{k_n}(\xi)$ для $k_i>0$, $\Sigma k_i=\nu$, были линейно независимы, что может быть эффективно реализовано. P. Lelong

Перевод из Math. Revs. 1954, 15, № 10, 864.

4454. Одно топологическое свойство областей Рунге. Серр (Une propriété topologique des domaines de Runge. Serre Jean-Pierre), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 1, 133—134 (франц.)

Область X числового комплексного пространства C^n называется областью Рунге, если 1) X есть область регулярности, 2) всякая функция, голоморфная на X, равномерно аппроксимируется на всяком компакте полиномами. Известно, что при $n=1$ область X односвязна. Дается обобщение этого факта. Доказывается теорема: n-е число Бетти области Рунге в C^n равно нулю. Е. Н. Аравийская

4455. О некоторых системах регулярных функций. Умэдзава (On some systems of regular functions. Umezawa Toshio), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, № 2, 137—165 (англ.)

Изучаются системы аналитических функций $w_1, w_2, \ldots, w_n$ от m комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Следуя Пеплю и Эрве (РЖМат, 1954, 4404) и Одзаки и Оно (РЖМат, 1954, 1632), автор обозначает эти системы как столбцевые матрицы

$$W\equiv\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix},\qquad Z\equiv\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_m\end{pmatrix}$$

и называет их векторами. В первых параграфах устанавливаются основные понятия и их свойства. Функциональный вектор $W=W(Z)$ называется аналитической функцией Z, если его компоненты w_i ($i=1,2,\ldots,n$) есть аналитические функции компонент z_k ($k=1,2,\ldots,m$). Так, например, производная порядка p от аналитической функции $W=W(Z)$ определяется символически так:

$$W^{(p)}\equiv\frac{d^pW}{dZ^p}\equiv\frac{d}{dZ}\times\frac{d}{dZ}\times\cdots\times\frac{d}{dZ}\times W,$$

где $\frac{d}{dZ}$ обозначает $\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_m}\right)$, а символ $\times$ обозначает кронекеровское произведение матриц. Тип (размер) матрицы $W^{(p)}$ будет (n,m^p). Интеграл в матричном пространстве типа (n,m) определяется равен-

ством

$$\int W dt = (\int w_{ij}\, dt),\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m$$

Пусть $Z_0, Z_1, \ldots, Z_p$ — точки (векторы) области D, в которой определена функция $F(Z)$. $F(Z_i) = [Z_i]$. Если существует матрица A типа (n, m), удовлетворяющая условию $A(Z_j - Z_k) = [Z_j] - [Z_k]$, то любую такую матрицу автор обозначает через $[Z_j Z_k]^{F(z)}$. Тогда $[Z_j Z_k]^{F(z)} \times (Z_j - Z_k) = [Z_j] - [Z_k]$. По индукции определяется $[Z_0 \ldots Z_p]^{F(z)}$ равенством

$$[Z_0 Z_1 \ldots Z_p]^{F(z)} \cdot \{(Z_p - Z_0) \times (Z_p - Z_1) \times \ldots \times (Z_p - Z_{p-1})\} =$$
$$= \{[Z_0 Z_1 \ldots Z_{p-2}\ Z_p]^{F(z)} - [Z_0 Z_1 \ldots Z_{p-1}]^{F(z)}\} \times$$
$$\times \{(Z_p - Z_0) \times (Z_p - Z_1) \times \ldots \times (Z_p - Z_{p-2})\}.$$

Тип матрицы $[Z_0 Z_1 \ldots Z_p]^{F(z)}$ есть (n, m^p),

Если $F(Z)$ регулярна в наименьшем выпуклом полигоне, содержащем точки $Z_0, Z_1, \ldots, Z_p$, то в качестве $[Z_0 Z_1 \ldots Z_p]^{F(z)}$ можно взять

$$Q_F(Z_0, \ldots, Z_p) = \int_0^1 dt_1 \int_0^t dt_2 \ldots \int_0^{t_{p-1}} F^{(p)}((1 - t_1) Z_0 +$$
$$+ (t_1 - t_2) Z_1 + \cdots + t_p Z_p)\, dt_p,$$

где t_i $(i = 1, \ldots, p)$ — вещественные числа, удовлетворяющие условию $t_i \geqslant 0$. В связи с этим дается обобщение интерполяционной формулы Ньютона, а именно: если $F(Z)$ регулярна в слабо выпуклом полигоне D, содержащем точки $Z_0, Z_1, \ldots$, то

$$F(Z) = Q_F(Z_0) + Q_F(Z_0, Z_1) \cdot (Z - Z_0) + \ldots +$$
$$+ Q_F(Z_0, \ldots, Z_n)\{(Z - Z_0) \times \ldots \times (Z - Z_n)\} + R_{n+1},$$

где $R_{n+1} = Q_F(Z_0, \ldots, Z_n, Z)\{(Z - Z_0) \times \ldots \times (Z - Z_n)\}$. Отсюда может быть получено, в частности, разложение Тэйлора, которое ранее было дано Одзаки и Оно (РЖМат, 1954, 1632) для функций, ограниченных в полицилиндре.

Ставя основной целью своей работы изучение функциональных векторов с точки зрения их листности (значности), автор доказывает теорему 3, являющуюся одним из основных результатов.

Теорема. 3. Пусть $F(Z)$ регулярна в выпуклой области D. Если существует матрица A типа (n, m^p), $\operatorname{rang} A = m^p$, где $p > 0$ и $n \geqslant m^p$ такая, что для всех $Z \in D$

$$\left\| \frac{1}{p!} \frac{d^p F(Z)}{dZ^p} - A \right\| < \lambda^{1/2},$$

где λ — минимум характеристических значений матрицы $A^* A$, то для каждой пары Z_i $(i = 0, 1, \ldots, p)$, удовлетворяющей условию $(Z_p - Z_0) \times (Z_p - Z_1) \times \ldots \times (Z_p - Z_{p-1}) \neq 0$, $Q_F(Z_0, \ldots, Z_p)\{(Z_p - Z_0) \times \ldots \times (Z_p - Z_{p-1})\} \neq 0$. При $p = 1$ эта теорема дает достаточное условие однолистности системы функций, аналитических в выпуклой области, и обобщает соответствующее условие Такахаши (Takahashi S., Ann. Math., 1951, 53, № 3, 464—471). При $n \geqslant 1$ и $m = 1$ это условие является достаточным для p-листности функции $F(z)$, тогда как при произвольных p, n, m $(n \geqslant m^p)$ эта теорема не дает возможности судить о p-листности функции $F(Z)$. Поэтому в дальнейшем автор ограничивается исследованием листности функциональных векторов одного переменного $(n \geqslant 2,\ m = 1)$ и получает ряд результатов:

Теорема 6: Если $F(z)$ регулярна в выпуклой области D и существует такой вектор A, что для всех $z \in D$ $\| F^{(p)}(z) - A \| \leqslant \| A \|$, то $F(z)$ p-листна в D. Устанавливается (при некоторых условиях) радиус p-листности функции.

Пусть функция $F(z)$ p-листна в области D. Если p-листна в D и функция $C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_{p-1} z^{p-1} + F(z)$, то $F(z)$ называется абсолютно p-листной в D для произвольных постоянных векторов $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$. Обобщая результат Одзаки (Ozaki S., Sci. Repts Tokyo Burnika Daigaku, 1944, sect. A., № 81—82, 115—135), автор устанавливает связь между достаточным условием абсолютной p-листности и условием самое большее p-листности и некоторые достаточные условия абсолютной p-листности.

Доказательства многих теорем не приводятся. Имеются опечатки. Библ. 14 назв. А. В. Лебедев

4456. Действительные и комплексные операторы на многообразиях. Спенсер (Real and complex operators on manifolds. Spencer D. C.), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 203—227 (англ.)

На m-мерном римановом многообразии наряду с оператором внешнего дифференцирования d определен оператор кодифференцирования $\delta = *d*$, понижающий степень внешних форм, к которым он прилагается на единицу. Здесь $*$ — оператор, сопоставляющий с p-формой дополнительную m — p-форму; в отличие от d оператор δ существенно связан с метрикой g_{ij} многообразия. Оператор Лапласа — Бельтрами определяется с помощью $\Delta = d\delta + \delta d$. На келеровом многообразии комплексной размерности k с локальными комплексно-сопряженными координатами z^i, $z^{k+i} = \bar{z}^i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, рассматриваются формы $\varphi = \varphi_{i_1 \ldots i_p} dz^{i_1} \Lambda \ldots \Lambda d^{i_p}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ и дифференциальные операторы. Если $\Pi_{\delta,\sigma}$ — оператор, выделяющий из p-формы ее компоненту типа (ρ, σ), $\rho + \sigma = p$ (выражение $\Pi_{\rho,\sigma}$ дается через обобщенные символы Кронекера), то дальнейшие дифференциальные операторы определяются так:

$$\partial = \Pi_{\rho+1,\sigma} d \Pi_{\rho,\sigma},\ \bar{\partial} = \Pi_{\rho,\sigma+1} d \Pi_{\rho,\sigma};\ \mathfrak{D} = \Pi_{\rho,\sigma-1} \delta \Pi_{\rho,\sigma},$$
$$\bar{\mathfrak{D}} = \Pi_{\rho-1,\sigma} \delta \Pi_{\rho,\sigma},$$

причем $d\Pi_{\rho,\sigma} = \partial + \bar{\partial}$, $\delta \Pi_{\rho,\sigma} = \mathfrak{D} + \bar{\mathfrak{D}}$.

Аналогами оператора Δ служат $\square = \bar{\mathfrak{D}}\partial + \partial\bar{\mathfrak{D}}$, $\bar{\square} = \mathfrak{D}\bar{\partial} + \bar{\partial}\mathfrak{D}$.

В связи с постановкой граничных задач для конечных подмногообразий определение последних дается в следующей форме: компактная подобласть B многообразия M называется конечным подмногообразием, если для каждой точки $q \in bB$ (b — оператор границы) существует окрестность U_q с действительными координатами $u^1, u^2, \ldots u^{2k}$ класса C^∞ и с неисчезающим в U_q якобианом относительно z^i такая, что она топологически отображается на область пространства u, причем гиперплоскость $u^{2k} = 0$ соответствует точкам границы, $u^1, \ldots, u^{2k-1}$ служат граничными параметрами, а U^{2k} — кривые ортогональны к $u^{2k} = 0$. В u_q, $q \in bB$ всякая p-форма φ разлагается на компоненты $n\varphi$ и $\tau\varphi$, содержащие или не содержащие множитель du^{2k}. Разложение приобретает определенный смысл в окрестности границы bB, если u^{2k} — геодезическое расстояние от границы.

Скалярное произведение p-форм определяется в $D \subset M$ через $(\varphi, \psi)_D = \int_D \varphi \wedge * \psi$; соответственно вводится норма $\| \varphi \|$. Приводятся аналоги формул Грина. Все многообразия предполагаются ориентируемыми.

Основным понятием, используемым в статье, является понятие потока (current). Пусть χ_p — пространство всех p-форм класса C^∞ на D, имеющих компактные носители на D (т. е. обращающиеся на D в нуль вне некоторого компактного множества). p-потоком называется линейный функционал T на пространстве χ_{m-p}, удовлетворяющий условиям непрерывности: если $\varphi_\mu \in \chi_{m-p}$, $\mu = 1, 2, \ldots$ — произвольная последовательность форм, носители которых содержатся в фиксированном компактном $K \subset D$, покрытом единой координатной системой x^i, то $T[\psi_\mu] \to 0$ при $\mu \to \infty$, если φ^μ и все их частные производные равномерно стремятся к нулю. Распространение оператора T на формы с некомпактным носителем производится на основе леммы о подразделении единицы: если дано локально конечное открытое покрытие $\{U_i\}$ области D, то найдется множество скаляров φ_j, такое, что $\Sigma_j \varphi_j = 1$, $\varphi_j \in C^\infty$, $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$, и носитель каждого из φ_j содержится в одном из U_i. Теперь для φ класса C: $T[\varphi] = \Sigma_j T[\varphi_j \varphi]$ и говорят, что $T'[\varphi]$ сходятся, если ряд справа сходится для любого подразделения единицы. Над потоком T определяются действия: $T \wedge \psi[\varphi] = T[\psi \wedge \varphi]$, $dT[\varphi] = (-1)^{p+1} T[d\varphi]$ и т. д. Для потока также устанавливается понятие носителя; поток называется регулярным в q, если в некоторой окрестности U_q он совпадает с p-формой класса C^∞. Со всякой точкой y риманова многообразия сопоставляется поток Y с носителем y, определяемый компонентами $Y_{i_1 \ldots i_p} = g_{i_1 \ldots i_p; j_1 \ldots j_p} \times dy^{j_p} \wedge \ldots \wedge dy^{j_p}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$, где $g_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p}$ — миноры матрицы $\| g_{ij} \|$. Для всякой p-формы φ имеет место $(\varphi, Y) = \varphi(y)$. Пусть Φ_p — пространство p-форм $\varphi \in C^\infty$; для его подпространств S_p определено замыкание $[S_p]$ по норме для всех форм S_p с конечной нормой. Особо рассматриваются три подпространства H, F, E. H — пространство гармонических форм с конечной нормой, $(\Delta \varphi = 0)$, F — пространство гармонических p-полей $(d\varphi = \delta\varphi = 0)$; если dS_p обозначает пространство дифференциалов всех $\varphi \in S_p$, то $[\Phi_p] = [\Delta \chi_p] + H$, $[\Phi_p] = [d\chi_{p-1}] + [\delta \chi_{p+1}] + F$. Наконец, E определяется из разложения $[\Phi_p] = [d\Phi_{p-1}] \cup [\delta \Phi_{p+1}] + E$ (все разложения ортогональные).

Обозначим через $\mathfrak{E}_p$ класс p-потоков на M, сходящихся для любой p-формы φ, $\varphi \in \Phi_p$, $\| \varphi \| < \infty$, и через K — замкнутое подпространство H (например, H, F или E). Тогда обозначается $KT[\varphi] = T[K\varphi]$, $T \in \mathfrak{E}_p$; здесь и далее оператор проектирования на подпространство обозначается той же буквой, что и подпространство. Говорят, что M обладает оператором Грина для классов K, если существует p-поток $G_k = G$, удовлетворяющий $\Delta G = Y - KY$ для каждого $y \in M$. Если G существует, то он имеет ядро $g(x, y)$, являющееся двойной p-формой по x и y; при $y \neq x$ удовлетворяется $\Delta_x g = -k(x, y)$; при фиксированном y, $g(x, y)$ имеет особенность с главной частью

$$\frac{1}{(m-2) S_m r^{m-2}} g_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_p};\ i_1 < \ldots < i_p;\ j_1 < \ldots < j_p,$$

где S_m — объем единичный $(m-1)$ сферы, r — геодезическое расстояние между x и y.

Операторы, соответствующие $K = H, F, E$, существуют на каждом конечном римановом многообразии. Для однозначной определенности налагаются добавочные условия, относящиеся к поведению на границе. Доказательство приводимой ниже теоремы опирается на ряд лемм; приводим для примера одну из них: если θ — непрерывная p-форма, определенная в окрестности границы конечного многообразия B, то в B существует гармоническая p-форма φ такая, что на границе $t\varphi = t\theta$, $n\varphi = n\theta$. Для формулировки теоремы требуется ряд новых обозначений; пусть

$$G\varphi = (\varphi(x), g(y, x)), \quad G'\varphi(\varphi(x), g(x, y)),$$

$$P_n \varphi = \int_{bB} [n \wedge * d\varphi - \delta\varphi \wedge * n], \quad P_g \varphi = -\int_{bB} [\varphi \wedge * dg - \delta g \wedge * \varphi].$$

Теорема. На конечном многообразии B существуют единственные операторы G, N, g, удовлетворяющие уравнениям:

$$\Delta G_\varphi = \varphi - H_\varphi, \quad G' \Delta_\varphi = \varphi - H_\varphi, \quad EG = 0,$$

$$\Delta N_\varphi = \varphi - F_\varphi, \quad N\Delta_\varphi = \varphi - F_\varphi - P_n \varphi, \quad FN = 0,$$

$$\Delta g_\varphi = \varphi - E_\varphi, \quad g\Delta_\varphi = \varphi - E_\varphi - P_g \varphi, \quad Eg = 0,$$

где $d\Delta P_n \varphi = \delta \Delta P_n \varphi = 0$, $\Delta P_g \varphi = 0$ и на границе:

$$t\delta P_n \varphi = t\delta\varphi, \quad n d P_n \varphi = n d\varphi; \quad t P_g \varphi = t\varphi, \quad n P_g \varphi = n\varphi.$$

Полученные результаты переносятся на келеровы многообразия и определенные на них операторы; для $\varphi \in F$ приводится формула $\varphi = E\varphi - 2 \int_{bB} [\varphi \wedge * (\bar{\partial} g)^- (\vartheta g)^- \wedge * \varphi]$, из которой как частный случай получается классическая интегральная формула Коши.

По поводу многих понятий и предложений в статье приводятся ссылки на работу Рама и Кодаира (Rham G. de Kodaira, K., Harmonic integrals, Princeton, 1950).

В. В. Рыжков.

4457. Функции гиперкомплексной переменной в n-мерном пространстве. Рошкулец Марчел Н., Ж. матем. и физ. Акад. РНР, 1954, 3, 132—141

Исследуются гиперкомплексные функции $f(\omega)$, моногенные по ω в смысле В. С. Федорова (Матем. сб., 1946, 18 (60), № 3, 353—378) для случая

$$\omega = x_0 + \theta x_1 + \theta^2 x_2 + \ldots + \theta^{n-1} x_{n-1},$$

$$f(\omega) = U_0 + \theta U_1 + \ldots + \theta^{n-1} U_{n-1},$$

где $U_0, \ldots, U_{n-1}$ — действительные функции действительных переменных: $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, а гиперкомплексная единица θ обладает свойством:

$$\lambda_0 \theta^n + \lambda_1 \theta^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} \theta + \lambda_n = 0,$$

$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — действительные постоянные, $\lambda_0 \neq 0$.

Условия моногенности $f(\omega)$ даются автором системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dU_h}{dx_k} - \frac{\lambda_{n-h+1}}{\lambda_0} \frac{dU_{n-1}}{dx_k} = \frac{dU_{h+1}}{dx_{k+1}} \\ &h = 0, 1, \ldots n-2 \\ &-\frac{\lambda_n}{\lambda_0} \frac{dU_{n-1}}{dx_k} = \frac{dU_0}{dx_{k+1}} \end{aligned}\right\} (k = 0, 1, \ldots, n-2). \quad (1)$$

Моногенную функцию $f(\omega)$, непрерывную и регулярную в области E_n n-мерного пространства $(x_0, x_1 \ldots, x_{n-1})$, автор называет голоморфной H в E_n. Изучаются классы делителей нуля и идеалы коммутативного кольца $H(\omega)$, образованного множеством всех чисел ω, и выводятся для функций, голоморфных H, некоторые аналоги интегральной формулы Коши для специально подобранных замкнутых кривых. Находятся характеристические многообразия системы уравнений (1) для случая: $\theta^n = \lambda_{n-1}\theta + \lambda_n$. Эти многообразия оказываются параллельными многообразиям делителей нуля кольца $H(\omega)$. Из других результатов работы отметим выражения всех частных производных 1-го порядка каждой функции U_h $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$ через частные производные 1-го порядка функции U_0 (при условии $\lambda_n \neq 0$):

$$\frac{dU_h}{\partial x_{h+j}} = \frac{\partial U_0}{\partial x_j} + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\frac{dU_0}{\partial x_{j+1}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-h}}{\lambda_n}\frac{\partial U_0}{\partial x_{j+h}}$$

$$(j = 0, 1, \ldots . n - h - 1),$$

$$-\frac{\partial U_h}{\partial x_{h-i-1}} = \frac{\lambda_{n-h-1}}{\lambda_n}\frac{\partial U_0}{\partial x_{h-i}} + \frac{\lambda_{n-h-2}}{\lambda_n}\frac{\partial U_0}{\partial x_{h-i+1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\lambda_0}{\lambda_n}\frac{\partial U_0}{\partial x_{n-i-1}}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, h-1).$$

В случае $n = 2$, $\lambda_2 = \lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 0$ получим известную систему Коши — Римана.

Имеются опечатки. В библиографии неточно названа работа референта; следует читать: моногенность. Матем. сб., 1946, 18 (60), № 3, 355—356. В. С. Федоров

4458. Системы уравнений с частными производными, присущие действительным алгебрам. Ше (Sui sistemi di equazioni a derivate parziali inerenti alle algebre reali. Sce Michele), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, **18**, № 1, 32—38 (итал.)

Пусть U — какая-либо ассоциативная и с главной единицей алгебра конечного ранга над полем действительных чисел; $u_1, \ldots, u_n$ — базис этой алгебры с законом умножения:

$$u_k u_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ki}^j u_j .$$

Автор называет гиперкомплексную функцию

$$y = y_1 u_1 + \ldots + y_n u_n,$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — действительные дифференцируемые функции действительных переменных $x_1, \ldots, x_n$, левой (правой) моногенной функцией гиперкомплексного переменного $x = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$, если

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} u_k u_i = 0 \quad \left(\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} u_i u_k = 0 \right)$$

и для левой моногенной функции получает систему уравнений:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} c_{ki}^j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \qquad (1)$$

Примечание референта. Автор не указывает ни области определения рассматриваемых функций, ни аналитических операций, переводящих его моногенные функции опять в моногенные функции, а последнее как раз и важно для решений дифференциальных уравнений (1).

В статье рассматриваются алгебры U, для которых система (1) будет эллиптической, параболической и гиперболической. Доказывается, что характеристическая форма системы (1): $|\Sigma_k c_{ki}^j z_k|$ (где $z_1, \ldots, z_n$ — вспомогательные переменные) не зависит от выбора базиса алгебры U. Встречаются опечатки. В. С. Федоров

4459 Д. Аппроксимация регулярных функций многих переменных в комплексных многообразиях. Вилль (Approximation regulärer Funktionen mehrerer Veränderlichen in komplexen Mannigfaltigkeiten. Will Herbert.— Diss., Math.-naturwiss. F., Münster, 1953, 51 gez. Bl., Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, **B**, № 15, 1088 (нем.)

4460 Д. К теории аналитических функций многих комплексных переменных. Аналитическая проекция. Кох (Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die analytische Projektion. Koch Karl.— Diss., Math.-naturwiss. F., Münster, 1953, 103 Bl., Abb., Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, **B**, № 15, 1088 (нем.)

См. также: 4396, 4611, 4738

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4461. О полиномиальных решениях уравнения Риккати. Кемпбелл, Голомб (On the polynomial solutions of a Riccati equation. Campbell J. G., Golomb Michael), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 6, 402—404 (англ.)

Рассматриваются полиномиальные решения уравнения

$$Ay' = B_0 + B_1 y + B_2 y^2, \qquad (1)$$

где A, B_0, B_1, B_2 — полиномы от x степеней a, b_0, b_1, b_2. Ссылаясь на свою предыдущую работу (Amer. Math. Monthly, 1952, 59, 388—389), автор утверждает, что степень полинома, являющегося решением, может иметь один из следующих видов: $(b_0 - b_2)/2$; $1 + b_0 - a$; $a - b_2 - 1$; $b_0 - b_1$; $b_1 - b_2$. Кратко указывается метод получения полиномиальных решений (1).

В. В. Немыцкий

4462. Общее решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Борги (General solutions of second order linear homogeneous differential equations. Borghi D. C.), Ann. geofis., 1955, **8**, № 2, 167—180 (англ.)

Поставлена задача: найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, приведенного к нормальному виду

$$d^2U/dt^2 + P(t)\,U = 0,$$

которое в свою очередь подстановкой $u' : u = z$ приводится к уравневию Риккати

$$dZ/dt + Z^2 + P(t) = 0.$$

Полагая далее $P(t) = -k^2 - f(t)$, $Z = \gamma + k$, где $\gamma(t)$ — новая неизвестная функция, $k = \text{const}$, и $f(x)$ — известная функция, которая равна нулю при $t = t_0$, автор заключает на основе очевидно ошибочного рассуждения, что полученное уравнение Риккати

$$d\gamma/dt + \gamma^2 + 2k\gamma = f(t) \qquad (1)$$

имеет частное решение

$$\gamma(t) = \sum_1^{\infty} (t - t_0)^n/n! \cdot \sum_r^{n-1} (-2k)^r f^{(n-1-r)}(t_0). \qquad (2)$$

Нетрудно проверить, что это утверждение ошибочно, потому что бесконечный ряд (2) представляет (при $f(t_0) = 0$) частное решение линейного дифференциального уравнения

$$d\gamma/dt + 2k\gamma = f(t)$$

и, следовательно, не может удовлетворять уравнению (1). Л. Чакалов

4463. Общие решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Борги (Soluzioni generali delle equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine. Borghi D. C.), Ann. geofis., 1955, 8, № 2, 151—165 (итал.)

4464. Об одном типе интегрирующего множителя дифференциального уравнения вида $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$. Николенко В. Н., Уч. зап. Казанск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 10, 155—168

Рассматривается вопрос о классе дифференциальных уравнений $X_1(x_1, x_2)\,dx_1 + X_2(x_1, x_2)\,dx_2 = 0$, допускающих интегрирующий множитель вида $\mu(x_1, x_2) = \alpha(x_1) \times \alpha_2(x_2)$ (примечание: все обозначения референта). Исходя из известного уравнения для интегрирующего множителя $X_1 \dfrac{\partial \ln \mu}{\partial x_2} - X_2 \dfrac{\partial \ln \mu}{\partial x_1} = \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial X_1}{\partial x_2}$, автор приходит к уравнениям для $\alpha_1(x_1)$ и $\alpha_2(x_2)$:

$$\frac{d^2 \ln \alpha_i}{dx_i^2} + \varphi_i(x_1, x_2) \frac{d \ln \alpha_i}{dx_i} + \psi_i(x_1, x_2) = 0,\ i = 1, 2,$$

где

$$\varphi_i = \frac{1}{X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{1}{X_i}\frac{\partial X_i}{\partial x_i},$$

$$\psi_i = \frac{X_i}{X_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial X_j/\partial x_i - \partial X_i/\partial x_j}{X_i}\right),\ i = 1,2;\ j = 1,2;\ j \neq i$$

Ищутся решения: α_1, зависящее только от x_1, и α_2, зависящее только от x_2. Для частного случая, когда $\varphi_i = \varphi_i(x_i)$ и $\psi_i = \psi_i(x_i)$, получено: $\alpha_i(x_i) = e^{-\int \left(e^{-\int \varphi_i(x_i)dx_i} \cdot \int \psi_i(x_i) e^{\int \varphi_i(x_i)dx_i dx_i}\right) dx_i}$, $i = 1,2$.

В заключение приводятся общие методические соображения о возможности использования преобразования исходного уравнения по формулам $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $D(u, v)/D(x, y) \neq 0$ для нахождения условий существования интегрирующих множителей различных типов. М. И. Минкевич

4465. Проблемы с «узким местом», функциональные уравнения и динамическое программирование. Беллман (Bottleneck problems, functional equations, and dynamic programming. Bellman Richard), Econometrica, 1955, **23**, № 1, 73—87 (англ.)

Приводится пример, в котором изучается связь между тремя отраслями промышленности: автомобильной, сталелитейной и инструментальной (без дальнейшей детализации по маркам стали и т. п.). Требуется так распорядиться имеющимися запасами и текущей продукцией стали и инструментов (израсходовав их частично на производство автомобилей, а частично на расширение производственных мощностей), чтобы за заданное время T произвести максимальное количество автомобилей. Все прочие факторы, связанные с производством, исключаются из рассмотрения.

При решении такого типа задач используются следующие принципы: 1) искомое максимальное значение зависит лишь от начальных данных $c = (c_1, \ldots, c_n)$ и продолжительности процесса T, так что оно может быть обозначено $f(c, T)$.

2) второй принцип может быть выражен формулой

$$f(c, S + T) = \max_{[0,S]} f(c(S), T),$$

где $c(S)$ обозначает набор значений переменных в момент времени S, а максимум берется по всевозможным «политикам» распределения ресурсов, осуществляемым в промежуток времени $[0, S]$.

Математически задача формулируется так: Рассматриваются векторы $x = x(t) = (x_1, \ldots, x_n)$, $z = z(t) = (z_1, \ldots, z_n)$ и матрицы порядка n A_1 и A_2. Требуется, удовлетворив условиям $dx/dt = A_1x + A_2z$, $z(0) = c$, $z_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, и еще некоторым линейным неравенствам, связывающим x и z, найти наибольшее значение величины $f(c, T) = (x(T), \alpha)$, где $T > 0$ — заданное число, α — заданный вектор. С помощью принципа 2) выводится уравнение

$\partial f/\partial T = \max_{z(0)} (A_1c + A_2z(0),\ \partial f/\partial c)$, где $\partial f/\partial c = (\partial f/\partial c_1, \ldots, \partial f/\partial c_n)$, максимум берется по всем векторам $z(0)$, удовлетворяющим заданным неравенствам.

Далее приводится и решается до конца следующая задача: найти максимум $x_2(T)$, если

$dx_1/dt = a_1z_1$, $x_1(0) = c_1$; $dx_2/dt = a_2z_2 - z_1$, $x_2(0) = c_2$;

$$z_1, z_2 \geqslant 0;\ z_1 + z_2 \leqslant x_2;\ z_2 \leqslant x_1;\ x_2 \geqslant 0.$$

Чтение статьи весьма затруднено большим количеством ошибок. Укажем важнейшие из них: при переходе от (2.5) к (4.1) в третьей формуле утерян один член; в связи с этим оказывается неверным утверждение $A_1 = 0$, содержащееся в примечании 6) на стр. 78; вид ограничительных неравенств, указанный в (5.1) (c), не является общим. В частности, в обоих приведенных примерах эти неравенства имеют другой вид.

М. К. Гавурин

4466. Функциональные уравнения в теории динамического программирования. II. Нелинейные дифференциальные уравнения. Беллман (Functional equations in the theory of dynamic programming. II. Nonlinear differential equations. Bellman Richard), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 7, 482—485 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1955, 1896.

Рассматривается система уравнений

$$dx_i/dt = \max_q f_i(x, t;\ q)\ \ i = 1, \ldots, n;\ x_i(0) = c_i, \qquad (1)$$

где $q = (q_1, \ldots, q_m)$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Вводится вектор $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Формулируется теорема: Пусть в области R, определенной неравенствами $\|x - c\| \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, функция f удовлетворяет условию Липшица: $\|f(x, t;\ q) - f(y, t; q)\| \leqslant k(q, t)\|x - y\|$, где $k(q, t)$ равномерно ограничена для $0 \leqslant t \leqslant t_0$ при q, изменяющихся в каждой конечной области, и пусть $\max_q f_i(x,\ t;\ q) =$

$= f_i(x, t; q)^{(i)}(x, t)); i = 1, \ldots, n$, причем $q^{(i)}(x, t)$ ограничены в R. Тогда система (1) имеет единственное решение на некотором отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_1 (0 < t_1 \leqslant t_0)$, причем это решение может быть получено как предел приближений

$$x^{(0)} = c, \; x_i^{(n+1)} = c + \int_0^t \max_q f_i(x^{(n)}, s; q)\, ds.$$

В случае, если функции $f_i(x, t; q)$ линейно зависят от x: $f_i(x, t; q) = b_i(t; q) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t; q) x_j$, то, при некоторых дополнительных предположениях, решение существует и единственно на всей положительной полуоси.

Отмечается, что уравнение Риккати $v' = -v^2 - a(t) v - b(t)$ равносильно уравнению рассматриваемого типа $v' = \min(q^2 + 2qv - a(t) v - b(t)]$.

Примечание референта. В уравнении (4.1) вместо $b(q_0) x$ должно быть $b(t; q_0)$. М. К. Гавурин

4467. Оценка ошибки при решении систем дифференциальных уравнений методом приближений. Эльтерман (Fehlerabschätzung bei näherungsweiser Lösung von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung. Eltermann Heinz), Math. Z., 1955, 62, № 4, 469—501 (нем.)

Рассматривается система уравнений с непрерывными правыми частями $d\zeta/dx = \mathfrak{F}(x, \zeta)$ ($\zeta = (y_1, \ldots, y_n)$, $\mathfrak{F} = (f_2, \ldots, f_n)$) в области G, причем автор имеет целью перенести на такие системы известный метод Перрона верхних и нижних функций. Пусть даны: а) непрерывная линия $\mathfrak{v} = \mathfrak{B}(x)$ ($a \leqslant x \leqslant b$); б) непрерывная функция $p(\zeta)$ ($\zeta = (z_1, \ldots, z_n)$), для которой $p(0) = 0$, $p(\zeta) > 0$, $p(\lambda\zeta) > p(\zeta)$ ($\lambda > 1$), $\zeta \neq 0$; в) непрерывная функция $g(x)$ ($a \leqslant x \leqslant b$), для которой $g(x) > 0$ ($a < x < b$). Тогда множество $R \subset G$ точек (x, ζ), для которых $a \leqslant x \leqslant b$, $p(\zeta - \mathfrak{B}(x)) \leqslant g(x)$, называется трубкой; трубку назовем втягивающей, если для любой точки (x, ζ) ($a \leqslant x < b$, $p(\mathfrak{b} - \zeta(x)) = g(x)$) вектор $(1, \mathfrak{F}(x, \zeta))$ направлен внутрь трубки вместе со всеми векторами, достаточно ему близкими. После исследования простых свойств трубок автор выводит два критерия единственности решения начальной задачи, обобщающие известные критерии Нагумо и Осгуда; доказательства основаны на построении произвольно узких втягивающих трубок, содержащих исследуемое решение. Далее вводятся дополнительные предположения: функции $\mathfrak{B}(x)$ и $g(x)$ имеют ограниченную правую производную, функция $p(\zeta)$ удовлетворяет условию Липшица, причем $p(\lambda\zeta) = \lambda p(\zeta)$ ($\lambda \geqslant 0$) и для любого ζ и любого вектора ζ существует предел $\lim_{t \to +0} (p(\zeta + t\zeta) - p(\zeta))/t = [\mathfrak{v} \nabla p](\zeta)$. Тогда, чтобы трубка R была втягивающей, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки (x, ζ) ($a \leqslant x < b$, $p(\zeta - \mathfrak{B}(x)) = g(x)$) было $g'_{\text{пр}}(x) > [\mathfrak{F}(x, \zeta) - \mathfrak{B}'_{\text{пр}}(x) \nabla p](\zeta - \mathfrak{B}(x))$. Чтобы в этой оценке уменьшить количество параметров, можно в правой части перейти к верхней грани по ζ ($p(\zeta - \mathfrak{B}(x)) = g(x)$). Важным частным случаем является тот, когда $\mathfrak{B}'_{\text{пр}}(x) = \mathfrak{F}(x, \mathfrak{B}(x))$ (он возникает, когда исследуется отклонение интегральных кривых от данной $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}(x)$ при известных начальных возмущениях); способы оценки выражения, стоящего в правой части неравенства (2), при этом рассматриваются более подробно. Более детально исследуется случай, когда $p(\zeta) = |\zeta|$ или $p(\zeta) = \max_i |z_i|$. Разобран конкретный пример. А. Д. Мышкис

4468. Решение уравнения, связанного с уравнением Бесселя. Сервранкс (Résolution d'une équation associée à l'équation de Bessel. Servranckx R.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 5, 556—559 (франц.)

Изучение электромагнитных полей в ускорителе со спиральным волноводом приводит к отысканию конечного при $x = 0$ решения уравнения

$$x^2 \cdot d^2f/dx^2 + x\,df/dx - (x^2 + \rho^2) f = x^\nu I_\mu(x) \qquad (1)$$

$$\rho \geqslant 0; \; \mu \geqslant 0, \; \nu \geqslant 0.$$

Свободный член $x^\nu I_\mu(x)$ представляется в виде ряда

$$x^\nu I_\mu(x) = \Sigma_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda I_\lambda(x)$$

и методом сравнения коэффициентов находим решение (1) в виде

$$f = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\mu + \nu + 2\lambda)\, 2^\nu (\nu+\lambda-1)!(\mu+\nu+\lambda-1)!}{[(\mu + \nu + 2\lambda)^2 - \rho^2]\lambda!\,(\nu-1)!\,(\mu+\nu)!} I_{\mu+\nu+2\lambda}(x).$$

Этот ряд оказывается равномерно сходящимся во всякой конечной части плоскости, если $\mu + \nu - \rho$ — четное положительное или нечетное. Рассмотрено и несколько более общее уравнение. В. В. Немыцкий

4469. Геометрическая интерпретация уравнения Абеля. Вигье (Canonisation géométrique de l'équation d'Abel. Viguier G.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 1, 35—50 (франц.)

Рассмотрим плоскую кривую (M), описываемую точкой: $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$; возьмем, кроме того, плоскую кривую (N), описываемую точкой: $F = F(t)$, $G = G(t)$. Через точку M проведем прямую с направляющими косинусами $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и отложим на ней от точки M длину MK, равную $\tau = \tau(t)$. Через точку K проведем прямую (Δ) с угловыми коэффициентами:

$$\gamma(t) \frac{d}{dt}(\xi + \alpha\tau), \; \delta(t) \frac{d}{dt}(\eta + \beta\tau).$$

Спрашивается, какому условию должна удовлетворять функция $\tau = \tau(t)$, дабы прямая (Δ) прошла через точку N с координатами F и G. В работе устанавливается, что эта функция должна удовлетворять уравнению Абеля

$$(s\tau + T)\, d\tau/dt + P\tau^2 + Q\tau + R = 0,$$

в котором коэффициенты $s, \ldots, R$ вычисляются через введенные выше функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$. Показывается, что уравнение Абеля общего вида может быть всегда связано с геометрической задачей рассматриваемого типа. Общие геометрические соображения иллюстрируются в статье разбором большого числа частных случаев, относящихся к специальным формам кривой (M) и к определенному выбору направляющих косинусов $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Л. Н. Сретенский

4470. Об одной новой ортогональной системе функций. Калафати П. Докл. АН СССР, 1955, 105, № 4, 631—633

Обозначим через $\lambda_k^2 > 0$ характеристические числа системы

$$y'' - V(x)\, y + \lambda^2 y = 0, \; y'(0) - hy(0) = y(1) = 0. \qquad (1)$$

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ — решение (1). Тогда функции

$$\chi_k(x) = \left[[\varphi(x, \lambda_k^2) + \frac{i}{\lambda_k} \varphi(x; 0) \frac{d}{dx} \frac{\varphi(x, \lambda_k^2)}{\varphi(x; 0)} \right] e^{-i\lambda_k x}$$

$$(k = \pm 1, \pm 2, \ldots, ; \; \lambda_{-k} = -\lambda_k)$$

образуют в интервале (0,1) полную ортогональную систему. Это основной результат статьи. Он устанавливается путем сведения рассматриваемой системы к системе

$$du/dx = -\lambda c^2(x)\, v, \qquad (2)$$
$$dv/dx = \lambda a^2(x)\, u,\ v(0) = u(1) = 0,$$

$a(x)$ и $c(x)$ положительны и непрерывны в [0,1]. Автор исследует спектральные свойства этой системы, привлекая для этой цели интегральное уравнение $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 k(x,s)\,\varphi(s)\,ds = f(x)$ с кососимметрическим эрмитовым ядром $K(x,s) = ia(x)\,c(s)$ $(x < s)$.

Т. М. Карасева

4471. Об одном улучшении метода Ритца. Пёшль (Über eine Verbesserung der Ritzschen Methode. Pöschl Theodor), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 9—10, 333—334 (нем.)

Отмечается, что метод Ритца, применяемый в обычной его форме, не всегда приводит к приближенному решению дифференциального уравнения с нужной точностью; особенно трудно получить хорошие результаты в том случае, когда уравнение содержит параметры. Улучшения можно добиться, подбирая приближающие функции так, чтобы они существеннее зависели от параметров, входящих в уравнение, или, вообще, более глубоко учитывали его особые свойства. Для этого рекомендуется применять метод Ритца в соединении с методом коллокаций в форме, при которой подбираемое приближение подставляется в дифференциальное уравнение для установления зависимостей между разыскиваемыми коэффициентами. Это, в частности, возможно тогда, когда в качестве функций приближения выбираются полиномы. Степень этих полиномов назначается так, чтобы предусматривались коэффициенты для удовлетворения всех граничных условий и условий в каждой точке коллокации, а также коэффициенты, определяемые через вариационные условия. Далее приводятся в самом общем виде условия коллокации, которые возникают при решении уравнения Эйлера—Лагранжа некоторой вариационной проблемы.

Автор не приводит конкретных примеров, однако указывает, что подробное изложение с несколькими простыми примерами появится в одной из ближайших тетрадей «Инженерного архива». А. Д. Горбунов

4472. Преобразование уравнений движения динамической системы при наложении идеальных связей. Гапонов А. В., Тр. Горьковск. политехн. ин-та, 1955, 11, № 1, 75—83

Выводятся уравнения движения механических систем при наложении новых связей. Рассматриваются примеры как из области голономных систем (наложение интегрируемых связей, введение квазикоординат), так и для систем неголономных (вывод уравнений Чаплыгина). Делается замечание о применении выводов к динамической теории электрических машин. Рассмотрен пример простейшей неголономной системы для иллюстрации. Подробно анализируется случай «вырожденных связей», определенных ранее автором (Докл. АН СССР, 1953, 89, № 1, 1—45). И. С. Аржаных

4473. Об одном свойстве уравнений Пуанкаре. Четаев Н. Г., Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 5, 513—515

Если на механическую систему, имеющую n степеней свободы, наложены некоторые гладкие голономные связи, то ее возможные перемещения определяются k-членной (интранзитивной) группой Ли инфинитезимальных операторов $X_\alpha(\alpha=1,\ldots,k;\ k<n)$. При этом канонические уравнения движения имеют вид:

$$dy_s/dt = \sum c_{\alpha s\beta}\eta_\alpha y_\beta - X_s H,\ \eta_s = \partial H/\partial y_s;\quad (s=1,\ldots,k).$$

Уравнения в вариациях Пуанкаре для этой системы определяют близкие к ведущему возмущенные движения. Показано, что устойчивость ведущего движения влечет за собой равенство нулю характеристических чисел Ляпунова для всех решений уравнения Пуанкаре. Отсюда, в силу известного результата Ляпунова, уравнения Пуанкаре имеют в этом случае знакоопределенный интеграл. Устойчивость ведущего движения обеспечивает приводимость этих уравнений, если предположить ограниченность $y_1,\ldots,y_k$.

В качестве примера рассматривается вопрос об устойчивости постоянных винтовых движений твердого тела в жидкости при наличии трех взаимно ортогональных плоскостей симметрии. Д. П. Желобенко

4474. Представление некоторых интегралов дифференциальных уравнений. Бриллуэ (Représentation de certaines intégrales d'équations différentielles Brillouet Georges), C. R. Acad. sci., 1955, 240, № 22, 2113—2115 (франц.)

Частный интеграл уравнения

$$\Pi_1^q(d/dz - \rho_j)\, f(z) = z^{-\lambda};\ \rho_j = \text{const}$$

($\lambda \neq$ целому положительному числу) строится в виде интеграла

$$f(z) = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2i\pi}\int_{P_\nu} e^{z\zeta}\frac{\zeta^{\lambda-1}}{P(\zeta)}\,d\zeta;\ P(\zeta) = \Pi_1^q(\zeta - \rho_j).$$

Контур интегрирования P_ν исходит из бесконечности в полуплоскости $\mathrm{Re}(z\zeta) < 0$ плоскости ζ, разрезанной вдоль луча $\arg\zeta = \pi - \arg z$, и возвращается в той же полуплоскости в бесконечность после обхода вокруг начала в положительном направлении; при этом контур не пересекает разреза и не проходит ни через одну из точек ρ_j. Отдельно рассмотрены случаи целого положительного и целого отрицательного λ.

С. Г. Михлин

4475. Анализ нелинейных систем с более чем одной степенью свободы способом пространственных траекторий. Гу (Analysis of nonlinear systems with more than one degree of freedom by means of space trajectories. Ku Y. H.), J. Franklin Inst., 1955, 259, № 2, 115—131 (англ.)

Предлагается метод n-мерного фазового пространства для решения нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка и n дифференциальных уравнений первого порядка. Вводится понятие пространственных траекторий сперва для трехмерного фазового пространства на примере уравнения второго порядка. Траектория в фазовом пространстве характеризуется тремя переменными x, x', x'', зависящими от времени t. Рассматриваются проекции этой траектории в плоскостях $x'-x$, $x''-x'$, $x''-x$. Так как для уравнения второго порядка

$$x'' + f(x', x) + f_1(x) = F(t) \qquad (1)$$

x'' выражается через члены, зависящие от x и x', то не представляет затруднений найти проекцию фазовой траектории в плоскости, например, $x'-x$. Так для уравнения (1) получаем

$$dx'/dx = x''/x' = [F(t) - f(x', x) - f_1(x)]\cdot(x')^{-1}. \qquad (2)$$

Численным интегрированием уравнения (2) строится проекция фазовой траектории. Далее рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение 3-го порядка:

$$x''' + \Phi(x', x)\,x'' + f(x', x) + f_1(x) = F(t),$$

для которого уравнениями фазового пространства будут:

$$dx''/dx' = x'''/x'' = [F(t) - \Phi(x', x)x'' - f(x', x) - f_1(x)]\cdot(x'')^{-1}, \quad dx/dx' = x'/x''.$$

Произведен анализ системы с двумя степенями свободы (два связанных контура), описываемой уравнениями вида:

$$R_1x + L_1(x)x' + Mx' - My' = e_1,$$
$$R_2y + L_2y' + (1/C)y^{-1} - Mx' = 0,$$

где $^{-1}$ означает интеграл по t, $L_1(x)$ — нелинейный элемент в первом контуре. Рассматривается также уравнение четвертого порядка

$$w'''' = f_3(w'', w', w)w''' + f_2(w'', w', w) + f_1(w', w) + f_0(w),$$

для которого уравнения траекторий фазового пространства имеют вид:

$$\frac{dw'''}{dw''} = \frac{w''''}{w'''}, \quad \frac{dw'}{dw''} = \frac{w''}{w'''}, \quad \frac{dw}{dw''} = \frac{w'}{w'''}.$$

Показано что предлагаемый метод фазового пространства имеет преимущество перед обычным координатным методом, использующим, при численном интегрировании уравнений, Δt вместо $\Delta x'$ (или $\Delta x''$ или Δx и т. д.). Ю. А. Митропольский

4476. Условия устойчивости решений уравнения типа маятника. Лилло, Сейферт (On conditions for stability of solutions of pendulum-type equations. Lillo James C., Seifert George), Z. angew. Math. und Phys., 1955, 6, № 3, 239—243 (англ.; рез. нем.)

Рассматривается уравнение

$$\theta'' + \alpha f(\theta)\theta' = g(\theta),$$

где $f(\theta) \equiv f(\theta + 2\pi)$, $g(\theta) \equiv g(\theta + 2\pi)$, $f(\theta) > 0$, $\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta > 0$ и $g(\theta)$ имеет только простые корни. Доказывается существование бифуркационного значения $\alpha = \alpha_0$ такого, что для всех $\alpha > \alpha_0$ каждое решение $\theta = \theta(t)$ приближается при $t \to \infty$ к одной из точек покоя, а при $\alpha \leqslant \alpha_0$ на фазовой плоскости существует $\theta' \equiv y(\theta) \equiv y(\theta + 2\pi) \geqslant 0$, к которому приближаются траектории, не идущие при $t \to \infty$ к точке покоя. Для $\alpha = \alpha_0$ получаются оценки сверху и снизу, дающие в частных предположениях относительно $g(t)$ и $f(t)$ результаты Хайса (РЖМат, 1955, 1195) и Бема (РЖМат, 1955, 3747). М. И. Ельшин

4477. Почти периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Кордуняну (Soluţii aproare periodice ale ecuaţiilor diferenţiale neliniare de ordinul al doilea. Cordunеanu C.), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1955, 5, № 793—797 (рум.; рез. русс., франц.)

Доказывается следующая теорема: Всякое ограниченное решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$ почти периодическое, если $f(u, v, w)$ удовлетворяет условиям: а) $f(u, v, w)$ определена для $-\infty < u < \infty$ и $(v, w) \in D$; б) $f(u, v, w)$ почти периодическая от u равномерно относительно $(v, w) \in D$; в) $f(u, v, w)$ имеет производные первого порядка по v, w при $(v, w) \in D$ и, кроме того, $f_v' \geqslant m > 0$.

При доказательстве используется оценка для решения линейного уравнения второго порядка с условиями $y(\alpha) = A$, $y(\beta) = B$. А. Халанай

4478. Об устойчивых и неустойчивых центрах. Алымухамедов М. И., Уч. зап. Казанск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 10, 9—28

Рассматривается уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r^2u_1 + r^3u_2 + \ldots + r^{n+1}u_n}{1 + rv_1 + \ldots + r^nv_n}, \qquad (1)$$

где r, φ — полярные координаты, u_s и v_s — тригонометрические многочлены. Указаны некоторые новые частные случаи, когда уравнение (1) имеет в начале координат особую точку — центр.

Вводится понятие «устойчивого центра», т. е. такого, который не превращается в фокус при некоторых изменениях коэффициентов правой части уравнения (1). В зависимости от того, какие изменения коэффициентов считаются допустимыми, автор различает три степени устойчивости центра. Указаны условия, необходимые и достаточные для устойчивости центра

Рассматривается также задача о превращении фокуса в центр и обратно путем добавления старших членов к многочленам u_s и v_s в уравнении (1).

А. Ф. Филиппов

4479. О теоремах существования периодических решений для уравнений нелинейных колебаний. Эрман (Über Existenzsätze für periodische Lösungen bei nichtlinearen Schwingungsdifferentialgleichungen. Ehrmann H.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, **35**, № 9—10, 326—327 (нем.)

Сформулированы теоремы:

1. Пусть уравнение $\ddot{x} + g(x) = p(t)$ при любых $x(t_0)$ и $\dot{x}(t_0)$ имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий; пусть $p(t)$ ограничена, $g(x)/x \to +\infty$ при $|x| \to \infty$. Тогда краевая задача

$$c_1x(t_0) + c_2\dot{x}(t_0) = c_3, \quad c_4x(t_1) + c_5\dot{x}(t_1) = c_6$$

при любых $c_1, \ldots, c_6$ и $t_1 > t_0$ имеет бесконечно много решений.

2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть существуют такие постоянные T и τ, что для всех t $p(t + T) = p(t)$, $p(\tau - t) = -p(t)$, $g(-x) \equiv -g(x)$ (или $p(t + T) = p(t)$, $p(\tau - t) = p(t)$). Тогда для любого целого $k \geqslant 1$ существует бесконечно много периодических решений с наименьшим периодом kT.

Доказательства не приведены. А. Ф. Филиппов

4480. О числе предельных циклов уравнения $\ddot{x} + f(\dot{x})\dot{x} + \omega^2x = 0$ Чечик В. А., Студ. наук праці Київськ. ун-ту, 1955, зб. 16, 183—198

Исследуется задача о числе предельных циклов уравнения

$$\ddot{x} + f(\dot{x})\dot{x} + \omega^2x = 0 \qquad (1)$$

при следующих предположениях: 1) $f(v)$ непрерывна и обеспечивает единственность решений; 2) $f(v)$ — четная функция, причем $f(0) < 0$ (или $f(0) > 0$) и $|f(v)v| \to \infty$ при $|v| \to \infty$; 3) в некоторой достаточно малой окрестности корня уравнения $f(v) = 0$ функция $f(v)$ меняет знак.

Исследуемое уравнение при $\omega = 1$ переводится на фазовую плоскость $(x, v = dx/dt)$ и рассматривается уравнение

$$dv/dx = -f(v) - x/v. \qquad (2)$$

Прежде всего доказывается, что ни при каком выборе функции $f(v)$ уравнение (1) не имеет полуустойчивых регулярных предельных циклов. Для нахождения устойчивых и неустойчивых предельных циклов применяется следующий метод: берется система окружностей $x^2 + y^2 = 2\lambda$ и подсчитывается приращение $\Delta\lambda$ параметра λ вдоль интегральных кривых; так как

$\Delta\lambda$ изменяется непрерывно в зависимости от решений (2), то для установления существования устойчивого и неустойчивого предельного цикла достаточно установить наличие двух интегральных кривых, на которых $\Delta\lambda$ имеет противоположные знаки. В качестве интегральных кривых, для которых подсчитывается $\Delta\lambda$, выбираются кривые, проходящие через точки $x=0$, $v=v_k$ $(k=0,1,\ldots,r)$, где $v_0=0$ и v_k — положительные корни уравнения $f(v)=0$. Выводятся достаточные условия того, чтобы $\Delta\lambda$ имело противоположные знаки на двух таких соседних кривых (ввиду сложности этих условий, не приводим их здесь). Отсюда получается теорема: Если для уравнения (2) выполнены условия 1), 2), 3) и указанные достаточные условия, то при $f(0)<0$ число предельных циклов не меньше $[(r+1)/2]$, а число неустойчивых предельных циклов не меньше $r-[(r+1)/2]$ (если $f(0)>0$, то эти числа меняются местами).

Из теоремы следует, что при наличии бесконечного числа корней уравнения $f(v)=0$, выполняющих найденные достаточные условия, уравнение (2) имеет бесконечно много предельных циклов, устойчивых и неустойчивых. М. И. Минкевич

4481. О предельных циклах. Обморшев А. Н. В сб. Расчеты деталей и механизмов точных приборов, М., Машгиз, 1955, 45—68

Рассматриваются вопросы о нахождении предельных циклов на бесконечности и о поведении траекторий на бесконечности. Фазовая плоскость проектируется на полусферу Пуанкаре, а затем полусфера проектируется ортогонально на фазовую плоскость в круг единичного радиуса. Последняя проекция представляется в полярных координатах и исследуется. Исходная система дифференциальных уравнений

$$dx/dt=P(x,y),\quad dy/dt=Q(x,y)$$

при этом преобразуется в систему

$$d\rho/dt=\Phi(\rho,\theta)(1-\rho^2)^{3/2},$$
$$d\theta/dt=\Psi(\rho,\theta)\cdot(1-\rho^2)^{1/2}\rho^{-1},$$

где $\Phi(\rho,\theta)=P\cdot\cos\theta+Q\sin\theta$, $\Psi(\rho,\theta)=Q\cos\theta-P\sin\theta$, $0\leqslant\rho\leqslant1$.

Для нахождения предельных циклов на бесконечности автор анализирует случаи, когда $\rho=1$ является решением уравнения

$$d\rho/d\theta=\rho(1-\rho^2)\Phi(\rho,\theta)/\Psi(\rho,\theta).$$

Далее рассматривается лишь тот случай, когда

$$\Phi(\rho,\theta)=(1-\rho)^m\Phi_1(\rho,\theta),$$
$$\Psi(\rho,\theta)=(1-\rho)^n\Psi_1(\rho,\theta)$$

и функции Φ_1 и Ψ_1 при $\rho=1$ не обращаются тождественно ни в нуль, ни в ∞.

Характер устойчивости предельного цикла на бесконечности выясняется методом осреднения линейных частей для выражений $d(1-\rho)/dt$, $d(1-\rho)/d\theta$. Исследование фазовых траекторий в окрестности особой бесконечно далекой точки $\rho=1$, $\theta=\theta_i$ производится посредством линеаризации уравнений, составленных для $\chi=\rho-1$, $\Psi=\theta-\theta_i$; здесь приводятся известные характеристики некритических случаев. В качестве примера дается подробный анализ поведения траекторий в целом для уравнения $\ddot{x}+2h\dot{x}+\omega^2x=0$. Изложенная автором теория применяется в статье для исследования условий возникновения и характера предельных циклов в автоколебательной системе, эквивалентной цепи лампового генератора, когда сеточная характеристика представляется полиномами третьей и пятой степени (мягкий и жесткий режим) и для исследования колебаний в системе генератор-мотор. М. И. Минкевич

4482. Принцип симметрии и проблема центра. Сибирский К. С., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1955, **17**, 27—34

Изучается дифференциальное уравнение

$$dy/dx=-Y(x,y)/X(x,y),\ Y(0,0)=X(0,0)=0,\quad (1)$$

где X и Y — аналитические в окрестности начала координат функции, разложения которых могут начинаться с членов выше первого порядка, при условии, что характеристическое уравнение не имеет действительных корней, следовательно, начало координат для уравнения (1) является особой точкой типа фокуса или центра.

Доказывается, что существование проходящей через начало оси симметрии поля направлений уравнения (1) гарантирует наличие центра. Обозначив через X_1, Y_1, X_2 и Y_2 соответственно нечетные и чётные относительно x части функций X и Y, автор доказывает, что для симметрии поля уравнения (1) относительно оси Ox необходимо и достаточно выполнения тождества $X_1Y_1=X_2Y_2$.

Поворотом оси координат на угол φ доказывается, что для симметрии поля направлений уравнения (1) относительно произвольной прямой

$$x\sin\varphi-y\cos\varphi=0 \quad (2)$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$X_1^{(1)}(x_1,y_1,\varphi)\,Y_1^{(1)}(x_1,y_1,\varphi)=$$
$$=X_2^{(1)}(x_1,y_1,\varphi)\,Y_2(x_1,y_1,\varphi)$$

тождественно относительно x_1 и y_1, где $X_1^{(1)}$, $Y_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$ и $Y_2^{(1)}$ означают соответственно результаты преобразований функций X_1, Y_1, X_2 и Y_2.

Для случая, когда в уравнении (1) X и Y являются многочленами степени N, не имеющими общего множителя, доказывается, что для симметрии поля относительно прямой (2) необходимо и достаточно выполнение условий:

$$X_2^{(1)}(x_1\,y_1,\varphi)=0,\quad Y_1^{(1)}(x_1,y_1,\varphi)=0$$

тождественно относительно x_1 и y_1 и что число осей симметрии в этом случае либо бесконечность, либо не превышает $N+1$. М. И. Альмухамедов

4483. О пространстве параметров уравнения Льенара. Минорский (Sur l'espace paramétrique de l'équation de M. Liénard. Minorsky Nicolas), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 14, 1508—1509 (франц.)

Дается разбиение полупространства $E>0$ параметров $A=a/\mu$, $C=c/\mu$, $E=e/\mu$ дифференциального уравнения

$$\ddot{x}+(a+cx^2+ex^4)\dot{x}+x=0$$

на области различной топологической структуры траекторий в фазовой плоскости. Всего три типа областей:

I. Ациклический тип: 1) $C>0$, $A>0$ или 2) $C<0$, $A>0$, $C^2<8AE$. Одно устойчивое равновесие.

II. Моноциклический: 3) $C>0$, $A<0$ или 4) $C<0$, $A<0$. Одно неустойчивое равновесие внутри устойчивого предельного цикла.

III. Бициклический: 5) $C<0$, $A>0$, $C^2>8AE$; устойчивое равновесие с окружающим его неустойчивым циклом внутри устойчивого (внешнего) цикла.

Изменение структуры происходит в том случае, когда параметрическая точка пересекает поверхность $A=0$ или $C^2=8AE$; при этом от особой точки в фазовой плоскости могут родиться один или два цикла.

Например, один (устойчивый) цикл появляется при переходе из области 1) в область 3) по нормали к плоскости $A=0$. Рассматриваются и другие случаи бифуркаций. Доказательства не приведены.

Н. Ф. Отроков

4484. Об обобщенном дифференциальном уравнении Эмдена. Митринович (Sur l'équation différentielle d'Emden généralisée. Mitrinovitch Dragoslav S.), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 12, 724—726 (франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$f(x)y''+g(x)y'+ay^n=0, \qquad (1)$$

где

$$g(x)=[(n+3)/(n+1)]\sqrt{f(x)}\Big/\int dx/\sqrt{f(x)}+f'(x)/2,$$

являющееся обобщением так называемого уравнения Эмдена.

В результате замены $y=h(x)u$, где $h(x)=[\int(dx/\sqrt{f(x)})]^{-2/(n+1)}$, уравнение (1) приводится к другому уравнению, обладающему интегрирующим множителем $2u'$. Находится первый интеграл

$$fh^{1-n}u'^2+\frac{2a}{n+1}u^{n+1}=C,$$

после чего переменные разделяются. Г. А. Мерман

4485. Об устойчивости неустановившихся движений в одном специальном случае. Старжинский В. М., Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 4, 471—480

Рассматриваются вопросы устойчивости в случае уравнений возмущенного движения

$$d^nx/d\tau^n+a_1d^{n-1}x/d\tau^{n-1}+\cdots$$
$$\cdots+a_{n-1}dx/d\tau+a_n(\tau)x=0 \qquad (1)$$
$$(n=3;\quad n=4),$$

где $a_1,\ldots,a_{n-1}$ — положительные постоянные, $a_n(\tau)$ — неотрицательная кусочно-непрерывная функция τ, ограниченная при $\tau\geqslant\tau_0$. Задача устойчивости решается вторым методом Ляпунова. При $n=3$ уравнение (1) приводится к виду

$$\dddot{x}+p\ddot{x}+\dot{x}+r(t)x=0 \quad (p\geqslant 0,\ 0\leqslant r(t)\leqslant N). \qquad (2)$$

Постоянные коэффициенты A, B, C, E, G квадратичной формы

$$V=Ax^2+(B-1)y^2+Cz^2+2Exy+2xz+2Gyz$$

подбираются таким образом, чтобы производная dV/dt в силу уравнения (2) сохраняла свойство знакоотрицательности для наибольшего возможного интервала изменения $r(t)$, причем получаются следующие границы для $r(t)$

$$r(t)\leqslant N\leqslant\frac{1}{p} \quad\text{при}\quad p\geqslant\sqrt{2}$$

$$\text{или } N\leqslant p-\frac{1}{4}p^3 \quad\text{при}\quad p\leqslant\sqrt{2}. \qquad (3)$$

Проверяя определенную положительность функции V, автор приходит к выводу о достаточности условий (3) для устойчивости решения $x=0$ уравнения (2).

Аналогичным путем решается задача для уравнения

$$\dddot{x}+p\ddot{x}+q\dot{x}+\dot{x}+s(t)x=0$$
$$\left(p>0, q>0, 0\leqslant s(t)\leqslant\sum\right).$$

Н. Н. Красовский

4486. Периодические решения нелинейного дифференциально-разностного уравнения. Кук (Forced periodic solutions of a stable non-linear differential—difference equation. Cooke K. L.), Ann. Math., 1955, 61, № 2, 381—387 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{d}{dt}u(t+1)=au(t)+bu(t+1)+f(u(t)),$$
$$u(t+1),\ \omega t)+kg(\omega t),$$

где a, b, ω ($\omega>0$), k — постоянные, $g(t)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 1, причем ее среднее значение на интервале длины, равной периоду, равно нулю, функция $f(x, y, t)$ непрерывна относительно (x, y, t), имеет период равный 1 относительно t и $f(0, 0, t)=0$. Предполагается еще, что все корни характеристического уравнения $se^s-be^s-a=0$ имеют отрицательные действительные части. При этих условиях доказывается, что существует такая постоянная $\delta>0$, зависящая от a, b, f, g и не зависящая от k и ω, что если выполняется условие $|k|/1+\omega<\delta$, то тогда уравнение имеет непрерывное периодическое решение $p(t)$ с периодом равным $1/\omega$, причем имеется такое постоянное ρ, не зависящее от k и ω, что при всех t $|p(t)|\leqslant\rho|k|/(1+\omega)$. Это решение асимптотически устойчиво: имеется такое $\varepsilon>0$, не зависящее от k и ω, что для любого решения $x(t)$ рассматриваемого уравнения, удовлетворяющего условию $\max_{0\leqslant t<1}|x(t)|\leqslant\varepsilon$, имеем

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t)-p(t)]=0.$$

Указанное решение находится путем решения методом последовательных приближений некоторого интегрального уравнения, а его устойчивость устанавливается (без особых подробностей) методом, указанным в предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 202).

А. Ф. Леонтьев

4487. Периодические решения нелинейного дифференциального уравнения. Фуруя (Periodic solutions of a nonlinear differential equation. Furuya Shigeru), Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1955, 4, № 1, 47—51 (англ.)

Рассматривается уравнение вида

$$\ddot{x}+b\dot{x}+x+(a-cx^2)x\cos 2t+ex^3=0, \qquad (1)$$

где a, b, c и e — малые постоянные, являющиеся величинами одного порядка.

Полагая $a=\mu A$, $b=\mu B$, $c=\mu C$, $e=\mu E$, где μ — малое положительное, и применяя метод Крылова—Боголюбова, автор приводит решение уравнения (1) в первом приближении

$$x=\rho\cos(t-\varphi), \qquad (2)$$

где ρ и φ определяются следующей системой:

$$d\rho/dt=\mu\rho/8\{(C\rho^2-2A)\sin 2\varphi-4B\},$$
$$d\varphi/dt=\frac{1}{4}\left\{(C\rho^2-A)\cos 2\varphi-\frac{3}{2}E\rho^2\right\}. \qquad (3)$$

Исследуя фазовое изображение системы (3), он определяет устойчивость всех особенностей системы (3) и приводит подробную классификацию периодических решений уравнения (1). Ю. А. Митропольский

4488. Нелинейное дифференциально-разностное уравнение. Райт (A non-linear difference-differential equation. Wright E. M.), J. reine und angew. Math., 1955, 194, № 1—4, 66—87 (англ.)

Подробно исследуются решения дифференциально-разностного уравнения

$$y'(x) = -\alpha y(x-1)\{1+y(x)\},\ \alpha>0, \qquad (1)$$

которое при $\alpha = \log 2$ встречается при изучении распределения простых чисел методами теории вероятностей. Функция $y(x)$ задается на начальном множестве $-1 \leqslant x \leqslant 0$ и предполагается на этом множестве ограниченной и интегрируемой в смысле Лебега.

Отмечая ряд свойств решений уравнения (1), автор, в частности, доказывает теорему: Если $y(0) > -1$ и $\alpha \leqslant {}^3/_2$ (эту оценку можно немного улучшить), то $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, если же $\alpha > \pi/2$, то существуют решения уравнения (1), для которых $y(0) > -1$ и $y(x)$ не стремится к нулю при $x \to \infty$.

Для стремящихся к нулю решений уравнения (1) получена оценка быстроты стремления к нулю в зависимости от свойств корней характеристического квазиполинома $z + \alpha e^{-z}$, соответствующего линейного уравнения $y'(x) = -\alpha y(x-1)$. Л. Э. Эльсгольц

4489. Качественные методы в теории устойчивости. Еругин Н. П., Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 5, 599—616

Обзорный доклад, прочитанный на конференции по теории устойчивости и теории нелинейных колебаний (Москва, май 1955 г.). Указывается, что в последние годы развивались методы изучения устойчивости, основанные на качественном исследовании траекторий возмущенного движения и использующие второй метод Ляпунова, а также методы аналитической теории дифференциальных уравнений. Исходным пунктом серии задач, о которых идет речь в докладе, является задача, предложенная М. А. Айзерманом (Успехи матем. наук, 1949, 4, № 4, 187—188). Приводятся результаты, полученные при решении задачи М. А. Айзермана, а также при исследовании различных обобщений этой задачи. Приводятся общие теоремы о существовании функций Ляпунова, решающих задачу устойчивости при произвольно больших начальных отклонениях, а также некоторые результаты обобщающие качественные методы исследования устойчивости, предложенные автором для систем уравнений второго порядка, на случай системы n уравнений. Подчеркивается, что, несмотря на достаточно полное положительное решение вопросов о существовании функции Ляпунова во всей области асимптотической устойчивости, вопрос об эффективных методах построения такой функции в конкретных случаях остается открытым. Автор считает, что до сих пор исчерпывающее решение конкретных задач удавалось провести лишь на основании качественных методов с использованием функций Ляпунова частного вида. Указывается на важность дальнейшего развития качественных методов исследования устойчивости и, в частности, на важность решения задачи о построении траекторий, ограничивающих область устойчивости. Н. Н. Красовский

4490. Критерий устойчивости для систем с постоянными коэффициентами. Шварц (Critère de stabilité pour des systèmes à coefficients constants. Schwarz Hans Rudolf), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 1, 15—16 (франц.)

Устойчивость решений системы линейных дифференциальных уравнений $y' = Ay$ (A — постоянная вещественная $n \times n$-матрица) зависит от знаков вещественных частей характеристических чисел матрицы A. Вместо применения критерия Рауса — Гурвица, что требует предварительного вычисления коэффициентов характеристического уравнения, матрица A приводится при помощи элементарных преобразований к подобной вещественной канонической матрице $\| b_{ij} \|_1^n$, где все $b_{ij} = 0$, если $j = i \pm 1$, за исключением b_{nn}, и все $b_{i,\,i-1} = -1$. Тогда, если все $b_{12}, b_{23}, \ldots, b_{n-1,n} - b_{nn}$ положительны, то все характеристические числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. И вообще число характеристических чисел с положительной вещественной частью совпадает с числом положительных членов в ряду $b_{nn}, b_{nn}b_{n-1,n}, b_{nn}b_{n-1,n}b_{n-2,n-1}, \ldots\ldots, b_{nn}b_{n-1,n}b_{23}b_{12}$. Ф. Р. Гантмахер

4491. Траектории, стремящиеся к критической точке в трехмерном пространстве. Гомори (Trajectories tending to a critical point in 3-space. Gomory Ralf E.), Ann. Math., 1955, 61, № 1, 140—153 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$dv/dt = F(v) = \sum_{s=m}^{\infty} F_s(v), \qquad (1)$$

где $F(v)$ — вещественная аналитическая вектор-функция вещественного вектора $v = v(x, y, z)$ трехмерного пространства и $F_s(v)$ — вектор, компоненты которого — однородные функции степени s в x, y, z, причем точка $P(0, 0, 0)$ является критической, т. е. $F(0) = F_0(0) = 0$.

Если обозначить решение уравнения (1) $v(t) = \sigma(t)u(t)$, где $u(t)$ — единичный вектор и $\sigma(t)$ — норма вектора, то предельным направлением векторов $v(t)$ при движении по траектории, стремящейся к P, называется точка u_0 на сфере D единичного радиуса с центром в P, для которой существует такая последовательность $\{t_n\} \to \infty$, что $\sigma(t_n) \to 0$ и $u(t_n) \to u_0$. На сфере D конец вектора $u(t)$, соответствующего $v(t)$, описывает кривую, которая может быть самопересекающейся. Множества предельных направлений $L(v)$ для траекторий $v(t)$ являются предельными множествами для движений, получающихся на сфере. Изучаются множества $L(v)$.

Внутренность сферы отображается во внешность по формуле $v' = (1+\sigma)v \cdot \sigma^{-1}$, при этом векторы v и v' имеют одинаковые единичные u и u' и при $\sigma \to 0$ вектор v' стремится к поверхности D извне при $t \to \infty$. Если обозначить $L(v')$ предельное множество точек u_0' на сфере D, к которым стремятся точки отображенной траектории $v'(t)$ ($\lim_{t_n\to\infty} v'(t_n) = u_0'$), то $L(v') = L(v)$.

Для отображенных траекторий получается система уравнений

$$d\sigma'/dt = \sum_{s=m}^{\infty} (\sigma'-1)^s (u', F_s(u')),$$

$$du'/dt = \sum_{s=m}^{\infty} (\sigma'-1)^s \{F_s(u') - (u', F_s(u'))u'\}.$$

или эквивалентная ей в отношении предельных точек на сфере D система

$$d\sigma'/dt = \sum_{s=m}^{\infty} (\sigma'-1)^{s-m+1} (u', F_s(u')),$$

$$du'/dt = \sum_{s=m}^{\infty} (\sigma'-1)^{s-m} \{F_s(u') - (u', F_s(u'))u'\},$$

здесь $\sigma'(t)$ — норма и $u'(t)$ — единичный вектор для

$v'(t)$. При $\sigma'=1$ из последней системы получается система

$$du'/dt = F_m(u') - (u', F_m(u'))u', \qquad (2)$$

основываясь на которой, автор производит исследование структуры множеств $L(v)$ в случаях: а) когда система (2) имеет только изолированные критические точки, б) кривую критических точек, в) когда сфера сплошь заполнена критическими точками.

Основные результаты исследования следующие:

В случае а) $L(v')$ может быть просто критической точкой (2) или единственной замкнутой кривой — решением (2), или кривой, состоящей из кусков, являющихся траекториями (2), примыкающими к критическим устойчиво-неустойчивым точкам, причем к каждой особой точке примыкает устойчивая и неустойчивая траектория графика.

В случае б) эти результаты сохраняются, только роль уравнения (2) играет другое уравнение, получающееся из (2) сокращением правой части на общий множитель компонентов, дающего кривую критических точек.

В случае в) $L(v')$ является или точкой, или связным множеством, на котором $F_m(v')=0$; направления, соответствующие $F_m(u')\neq 0$, характерны тем, что они являются асимптотическими направлениями, к которым стремятся траектории системы (1) при приближении к P.

М. И. Минкевич

4492. **О структуре множества, порождаемого неасимптотическими интегралами дифференциальных уравнений. Важевский Т.,** Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1955, 3, № 3, 145—150

О структуре множества, порождаемого неасимптотическими интегралами дифференциальных уравнений. Важевский (Sur la structure de l'ensemble engendré par les intégrales non asymptotiques des équations différentielles. Ważewski T.), Bull. Acad. polon. sci. Cl., 1955, 3, № 3, 143—148 (франц.)

Устанавливаются условия гомеоморфизма некоторых семейств решений, заполняющих некоторые области, системы дифференциальных уравнений $dU/dt = F(t, U)$, где $U=(u_1,\ldots,u_n)\in F_n$, $F(t,U)=(f_1(t,U),\ldots,f_n(t,U))$, а также двух систем $dU_1/dt_1=F_1(t_1,U_1)$, $dU_2/dt_2=F_2(t_2,U_2)$. Сложность обозначений не дает возможности формулировать эти условия.

В. В. Немыцкий

4493. **О принципе усреднения в нелинейной механике. Красносельский М. А., Крейн С. Г.,** Успехи матем. наук, 1955, 10, № 3, 147—152

Пусть x — m-мерный вектор; $X(t,x,\lambda)$ — функция, принимающая значения в E^m и определенная при $0\leqslant t<T$, $x\in D$, $\lambda\in\Lambda$, где D — ограниченная область и Λ — некоторое множество значений параметра λ, имеющее λ_0 своей предельной точкой. Доказывается, что если для дифференциального уравнения

$$dx/dt = X(t,x,\lambda) \qquad (1)$$

выполнены условия: а) $X(t,x,\lambda)$ равномерно ограничена и непрерывна по x равномерно относительно x, t, λ; б) $X(t,x,\lambda)$ интегрально непрерывна по λ в точке λ_0, т. е. при всех $t\in[0,T]$ $\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_0^t X(\tau,x,\lambda)\,d\tau = \int_0^t X(\tau,x,\lambda_0)\,d\tau$; в) существует единственное решение $x(t,\lambda_0)$ уравнения (1), лежащее при $0\leqslant t\leqslant T$ в D и такое, что $x(0,\lambda_0)=x_0\in D$, то для каждого $\eta>0$ имеется окрестность $V(\eta_0)$ такая, что при $\lambda\in V(\eta_0)$ любое решение $x(t,\lambda)$ $(x(0,\lambda)=x_0)$ уравнения (1), определенное при $0\leqslant t\leqslant T$, удовлетворяет неравенству: $|x(t,\lambda)-x(t,\lambda_0)|<\eta$ при $0\leqslant t\leqslant T$.

Эта теорема является усилением результата И. И. Гихмана (Укр. матем. ж., 1952, 4, № 2, 215—219). Как следствие получается обобщение теоремы Н. Н. Боголюбова (Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, 1945) о принципе усреднения в нелинейной механике для случая конечного промежутка.

В. В. Немыцкий

4494. **К вычислению нелинейных колебательных и упорядоченных систем. Магнус** (Ein Beitrag zur Berechnung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungs-Systeme. Magnus K.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 9—10, 332—333 (нем.)

Рассматривается динамическая система, описываемая уравнениями

$$dx_i/dt = f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ (i=1,2,\ldots,n), \qquad (1)$$

для которых методом гармонического баланса Крылова—Боголюбова строится система

$$dx_i/dt = \sum_{\nu=1}^{n}(a_{i\nu}x_\nu + a^*_{i\nu}\,dx_\nu/dt)\quad (i=1,2,\ldots,n), \qquad (2)$$

где коэффициенты $a_{i\nu}$, $a^*_{i\nu}$ являются функциями амплитуды A. Для системы (2) отыскивается область устойчивости в пространстве коэффициентов $a_{i\nu}$, $a^*_{i\nu}$. Выводится критерий устойчивости периодического решения, обобщающий критерий Гурвица на нелинейные системы.

Ю. А. Митропольский

4495. **К вопросу об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений. Ляшенко Н. Я.,** Докл. АН СССР, 1955, 104, № 2, 177—179

Рассматривается система уравнений

$$dx/dt = A(t)x + \varphi(t) + f(t,x), \qquad (1)$$

где x, $\varphi(t)$, $f(t,x)$ — n-мерные векторы, $A(t)$ — n-мерная матрица, определенные при $-\infty<t<\infty$, причем $A(t)$ удовлетворяет требованиям теоремы 2 из предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 724) $|\varphi(t)|\leqslant B$, $|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant L|x-y|$ (L, B — постоянные).

Теорема 1. Если корни $p_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ характеристического уравнения $\mathrm{Det}\|pE-A(t)\|$ удовлетворяют неравенству $\mathrm{Re}\,p_i(t)\leqslant-\gamma$ при $-\infty<t<\infty$, где положительная постоянная γ удовлетворяет условию $L\leqslant\gamma(1-\sigma)^2/4K$ (σ — сколь угодно малая положительная постоянная, K — постоянная из цитированной выше теоремы 2), то система (1) имеет единственное решение, асимптотически устойчивое по Ляпунову. Приведено конспективное доказательство теоремы, из которого следует, что имеется в виду единственность решения, ограниченного при $-\infty<t<\infty$. Если матрица $A(t)$ и функции $\varphi(t)$, $f(t,x)$ являются непрерывными и почти периодическими (п. п.) по t ($f(x,t)$ — п. п. равномерно по x), то система имеет единственное п. п. решение, асимптотически устойчивое по Ляпунову, в частности п. п. система с малым параметром ε

$$dx/dt = A(t)x + \varphi(t) + \varepsilon f(t,x)$$

имеет единственное п. п. решение $x(t,\varepsilon)$, асимптотически устойчивое по Ляпунову, если $|\varepsilon|<\gamma(1-\sigma)/4KL$.

Н. Н. Красовский

4496. **Асимптотические свойства решений линейных дифференциальных уравнений. Хартман, Винтнер** (Asymptotic integrations of linear differential equations. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1955, 77, № 1, 45—86 (англ.)

Исследуется асимптотическое поведение решений системы d линейных дифференциальных уравнений

$$y'_{j1} = \lambda_j y_{j1} + \sum_{\alpha=1}^{g} \sum_{\beta=1}^{h_\alpha} g_{j1\alpha\beta}(t)\, y_{\alpha\beta},$$

$$y'_{jk} = \lambda_j y_{jk} + y_{j,k-1} + \sum_{\alpha=1}^{g} \sum_{\beta=1}^{h_\alpha} g_{jk\alpha\beta}(t)\, y_{\alpha\beta},$$

$$k = 2, 3, \ldots, h_j, \quad j = 1, 2, \ldots, g\ (h_1 + \cdots + h_g = d), \quad 0 \leqslant t < \infty, \qquad (1)$$

матрица коэффициентов которой представляет собой сумму постоянной жордановой матрицы и переменной матрицы, относительно каждого из элементов которой $g_{jk\alpha\beta}(t)$ предполагается, что он непрерывен при $0 \leqslant t < \infty$ и удовлетворяет условию

$$\text{l. u. b.}_{0 \leqslant V < \infty} \frac{1}{1+V} \int_U^{U+V} |g_{jk\alpha\beta}(t)|\, dt \to 0, \quad \text{когда} \quad U \to \infty.$$

Предполагается далее, что $\operatorname{Re}\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_g$. Если μ — одно из чисел $\operatorname{Re}\lambda_j$, то ему соответствуют такие p и q $(1 \leqslant p \leqslant q \leqslant g)$, что $\operatorname{Re}\lambda_j > \mu$ при $1 < j \leqslant p$, $\operatorname{Re}\lambda_j = \mu$ при $p \leqslant j \leqslant q$, $\operatorname{Re}\lambda_j < \mu$ при $q \leqslant j < g$.

Доказано, что при достаточно большом τ любому $t_0 \geqslant \tau$ и любой системе не равных одновременно нулю чисел y^0_{jk}, $k = 1, 2, \ldots, h_j$, $j = p, p+1, \ldots, q$, можно поставить в соответствие и притом единственным образом такую систему чисел y^0_{jk}, $k = 1, 2, \ldots, h_j$, $j = q+1, q+2, \ldots, g$, чтобы решение системы (1), соответствующее начальным условиям $y_{jk}(t_0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, h_j$, $j = 1, \ldots, p-1$, $y_{jk}(t_0) = y^0_{jk}$, $k = 1, 2, \ldots, h_j$, $j = p, p+1, \ldots, g$, удовлетворяло при $t \to \infty$ предельным соотношениям

$$\sum_{k=1}^{h_j} |y_{jk}(t)|^2 = o\left(\sum_{j=p+1}^{g+p} \sum_{k=1}^{h_j} |y_{jk}(t)|^2\right) j = 1, \ldots, p-1, \quad q+1, \ldots, g,$$

$$\log\left(\sum_{j=1}^{g} \sum_{k=1}^{h_j} |y_{jk}(t)|^2\right)^{1/2} = (\mu + o(1))\, t.$$

Пусть далее γ и $\varkappa$ — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $p \leqslant \gamma \leqslant q$, $1 \leqslant \varkappa \leqslant h_\gamma$. Доказано, что если функции $g_{jk\alpha\beta}(t)$ удовлетворяют условиям

$$\int^{\infty} |g_{jk\alpha\beta}(t)|\, t^{\delta_{\alpha\beta} - \delta_{jk} + (\delta_j + \delta_\alpha - 1)(h_0 - h_\gamma)}\, dt < \infty,$$

где $\delta_{jk} = k$ при $p \leqslant j \leqslant q$, $\delta_{jk} = 1$ при $j < p$ и $j > q$, $\delta_j = 0$ при $j \neq \gamma$, $\delta_\gamma = 1$ и $h_0 \geqslant \max_{p \leqslant j \leqslant q} h_j$, то система (1) имеет решение, обладающее при $t \to \infty$ асимптотическими свойствами:

$$y_{\gamma k}(t) = o\left(e^{\mu t}\, t^{k-b}\right) \text{ при } 1 \leqslant k < \varkappa,$$

$$y_{\gamma k}(t) = e^{\lambda_\gamma t}\, t^{k-\varkappa}/(k-\varkappa)! + o\left(e^{\mu t}\, t^{k-b}\right) \text{ при } \varkappa \leqslant k \leqslant h_\gamma,$$

$$y_{jk}(t) = o\left(e^{\mu t}\, t^{k-b}\right) \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant h_j, \quad p \leqslant j \leqslant q, \quad j \neq \gamma,$$

$$y_{jk}(t) = o\left(e^{\mu t}\, t^{1-b}\right) \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant h_j, \quad j < p \text{ и } j > q,$$

где $b = h_0 - h_\gamma + \varkappa$.

Указаны некоторые обобщения сформулированных выше основных результатов, а также ряд приложений основных теорем. Рассмотрен, в частности, вопрос об асимптотическом поведении решений линейного дифференциального уравнения второго порядка, которое заменяется эквивалентной системой двух уравнений первого порядка, после чего применяются теоремы, установленные ранее для систем дифференциальных уравнений. И. М. Рапопорт

4497. Непрерывные матрицы и устойчивость дифференциальных систем. Маркус (Continuous matrices and the stability of differential systems. Markus Lawrence), Math. Z., 1955, 62, № 3, 310—319 (англ.)

Пусть M_n — множество всех $n \times n$ — комплексных матриц $A(t)$, непрерывных и ограниченных при $0 \leqslant t < \infty$. По определению кинематического подобия $A \sim B$ $(A, B \in M_n)$, если существует такое $P(t)$, что P, P^{-1} и $\dot{P} = dP/dt \in M_n$ и $\dot{P} = AP - PB$. Тогда система дифференциальных уравнений $dx/dt = Ax$ «преобразованием Ляпунова» $x = Py$ переходит в систему $dy/dt = By$.

Согласно обобщенному определению Перрона характеристических показателей Ляпунова полагается: $\lambda = \limsup t^{-1} \ln |x(t)|$, где $|x(t)| = \max(|x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|)$. Для решения с показателем λ вводится понятие типа ν: $\nu = \limsup \ln |x(t)\, e^{-\lambda t}| / \ln t$. Если в частном случае $x(t) = (p_0 t^\nu + \ldots + p_\nu)\, e^{\lambda t}$ (например, при $A = \text{const}$), то здесь λ — характеристический показатель, а ν — тип.

Для $A \in M_n$ выписывается полная система характеристических показателей $\lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_k$, а для каждого λ_i — соответственно типы $\nu_{i1} < \nu_{i2} < \ldots < \nu_{iq_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$. Определяются кратности $m(\lambda_i)$ и $m(\nu_{ij})$: если $E(\lambda_i)$ — совокупность решений с характеристическими показателями $\lambda \leqslant \lambda_i$, $E(\lambda_i)/E(\lambda_{i-1})$ — фактор-система, $T(\lambda_i, \nu_{ij})$ — подпространство в $E(\lambda_i)/E(\lambda_{i-1})$, содержащее все решения с типами

$$\nu \leqslant \nu_{ij}, \text{ то } m(\lambda_i) = \dim(E(\lambda_i)/E(\lambda_{i-1})),$$

$$m(\nu_{ij}) = \dim(T(\lambda_i, \nu_{ij})/T(\lambda_i, \nu_{i,j-1})).$$

Устанавливается (теорема I), что λ_i, ν_{ij} и их кратности $m(\lambda_i)$ и $m(\nu_{ij})$ суть инварианты при кинематическом подобии. На основе этого в теоремах 2 и 3 доказывается хорошо известное предположение: При постоянных A и B для кинематического подобия $A \sim B$ необходимо и достаточно, чтобы элементарные делители A и B совпадали или отличались лишь мнимыми частями соответствующих характеристических чисел. (Еругин Н. П., «Приводимые системы», Л.—М., Изд-во АН СССР, 1946, 9—15 и книгу референта «Теория матриц», М., Гос. издат., 1953, 378—380).

Далее исследуются частные случаи: 1) при любом t матрицы $A(t)$ и $\int_0^t A(s)\, ds$ перестановочны, 2) при любом фиксированном t $A(t)$ — нормальная матрица $(AA^* = A^*A)$. В последнем случае устанавливаются оценки

$$\limsup t^{-1} \int_0^t m(s)\, ds \leqslant \lambda_i \leqslant \limsup t^{-1} \int_0^t M(s)\, ds,$$

где $M(t)$ и $m(t)$ — наибольшая и наименьшая из действительных частей характеристических чисел нормальной матрицы $A(t)$. Ф. Р. Гантмахер

4498. Об устойчивости по первому приближению. Красовский Н. Н., Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 5, 516—530

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (1)$$

где функции X_i определены в области $|x_i| < H$, $0 < t < \infty$, непрерывны по t, x_i и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по x_i. Предполагается, что $X_i(0, \ldots, 0, t) = 0$ при $t \geqslant 0$. Пусть существуют постоянные $\alpha > 0$, $B > 0$ такие, что для любой точки p по крайней мере на одной из полутраекторий, проходящих через p, выполняется неравенство

$$\ln r(p, t_0, t) \geqslant \ln Br(p) + \alpha |t - t_0|, \ldots, \quad (2)$$

где через $r(p)$ обозначена длина радиуса-вектора точки p, а через $r(p, t_0, t)$ — длина радиуса-вектора соответствующей точки на траектории. Доказано, что для существования в окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$ функции $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ класса C^1, удовлетворяющей условиям

$$|v| \leqslant c_1 r^A, \; dv/dt \geqslant c_2 r^A, \; |\partial v/\partial x_i| < c_3 r^{A-1} \ldots \quad (3)$$

(A, c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные, $r = (x_1^2 + \ldots + x_n)^{1/2}$), необходимо и достаточно выполнение условий (2). Если невозмущенное движение асимптотически устойчиво и выполняется условие (2), то существует функция v, удовлетворяющая условиям теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости, причем выполняются оценки (3). В случае неустойчивости формулируется аналогичная теорема о существовании функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям второй теоремы Ляпунова о неустойчивости, причем для этой функции выполняются оценки (3). В качестве дополнительного требования к условию (2) здесь предполагается, что существует число t_0 и последовательность точек $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots \to 0$ таких, что условие (2) выполняется для положительных полутраекторий, выходящих из точек p_k, т. е.

$$r(p_k, t_0, t) \geqslant Br(p_k)\, e^{\alpha(t-t_0)} \text{ при } t \geqslant t_0 \ldots \quad (4)$$

Автор показывает, что существует $a > 0$ такое, что при добавлении к правым частям системы (1) функций $R_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющих условиям $|R_i| < ar$, характер поведения траекторий (асимптотическая устойчивость, определяемая условиями (2) и (4)) не нарушается. В частности, устанавливается, что характер поведения траекторий (в указанном выше смысле) не нарушается при переходе к близким системам разностных уравнений или при появлении в системе малых запаздываний.

Далее рассматриваются системы вида:

$$dx_i/dt = \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_n=m \\ j_1=1,\ldots,j_n=1}} P_{i,\, j_1,\ldots,\, j_n}\, x_1^{j_1}, \ldots, x_n^{j_n}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \quad (5)$$

Сначала предполагается, что $P_{i, j_1, \ldots, j_n}$ — постоянные. Показано, что если нет решений системы (5), отличных от тривиального и ограниченных при $-\infty < t < \infty$, то характер поведения траекторий (асимптотическая устойчивость, или неустойчивость, при отсутствии ограниченных при $-\infty < t < \infty$ решений) сохраняется при добавлении к правым частям системы (5) функций $R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющих оценкам

$$|R_i| < a\left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right)^m, \quad (6)$$

где a — достаточно малая положительная постоянная. Случай асимптотической устойчивости был рассмотрен ранее И. Г. Малкиным.

Е. А. Барбашин

4499. Устойчивость решений систем уравнений в полных дифференциалах. Егоров В. Г., Докл. АН СССР, 1955, 102, № 4, 677—680

Рассматривается система уравнений ($s = 1, 2, \ldots, n$)

$$dx_s = P_s(u, x_1, \ldots, x_n)\, du + Q_s(v, x_1, \ldots, x_n)\, dv, \quad (1)$$

где функции P_s, Q_s определены и непрерывны вместе с $\partial P_s/\partial x_i$, $\partial Q_s/\partial x_i$ в некоторой области H: $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $|x_s| \leqslant h$, и удовлетворяют в H условиям полной интегрируемости ($s = 1, 2, \ldots, n$)

$$\frac{\partial P_s}{\partial x_1} Q_1 + \ldots + \frac{\partial P_s}{\partial x_n} Q_n = \frac{\partial Q_s}{\partial x_1} P_1 + \ldots + \frac{\partial Q_s}{\partial x_n} P_n. \quad (2)$$

В предположении, что все $P_s(u, 0, \ldots, 0) = Q_s(v, 0, \ldots, 0) = 0$, вводятся определения:

1. Нулевое решение системы (1) называется устойчивым, если для всякого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно указать число δ такое, что для всякого решения $x_1(u, v), \ldots, x_n(u, v)$ системы (1), начальные значения которого $x_1^0, \ldots, x_n^0$ в точке (u_0, v_0) удовлетворяют неравенствам $|x_s^0| < \delta$, выполняются неравенства $|x_s(u, v)| < \varepsilon$ для всех $u \geqslant u_0$, $v \geqslant v_0$.

2. Устойчивое нулевое решение системы (1) называется асимптотически устойчивым, если $x_s(u, v) \to 0$, когда u и v пробегают любые монотонные расходящиеся последовательности, принадлежащие области H.

Доказаны теоремы:

1. Если нулевые решения систем ($s = 1, 2, \ldots, n$)

$$dx_s/du = P_s, \quad (3)$$

$$dx_s/dv = Q_s \quad (4)$$

устойчивы в смысле Ляпунова, то нулевое решение системы (1) устойчиво.

2. Если в предположениях теоремы 1 нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Из теорем 1 и 2 заменой $u = \int_0^t \alpha\, dt$, $v = \int_0^t \beta\, dt$ ($\alpha(t)$, $\beta(t)$ — любые положительные, непрерывные и ограниченные функции t, удовлетворяющие условиям $\int_0^\infty \beta\, dt \leqslant \leqslant \int_0^\infty \alpha\, dt = +\infty$, причем знак $<$ допускается лишь в случае теоремы 2, выводятся следствия соответственно об устойчивости и об асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова нулевого решения системы ($s = 1, 2, \ldots, n$)

$$dx_s/dt = \alpha P_s\left(\int_0^t \alpha\, dt, x_1, \ldots, x_n\right) + \beta Q_s\left(\int_0^t \beta dt, x_1, \ldots, x_n\right).$$

Теорема 2 и следствие из нее приводят к следующему признаку устойчивости по первому приближению:

Пусть $P_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n)$, $Q_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n)$ ($s = 1, \ldots, n$) — формы m-й степени ($m \geqslant 1$) переменных $x_1, \ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами, удовлетворяющие условиям (2). Пусть далее нулевое решение системы

$$dx_s/dt = P_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) \quad (5)$$

асимптотически устойчиво, а нулевое решение системы

$$dx_s/dt = Q_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (6)$$

устойчиво в смысле Ляпунова. Тогда нулевое решение системы

$$dx_s/dt = \alpha P_s^{(m)} + \beta Q_s^{(m)} + X_s(t, x_1, \ldots, x_n),$$

где α и β — произвольные положительные числа, асимптотически устойчиво при любом выборе функций X_s, если только постоянная L в неравенствах $|X_s| < L\left(\sum_1^n |x_i|\right)^m$ достаточно мала.

Показывается, что при $m = 1$ требование устойчивости нулевого решения системы (6) можно заменить требованием

$$\max \operatorname{Re}(\lambda^{(q)}) < -\alpha/\beta \max \operatorname{Re}(\lambda^{(p)}),$$

где $\lambda^{(p)}$, $\lambda^{(q)}$ — собственные значения матриц коэффициентов систем (5) и (6). А. Ф. Андреев

4500. Почти периодические решения некоторых нелинейных систем. Халанай (Soluţii aproape periodice ale unor sisteme nelineare. Halanay A.), Gaz. mat. şi. fiz., 1955, A7, № 8, 396—399 (рум.; рез. русс., франц.)

Согласно Фреше (Fréchet M., Rev. Scient., 1941, 790, 341—354), непрерывная функция $x(t)(t \geqslant t_0)$ называется асимптотической почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $t_1 = t_1(\varepsilon) \geqslant t_0$ и $L = L(\varepsilon) > 0$ такие, что каждый интервал длины L содержит τ, для которого $|x(t+\tau) - x(t)| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_1$ и $t + \tau \geqslant t_1$.

Теорема 1. Пусть система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(x, t), \qquad (1)$$

где $X(x, t+\omega) = X(x, t)$ — периодическая вектор-функция, имеет ограниченное решение $x = u(t)$ такое, что все решения $u(t + k\omega)$ (k — целое) устойчивы по Ляпунову равномерно относительно k. Тогда решение $u(t)$ асимптотическое почти периодическое (т. е. состоит из асимптотических почти периодических функций) и система (1) имеет почти периодическое решение.

Доказательство основано на изучении свойств группы преобразований $T^k u_0 = u(k\omega)$, где $u_0 = u(0)$; причем используются некоторые результаты *Цюй Фань* (Fan Ky, Math. Z., 1943, 685—711).

Теорема 2. Если полутраектория $f(p, I^+) = \{f(p, t), t \geqslant 0\}$ — динамической системы положительно устойчива по Лагранжу и равномерно устойчива по Ляпунову (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\rho(r, q) < \eta$ и $q \in f(p, I^+)$ имеем $\rho(f(r, t), f(q, t)) < \varepsilon$ для $t \geqslant 0$), то (p, I^+) асимптотическая почти периодическая. Этот результат аналогичен теореме Маркова (Math. Z., 1932, 36, 708—738). Отмечается, что теорема 2 может быть обобщена на случай однопараметрической полугруппы преобразований.

Б. П. Демидович

4501. Равномерно почти периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Оби (Uniformly almost periodic solutions of non-linear differential equations of the second order. I. General exposition. Obi Chike), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 4, 604—613 (англ.)

Рассматривается уравнение вида:

$$\ddot{x} + \chi(x) = k_1 f_1(x, \dot{x})\dot{x} + k_2 \chi(x) + \varepsilon g(x, \dot{x}, t), \qquad (1)$$

где ε и k_2 — малые величины; χ, f_1 и g — аналитические; $\operatorname{sgn} \chi(x) = \operatorname{sgn} x$ для всех x в области G, так что решение уравнения $\ddot{x} + \chi(x) = 0$ с начальными значениями $x_0 \geqslant \alpha$, $\dot{x}_0 = 0$, где $\alpha \neq 0$, при $t = 0$ является периодическим для всех $\alpha \neq 0$ в G; все значения рассматриваемого α являются значениями $\alpha \neq 0$ в G; $f_1 \geqslant 0$, но не тождественно нуль; g является равномерно почти периодической по t с $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, как совокупностью основных частот.

Для уравнения (1) устанавливаются теоремы существования равномерно почти периодических решений, которые могут быть непериодическими, даже если возмущающие члены в уравнении (1) являются периодическими. Показано также, что если возмущающий член нелинейного дифференциального уравнения второго порядка является непериодическим равномерно почти периодическим, то в общем случае его решения равномерно почти периодические. Ю. А. Митропольский

4502. Периодические решения дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Льюис (Periodic solutions of differential equations containing a parameter. Lewis D. C.), Duke Math. J., 1955, 22, № 1, 39—56 (англ.)

В части I работы рассматривается система

$$dx/dt = A(t)x + F(x, \mu, t), \qquad (1)$$

где x — n-мерный вектор; $A(t)$ — непрерывная периодическая матрица, с периодом 2π; μ — скалярный параметр; $F(x, \mu, t)$ — вектор, определенный и непрерывный при $\|x\| \leqslant r$, $|\mu| \leqslant \lambda$, $-\infty < t < +\infty$. Пусть каноническая фундаментальная матрица $X(t)$ ($X(0) = E$, E — единичная матрица) однородной системы $dX/dt = A(t)X$ такова, что $\det[X(2\pi) - E] \neq 0$; и сверх того существуют три неотрицательные скалярные функции $B(t)$, $\Phi(\zeta, \mu, t)$, $\Psi(\zeta, \mu, t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \zeta \leqslant r, |\mu| \leqslant \lambda)$, такие, что: I. $\lim_{\zeta \to 0,\, \mu \to 0} \Phi(\zeta, \mu, t) = 0$ равномерно по t, причем Φ монотонно возрастает вместе с ζ; II. B, Φ, Ψ — интегрируемы по t на $[0, 2\pi]$; III $\|F(x, \mu, t)\|^2 \leqslant \Phi(\|x\|, \mu, t)\|x\|^2 + B(t)\mu^2$; IV. $\|F(x, \mu, t) - F(x', \mu, t)\| \leqslant \Psi(\zeta, \mu, t)\|x - x'\|^2$ для $\|x\|, \|x'\| \leqslant \zeta$; V. $\lim_{\zeta \to 0,\, \mu \to 0} \Psi(\zeta, \mu, t) = 0$, равномерно относительно t. Условия I — V заведомо выполнены, если предположить, что $F(x, \mu, t)$ — имеет непрерывные частные производные по x и μ, причем $F(0, 0, t) \equiv 0$, $[F_{ix_j}(0, 0, t)] \equiv 0$. Обозначим через $G(t, s)$ матрицу Грина

$$G(t, s) = -X(t)\left\{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sign}(s - t)\right]E + [X(2\pi) - E]^{-1}\{X(s)\}^{-1}\right. \qquad (s \neq t)$$

и пусть $M = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \int_0^{2\pi} \|G(t, s)\|^2 ds$. Тогда для любых положительных чисел ρ и L ($\rho \leqslant r$, $L \leqslant \lambda$), удовлетворяющих неравенствам:

$$M\left[\zeta^2 \int_0^{2\pi} \Phi(\zeta, \mu, t)\, dt + \mu^2 \int_0^{2\pi} B(t)\, dt\right] \leqslant \rho^2 \qquad (2)$$

для $|\mu| \leqslant L$, $\zeta \leqslant \rho$ и

$$M \int_0^{2\pi} \Psi(\rho, \mu, t)\, dt \leqslant \theta^2 < 1 \qquad (3)$$

для $|\mu| \leqslant L$, существует при $|\mu| \leqslant L$ одно и только одно периодическое решение $x = x(t, \mu)$ системы (1), периода 2π, такое, что $\|x(t, \mu)\| \leqslant \rho$, причем $x(t, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных t и μ. Оценка для μ-интервала существования периодического решения, в некотором смысле, является наилучшей. Доказательство проводится методом последовательных приближений.

В части II дается модификация результатов I-й части на случай комплексных x и μ в предположении, что $F(x, \mu, t)$ непрерывна по совокупности переменных

x, μ, t, аналитична по переменным x, μ и имеет период 2π, относительно действительной переменной t. Оценка μ — интервала существования периодического решения в условиях Пуанкаре была дана Крумингом (РЖМат, 1954, 5573). Б. П. Демидович

4503. Периодические решения нелинейных систем дифференциальных уравнений. Хейл (Periodic solutions of non-linear systems of differential equations. Hale Jack K.), Riv. mat. Univ. Parma, 1954, 5, № 4—5, 281—311 (англ.)

Даются некоторые достаточные критерии существования периодических решений нелинейной системы дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{q}(\mathbf{x}, \varepsilon), \qquad (1)$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ и ε — малый параметр; при условии, что при $\varepsilon = 0$ система (1) имеет периодическое решение. Эта задача в различных предположениях решалась Линштедом, Ляпуновым, Пуанкаре и многими другими учеными.

Основная теорема: Пусть система (1) имеет вид

$$\ddot{x}_j + \sigma_j^2 x_j = \varepsilon q_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \varepsilon) \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad (2)$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — различные положительные числа такие, что $m\sigma_j + \sigma_k \neq 0$ ($j \neq k$, m—целое) и $q_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \varepsilon)$— аналитические функции по совокупности аргументов $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$, ε в области $|x_j| < a_0$, $|\dot{x}_j| < a_0$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ (a_0, ε_0 — постоянные), причем $q_j(\mathbf{x}, -\dot{\mathbf{x}}, \varepsilon) = q_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \varepsilon)$ (или $q_j(\mathbf{x}, -\dot{\mathbf{x}}, \varepsilon) = -q_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \varepsilon)$, $q_j(-\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \varepsilon) = -q_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \varepsilon)$), $j = 1, \ldots, n$. Тогда для достаточно малого ε_0 и каждого комплексного числа a ($|a| < a_0$) существует совокупность n периодических решений системы (2) вида

$$x_j = \delta_{jk}|a|\sigma_k^{-1}\sin(\tau t + \varphi) + \varepsilon W_j^{(k)}(\tau t + \varphi, \varepsilon)$$

($j = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, n$; δ_{jk} — символ Кронекера), где $W_j^{(k)}(\tau t + \varphi, \varepsilon)$ — аналитические функции от ε с периодическими коэффициентами, периода 2π относительно $\tau t + \varphi$; φ — произвольная постоянная; $\tau = \sigma_k + \sum_{h=1}^{\infty} b_h \varepsilon^h$ (b_h — постоянные, зависящие от σ_k и a).

Дается также аналогичная теорема для случая постоянной матрицы A, все характеристические числа которой отличны от нуля и имеют лишь неположительные вещественные части. Б. П. Демидович

4504. Семейство периодических решений систем, имеющих линейный относительный интегральный инвариант. Льюис (Families of periodic solutions of systems having relatively invariant line integrals. Lewis D. C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 181—185 (англ.)

На основании того факта, что существование интегрального инварианта $\int \sum_{i=1}^{n} A_i dx_i$ для системы $dx_i/dt = X_i(x_1, \ldots, x_n)$ возможно лишь в том случае, когда существует функция H, определяющая интеграл $H = h$, такая что $\sum_{j=1}^{n} (\partial A_i/\partial x_j - \partial A_j/\partial x_i) X_j = \partial H/\partial x_i$, получены равенства

$$\partial(h, T)/\partial(c_k, c_l) = 0, \; k, \; l = 1, 2, \ldots, m,$$

где $T(c_1, \ldots, c_m)$ — период решений, а c_k — постоянные. При этом предполагается, что $X_i \in C^1$, $A_i \in C^2$, $T \in C^1$. Рассмотрены различные возможные случаи реализации этих равенств ($T = \varphi(h)$, $h = \psi(T)$ и др.). Рассмотренные случаи показывают на возможность существования семейств периодических решений различных периодов, соответствующих одному и тому же значению постоянной энергии. Отдельные примеры подобных динамических систем были указаны и ранее. И. С. Аржаных

4505. Об асимптотическом решении линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Бреус (Про асимптотичний розв'язок лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Бреус К. А.). Доповіді АН УССР, 1955, № 5, 415—418 (укр.; рез. русс.)

Дано формальное разложение по степеням малого параметра $\varepsilon = \omega^{-1}$ решений векторно-матричного уравнения вида

$$d^2x/dt^2 + [A + \psi(\omega t)]x = 0,$$

где x — n-мерный вектор, A — постоянная симметричная матрица, ω — большой параметр, а $\psi(\omega t)$ — периодическая матрица. Вопрос о сходимости полученных формальных решений не рассматривается. Ю. А. Митропольский

4506. Сингулярные возмущения нелинейных систем дифференциальных уравнений и связанное с ними дифференциальное уравнение пограничного слоя. Левин, Левинсон (Singular perturbations of non-linear systems of differential equations and an associated boundary layer equation. Levin J. J., Levinson Norman), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 12, 247—270 (англ.)

Рассматривается вопрос о близости в промежутке $(a < t \leqslant b)$, при малых значениях $\varepsilon > 0$, решений двух систем дифференциальных уравнений:

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t, \varepsilon), \quad \varepsilon d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t, \varepsilon) \qquad (1)$$

и

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0), \; 0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0). \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{X}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{f}$ — n_0-мерные векторы, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{g}$ — n-мерные векторы. Автор ставит себе целью обобщить частично теорему А. Н. Тихонова (Матем. сб., 1950, 27 (69), № 1, 147—156) и фактически формулирует теорему референта (Докл. АН СССР, 1949, 65, № 6, 789—792), что и признает в «примечании при корректуре». Указанные теоремы были референтом и А. Н. Тихоновым обобщены (Матем. сб., 1952, 31 (73), № 3, 575—586, см. также РЖМат, 1955, 730; 1953, 732). В указанных работах дается следующий критерий: для того чтобы решения систем (1) и (2) в промежутке $(a < t \leqslant b)$ были при достаточно малом $\varepsilon > 0$ близки, достаточно (если соответствующие условия гладкости правых частей уравнений (1) выполнено), чтобы тривиальное решение системы

$$d\mathbf{u}/d\tau = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, 0) \qquad (3)$$

было устойчиво по Ляпунову. В системе (3) t и $\mathbf{x}$ — параметры, значения которых выбираются так, чтобы особые точки этой системы лежали в сколь угодно малой окрестности интегральной кривой $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ системы (2). Левин и Левинсон также рассматривают систему (3), но только при $t = a$ и, следовательно, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(a)$ и называют ее в этом случае «уравнением пограничного слоя» (теорема 4.1). Название это объясняется тем, что система (3) при $t = a$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(a)$ описывает поведение интегральной кривой системы (1) в тонком слое, граничащем с плоскостью $t = a$, т. е. при ее приближении к интегральной кривой системы (1).

Авторы рассматривают аналогичный вопрос также для системы

$$\left.\begin{aligned} dX/dt &= \mathbf{f}(X, Y_1, Y_2, t, \varepsilon), \\ \varepsilon dY_1/dt &= g_1(X, Y_1, Y_2, t, \varepsilon), \\ \varepsilon^{1+\alpha} dY_2/dt &= g_2(X, Y_1, Y_2, t, \varepsilon)\ (\alpha = \text{const} > 0) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

и дают критерий близости решений системы (4) с решением соответствующей вырожденной системы. Критерий этот — действительные части характеристических корней матриц g_{22} и $g_{11} - g_{12}g_{22}^{-1}g_{21}$ меньше $-\mu < 0$ — совпадает с критерием референта. Здесь $g_{ij} = \| \partial g_i / \partial y_j \|$; при $i \neq j$ g_{ij} — прямоугольная матрица. И. С. Градштейн

4507. К критериям устойчивости системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Лидский В. Б., Нейгауз М. Г., Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 5, 625—627

В системе k дифференциальных уравнений

$$y'' + [n^2E + Q(t)]\, y = 0 \quad (1)$$

y — вектор, E — единичная матрица, $Q(t+\pi) = Q(t)$ — симметрическая периодическая матрица с периодом π такая, что квадратичная форма $(Q(t)h, h) \geqslant 0$, либо $(Q(t)h, h) \leqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$ и

$$\int_0^{\pi} |\sin ns| \cdot |Q(s+t)|\, ds < 2n,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi. \quad (2)$$

Тогда все решения системы (1) ограничены при $t \to \infty$. Доказательство очень простое и основывается на теореме М. Г. Крейна о монотонном движении мультипликаторов на единичной окружности (Крейн М. Г., Докл. АН СССР, 1950, **73**, № 3, 445—448). Авторы утверждают, что условие (2) точное: замена $2n$ в (2) на $2n+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, делает утверждение неверным.

Сформулированный критерий выделяет функции из областей устойчивости $O_n^{(\mu)}$ (РЖМат, 1956, 2190), для которых n кратно k, а тип расположения мультипликаторов μ принимает два значения из 2^k возможных. В скалярном случае ($k = 1$) критерий выделяет функции из каждой области устойчивости.

З. А. Якубович

4508. О системах дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. Якубович В. А., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 6, 981—984

Обобщаются некоторые результаты автора о структуре областей неустойчивости для линейной канонической системы двух уравнений с периодическими коэффициентами на случай системы $2k$ уравнений. Устанавливается, что в случае канонической системы четырех и более уравнений ($k > 1$) множество сильно неустойчивых систем связно. Некоторым естественным образом автор разбивает это множество на счетное число открытых связных подмножеств (области неустойчивости), каждое из которых характеризуется одним из $2(2^k - 1)$ возможных типов расположения мультипликаторов матрицы монодромии на комплексной плоскости и одним целым числом $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, определенным образом связанным со свойствами решений соответствующей канонической системы. Утверждается, что если две системы с матрицами коэффициентов $H_1(t)$ и $H_2(t)$ ($H_2(t) \geqslant H_1(t)$) принадлежат одной и той же области неустойчивости, то этим свойством обладает и система с матрицей коэффициентов $H(t)$, удовлетворяющая неравенству $H_2(t) \geqslant H(t) \geqslant H_1(t)$. Кроме того, формулируется ряд результатов об устойчивости канонических систем. В работе используются результаты, развитые в статье И. М. Гельфанда и референта (РЖМат, 1956, 2190). В. Б. Лидский

4509. О возмущениях периодического решения, когда система в вариациях имеет нетривиальные периодические решения. Льюис (On the perturbation of a periodic solution when the variational system has non-trivial periodic solutions. Lewis D. C.), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, **4**, № 5, 795—815 (англ.)

Дается обобщение «метода малого параметра» Пуанкаре отыскания периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений для случая, когда уравнения в вариациях этой системы допускают одно или несколько линейно независимых нетривиальных периодических решений. В основном изучается нелинейная система

$$dx/dt = A(t, \mu)\, x + \mu h(t, \mu) + \sigma q(x, \mu, t) + p(x, \mu, t), \quad (1)$$

где $x = x(t)$ — n-мерный вектор; μ, σ — параметры; $A(t, \mu)$ — непрерывная действительная $n \times n$-матрица, периодическая по t с периодом 2π и аналитическая по μ при $|\mu| \leqslant \lambda$; h, q, p — вектор-функции, непрерывные и периодические по t с периодом 2π, класса $C^{(1)}$ относительно x и μ в области $|\mu| \leqslant \lambda$, $\|x\| \leqslant r$, $|t| < +\infty$ (r, λ — постоянные).

Доказывается, что если: а) h — удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} \Xi^*(s)\, h(s, 0)\, ds = 0, \quad (2)$$

где $\Xi^*(s)$ — $k \times n$-матрица ($k \leqslant n$), состоящая из полного семейства линейно независимых периодических решений сопряженной системы $d\xi/ds = -\xi A(s, 0)$; б) однородная система $dx/dt = A(t, \mu)\, x$ имеет нетривиальное, аналитическое по μ ($0 < |\mu| \leqslant \lambda$), матричное решение $X = X(t, \mu)$, для которого $\det [X(0, \mu) - X(2\pi, \mu)] \neq 0$ при $0 < |\mu| \leqslant \lambda$ и

$$[X(0, \mu) - X(2\pi, \mu)]^{-1} = \mu^{-1} M + N(\mu), \quad (3)$$

где M — постоянная $n \times n$-матрица и $N(\mu)$ — $n \times n$-матрица, аналитическая при $|\mu| \leqslant \lambda$; в) $q(y\mu, \mu, t) = \mu^2 Q(y, \mu, t)$, $p(y\mu, \mu, t) = \mu^3 P(y, \mu, t)$, где Q и P — вектор-функции класса $C^{(1)}$ относительно аргументов y, μ при $\|y\| \leqslant r\lambda^{-1}$, $|\mu| \leqslant \lambda$; то можно выбрать положительные числа L и γ такие, что при $|\mu| \leqslant L \leqslant \lambda$, $|\sigma| \leqslant \gamma$ существует единственное непрерывное периодическое решение $x = x(t, \mu, \sigma)$ системы (1), периода 2π по t, обращающееся в тривиальное при $\mu = 0$, причем $\|x(t, \mu, \sigma)\| \leqslant |\mu| r\lambda^{-1} \leqslant r$.

Даются неравенства для чисел L и γ в зависимости от некоторой «матрицы Грина» $G(t, s, \mu)$ (связанной с матрицей $A(t, \mu)$), постоянных r, λ и верхних граней норм функций $Q(y, t, \mu)$, $P(y, t, \mu)$ и их констант Липшица. Доказательство проводится методом интегральных уравнений и последовательных приближений.

Фиксируя надлежащим образом параметр σ при дополнительных ограничениях автор гарантирует существование периодического решения $x = x(t, \mu)$ системы (1) такого, что $\lim_{\mu \to 0} \mu^{-1} x(t, \mu) = z^0(t)$, где $z^0(t)$ — периодический вектор неоднородного уравнения в вариациях $dz^0/dt = A(t, 0)\, z^0 + h(t, 0)$.

Указывается на возможность применения полученных результатов для разыскания периодических решений автономных систем с параметром, близких к известному периодическому решению. Даются некоторые достаточные условия существования периодических решений систем типа Ван-дер-Поля. Б. П. Демидович

4510. О характере спектра линейных дифференциальных уравнений. Глазман И. М., Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1955, 5, 67—82

Подробно излагаются некоторые из опубликованных ранее результатов автора, полученных методом расщепления (Докл. АН СССР, 1951, 80, № 2, 153). Дифференциальная операция

$$l[y] = (-1)^n y^{(2n)} + q(x)\,y$$

$$(a < x < b,\ -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty;\ \int_\alpha^\beta |q(x)|\,dx < \infty$$

при $a < \alpha < \beta < b$)

порождает в пространстве $L_2(a, b)$ минимальный оператор L с конечным индексом дефекта. Известно, что все самосопряженные расширения $\tilde{L}$ такого оператора имеют одну и ту же непрерывную часть спектра. Этим задача сводится к изучению специально построенного самосопряженного расширения $\tilde{L}_0$. Для построения используется расщепление оператора в точке $\gamma \in (a, b)$. Многообразие D_L сужается дополнительным условием $y(\gamma) = y'(\gamma) = \ldots = y^{(2n-1)}(\gamma) = 0$. $\tilde{L}_0$ определяется как $\tilde{L}_1 \oplus \tilde{L}_2$, где L_1 и L_2 — операторы, порожденные аналогично L в пространствах $L_2(a, \gamma)$ и $L_2(\gamma, b)$. Разумный выбор точки γ позволяет оценить характер спектра $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$, а тем самым и $\tilde{L}$.

В частности, приводятся доказательства теорем:

1) Если $\lim_{x \to b} q(x) = +\infty$ и a — регулярный конец интервала, то спектр оператора $\tilde{L}$ дискретен (обобщение критерия Вейля—Титчмарша).

2) Если a — регулярный конец интервала, $b = \infty$, $\liminf_{x \to \infty} q(x) = \sigma > -\infty$, $\limsup_{x \to \infty} q(x) = \rho < +\infty$, то а) на полуоси $(-\infty, \sigma)$ спектр оператора $\tilde{L}$ дискретен (с единственной возможной предельной точкой $\lambda = \sigma$); б) любой интервал длины $\rho - \sigma$ полуоси $(\sigma, +\infty)$ содержит точки непрерывной части спектра оператора $\tilde{L}$.

Метод расщепления применим и к многомерным дифференциальным операциям, однако исследование усложняется тем, что операторы L_1 и L_2 имеют бесконечные индексы дефекта. Автор ограничивается подробной постановкой задачи и получением простейших выводов, отсылая за дальнейшими результатами к своей статье (Докл. АН СССР, 1952, 87, № 2, 171). Рассматривается операция вида $l[u] = -\Delta u + q(P)u$; максимальной областью определения служит класс «потенциальных» функций, т. е. функций, представимых в виде суммы гармонической функции и интегрального члена вида $\int (g(Q)/PQ)\,d\tau_Q$ (g непрерывна). Расщепление производится на гиперсфере $|OP| = \rho$. Изложенный метод иллюстрируется изучением характера энергетического спектра электрона в поле с центральной симметрией. Д. П. Желобенко

4511. О конечноразностных методах в нелинейных краевых задачах. Шрёдер (Über das Differenzenverfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben. Schröder Johann), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 9—10, 336 (нем.)

Приведено сообщение о докладе. Подробное изложение результатов появится в журнале Z. angew. Math. und Mech. В. В. Немыцкий

4512. Итерационный метод для решения проблемы собственных значений линейных дифференциальных и интегральных операторов. Ланцош (An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. Lanczos C.), Proc. Sympos. Spectral Theory and Differen. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 301—316 (англ.)

Предлагаемый метод представляет собой вариант широко известного метода Ритца — Галеркина.

Оператор A (самосопряженный) проектируется в некоторое n-мерное подпространство E_n и соответствующая задача решается для полученного конечномерного оператора A_n, а затем делается предельный переход при $n \to \infty$. При этом в качестве E_n берутся подпространства, натянутые на некоторый вектор b и векторы $Ab, A^2b, \ldots A^{n-1}b$. Собственные числа оператора A_n являются корнями многочлена $P_n(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_{n-1}x^{n-1} + x^n$, где коэффициенты $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ выбраны из условия минимальности вектора: $\gamma_0 b + \gamma_1 Ab + \ldots + \gamma_{n-1}A^{n-1}b + A^n b$.

Если положить $b_0 = b$; $b_{k+1} = Ab_k - a_k b_k - \beta_k b_{k-1}$, ($b_{-1} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$) и выбрать α_k, β_k из условия минимальности выражений $\| b_k \|$, то элементы b_k образуют ортогональный базис в E_n, в котором матрица оператора A_n оказывается якобиевой, что упрощает вычисления.

Таким образом можно найти только те собственные векторы оператора A, которые не ортогональны вектору b. В частности, при данном b заведомо нельзя найти все собственные векторы, если спектр оператора A не простой.

Таким же путем находится решение задачи $y - \lambda Ay \| f$. При этом полагается $b = f$.

Предельный переход не обосновывается и не указываются условия, при которых метод приголен. Ссылки в работе отсутствуют. Ю. Л. Далецкий

4513. О дифференциальных операторах и граничных условиях. Феллер (On differential operators and boundary conditions. Feller William), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 1, 203—216 (англ.)

Дифференциальный оператор

$$Af = ad^2f/dx^2 + b\,df/dx + cf,\ a > 0, \qquad (1)$$

в области непрерывных функций обладает очевидными свойствами: 1) он имеет локальный характер; 2) если $f(x_0) = 0$ и f в точке x_0 имеет локальный минимум, то $A\{f(x_0)\} \geqslant 0$.

Изучается класс операторов с этими двумя свойствами. Сначала к условиям 1) и 2) добавляется еще условие 3) функция (1) принадлежит области определения оператора A и $A1 \equiv 0$ (для дифференциальных операторов вида (1) это означает, что $c \equiv 0$).

Пусть Ω — оператор со свойствами 1) — 2) и областью определения $\Omega(f)$. Тогда x_0 называется точкой первого порядка для Ω, если или $\Omega\{f(x_0)\} = 0$ для всех $f \in \Omega(f)$, или для f, $g \in \Omega(f)$ и $\Omega\{g(x_0)\} \neq 0$

$$\frac{\Omega\{f(x_0)\}}{\Omega\{g(x_0)\}} = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))}{(g(x_0 + h) - g(x_0))}$$

Имеет место теорема: Пусть интервал I не имеет точек первого порядка для оператора Ω. Тогда на I существует монотонно-возрастающая непрерывная функция u и монотонно возрастающая (не обязательно непрерывная) функция v такие, что

$$\Omega\{f\} = D_v D_u f,$$

где $D_u f = \lim_{h \to 0} (f(x + h) - f(x))/(u(x + h) - u(x))$, и аналогично для D_v. Эта теорема дает возможность

по-новому трактовать ряд проблем. Например, граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнение теплопроводности $\partial w/\partial t = Aw$ в случае разрывных коэффициентов оператора A, проблемы диффузии и другие. Новый подход к дифференциальным операторам позволяет определить сопряженный оператор для оператора (1), не предполагая дифференцируемость коэффициентов. Работа тесно примыкает к исследованиям автора по теории случайных процессов (Ann. Math., 1952, 55, 468—519). Доказательства в работе не приводятся.

Б. М. Левитан

4514. Минимаксимальная теория для «сильно» демпфированных сетей. Даффин (A minimax theory for overdamped networks. Duffin R. J.), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, 4, № 2, 221—233 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений $A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0$, представляющих лагранжевы уравнения движения механической системы с n степенями свободы при наличии сопротивления (возможна также интерпретация на линейных электрических сетях). Здесь q — вектор конфигурации системы, A, B, C — вещественные симметрические матрицы коэффициентов трех неотрицательных квадратичных форм: кинетической энергии $a(q) = (Aq, q)$, диссипативной функции $b(q) = (Bq, q)$ и потенциальной энергии $c(q) = (Cq, q)$. Изучается случай, когда система «сильно» демпфирована, причем условие сильного демпфирования определяется неравенством $b^2(q) - 4a(q)c(q) > 0$ для любого $q \neq 0$.

Доказывается, что характеристическое уравнение $\det(x^2A + xB + C) = 0$ имеет (точно) степень $n + r$, где r — ранг матрицы A, и что все корни этого уравнения лежат на отрицательной вещественной оси $-\infty < x \leqslant 0$. Если обозначить меньшие r корней $h_1 \leqslant h_2 \leqslant \ldots \leqslant h_r$, а большие n корней $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n$, то всегда $h_r < k_1$. Корни k_i автор называет главными (primary) собственными значениями данной задачи, а корни h_i — собственными значениями второго порядка. Общее решение уравнения движения имеет вид $q = \sum_1^n \varepsilon_i u_i e^{k_i t} + \sum_1^r \delta_i w_i e^{h_i t}$, где ε_i, δ_i — произвольные постоянные скаляры, $(u_i)_1^n$ — линейно независимые векторы, называемые главными собственными векторами, $(w_i)_1^r$ — линейно независимые векторы, называемые собственными векторами второго порядка.

Обозначая $d(q) = (b^2(q) - 4a(q)c(q))^{1/2}$, автор вводит в рассмотрение два функционала: главный функционал $p(q) = -2c(q)/(b(q) + d(q))$ и функционал второго порядка $s(q) = -(b(q) + d(q))/2a(q)$ ($s(q)$ определен только для тех q, для которых $a(q) \neq 0$). Оказывается, что i-е главное собственное значение будет

$$k_i = \min_{\overline{Y} \subset M^{(i)}} \max_{q \in \overline{Y}} p(q) = \max_{\overline{Y} \subset M^{(n+1-i)}} \min_{q \in \overline{Y}} p(q) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\overline{Y}$ — какое-то i-мерное ($(n+1-i)$-мерное) — подпространство основного n-мерного пространства, а $M^{(i)}$ ($M^{(n+1-i)}$) — множество всех этих подпространств.

Аналогичные минимаксимальные выражения устанавливаются для собственных значений второго порядка h_i при помощи функционала $s(q)$. Из определения собственных значений k_i и h_i, как некоторых минимаксов, получается, что при наложении на систему $n - m$ независимых связей новые собственные значения k_i^* удовлетворяют неравенствам $k_i \leqslant k_i^* \leqslant k_{i+n-m}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) и аналогично для h_i^* (при этом [illegible] неравенств для h_i^* имеет место только тогда, когда A — неособенная). Кроме того, если наложить на систему большее сопротивление, т. е. если $b''(q) \geqslant b(q)$, где $b''(q)$ — новая диссипативная функция, то $k_i'' \geqslant k_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), $h_i'' \leqslant h_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$).

А. П. Шварцман

4515. Аппроксимация собственных значений и функций уравнения $d^2\varphi/dx^2 - [k^2 + l(l+1)x^{-2} - be^{-x}x^{-1}]\varphi = 0$ для s-, p- и d-состояний. Лаурикайнен, Эуранто (Approximate eigensolutions of $d^2\varphi/dx^2 - [k^2 + l(l+1)x^{-2} - be^{-x}x^{-1}]\varphi = 0$, for s-, p-, and d-states. Laurikainen K. V., Euranto E. K.), Turun yliopiston julkaisuja, 1953, A9, № 3, 1—35 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$d^2\varphi/dx^2 - [k^2 + l(l+1)x^{-2} - be^{-x}x^{-1}]\varphi = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0, \tag{2}$$

где k^2 — заданная неотрицательная постоянная, а l может принимать значения $0, 1, 2, \ldots$. Задача заключается в отыскании тех значений параметра b, при которых уравнение (1) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничным условиям (2). К этой краевой задаче приводит один из современных вопросов квантовой механики. В соответствии с методом Ритца ищется экстремум интеграла

$$I = \int_0^\infty [\varphi'^2 + (k^2 + l(l+1)x^{-2})\varphi^2]\,dx$$

при дополнительном условии $N = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\varphi^2 dx = \text{const} \neq 0$. Случай $l = 0$ рассматривался ранее Хюльтеном и Лаурикайненом (Hulthén L., Laurikainen K. V., Rev. Mod. Phys., 1951, 23, 1—9), в этом случае для аппроксимации собственных функций ими применялось выражение

$$\varphi = e^{-kx}(1 - e^{-x})\sum_{i=0}^n h_i e^{-ix}.$$

Рассмотрены случаи $l = 1$ и $l = 2$, собственные функции аппроксимируются выражениями

$$\varphi = e^{-kx}\left(k + \frac{1 - e^{-x}}{x}\right)(1 - e^{-x})^2 \sum_{i=0}^n h_i e^{-ix}$$

при $l = 1$,

$$\varphi = e^{-kx}[k^2 + 3k(1 - e^{-x})x^{-1} + 3x^{-2}(1 - e^{-x})^2](1 - e^{-x})^3 \sum_{i=0}^n h_i e^{-ix}$$

при $l = 2$ (в случае $l = 1$ приведены для сравнения и другие аппроксимации). Подстановка этих выражений в формулы для интегралов J и N приводит к квадратическим формам

$$I = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij}h_i h_j, \quad N = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n d_{ij}h_i h_j.$$

Выведены общие формулы для вычисления коэффициентов c_{ij} и d_{ij}. Приведены таблицы приближенных значений первого собственного числа, вычислявшегося как первый нуль определителя системы $\sum_{j=0}^n (c_{ij} - \lambda d_{ij})h_j = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, для $k = 0$; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 1,0; 3,0, $n = 1, 2, 3$ (в случае $l = 1$ некоторые

расчеты проведены и для второго собственного числа). В таблицах указаны также соответствующие значения коэффициентов h_l в приближенных формулах для собственных функций. Построены интерполяционные формулы, по которым можно производить расчеты для промежуточных значений k. Для собственных значений построены также асимптотические разложения (для больших k). Статья проиллюстрирована графиками собственных функций. И. М. Рапопорт

4516. Условие обрыва ряда для определения собственных значений. Румберг (Die Forderung des Reihenabbrechens zur Eigenwertbestimmung. Romberg Werner), Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1955, 28, № 13, 62—66 (нем.)

Для уравнения $\psi'' + (2\nu + 1 - x^2)\psi = 0$ решение, исчезающее на $+\infty$, должно иметь вид

$$\psi(x) = e^{-x^2/2}\left\{\frac{\Pi(\nu)}{\Pi\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cos\frac{\pi\nu}{2}\,f_{01}(x) + \frac{2\Pi(\nu)}{\Pi\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}\cos\frac{\pi(\nu-1)}{2}\,f_{02}(x)\right\},$$

где

$$f_{01}(x) = 1 + 2(-\nu)x^2/2! + 2^2(-\nu)(2-\nu)x^4/4! + \cdots,$$
$$f_{02}(x) = x + 2(1-\nu)x^3/3! + 2^2(1-\nu)(3-\nu)x^5/5! + \cdots$$

Если, кроме того, $\psi(x)$ равна нулю и на $-\infty$, то либо $\nu = 2n$ (собственное значение!) и ряд $f_{01}(x)$ обрывается, либо $\nu = 2n+1$ и ряд $f_{02}(x)$ обрывается.

М. К. Фаге

4517. Некоторые свойства определенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Мерве (Some properties of a certain linear second order differential equation. Merwe J. N. van der), Nieuw arch. wiskunde, 1955, 3, № 2, 65—71 (англ.)

Устанавливаются следующие теоремы о решениях уравнения $d^2y/dx^2 + [\lambda - q(x)]y = 0$:

1. Пусть $\lambda = u + iv$, $q(x) \geqslant \mu''(x)/\mu(x) - \sigma(x)$, где $\sigma(x) + u > 0$, $\mu(x) > 0$, $\mu'(x) < 0$, $x[\sigma(x) + u]\mu^2(x) + \mu(x)\mu'(x) \leqslant 0$ для достаточно малого x.

Тогда существует решение $\varphi(x)$, для которого

$$|\varphi(x)| \geqslant K\mu(x)\,e^{-\int_x^b t\sigma(t)dt}, \quad 0 < x < b,$$

где K — постоянная, зависимая от λ.

2. Пусть $|q| < \mu''(x)/\mu(x) + \sigma(x)$, $\mu(x) > 0$, $\mu'(x) < 0$ и $\int_x^a t\,|\sigma(t)|\,dt$ существует при $0 < x < a$.

Тогда для всех решений имеет место оценка $|y(x)| \leqslant K\mu(x)\,e^{\int_x^b t\sigma(t)dt}$, $0 < x < b$, и $y(x) = 0\{\mu(x)\}$, $x \to +0$.

Доказательство проводится непосредственными оценками.

Полученные оценки используются для установления критерия существования или несуществования решений из $L^2(0, a)$, если $q(x)$ может иметь особенность в точке $x = 0$, являющегося обобщением теорем Сирса (Sears D. B., J. London Math. Soc. 1949, Ser. 24, 207—215). А. Халанай

4518. Задачи о собственных значениях для линейных дифференциальных уравнений четного порядка с малым параметром при старшей производной. Мозер (Singular perturbation of eigenvalue problems for linear differential equations of even order. Moser Jürgen), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 2, 251—278 (англ.)

Изучается зависимость от малого параметра $\varepsilon > 0$ собственных функций краевой задачи

$$(P + \varepsilon Q)u = \lambda u, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} u^{(\alpha_r)} + \sum_{s=\alpha_r+1}^{2n-1} a_{rs}u^{(s)}(a) = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, n; \\ u^{(\beta_r)} + \sum_{s=\beta_r+1}^{2n-1} b_{rs}u^{(s)}(b) = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, n; \\ 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < 2n; \\ 0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < 2n, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где P, Q — линейные дифференциальные операторы с бесконечно дифференцируемыми на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ коэффициентами порядка $2m$ и $2n$ соответственно, причем $n > m$ (т. е. «возмущающий» оператор Q не ограничен по отношению к P). Относительно коэффициентов $p_{2m}(x)$ и $q_{2n}(x)$ при старших производных в P и Q предполагается, что $(-1)^n q_{2n} > 0$, $(-1)^m p_{2m} > 0$. К специальному виду (2) легко сводятся произвольные граничные условия вида

$$\sum_{s=0}^{2n-1} a_{rs}u^{(s)}(a) = 0;$$

$$\sum_{s=0}^{2n-1} b_{rs}u^{(s)}(b) = 0; \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Предельная к (1)—(2) задача о собственных значениях определяется уравнением $Pu = \lambda u$ и условиями (2) при $r = 1, 2, \ldots, m$ (отбрасываются последние $n-m$ условий).

Теорема 1. Если $\lambda = \lambda_0$ — простое собственное значение, принадлежащее предельной задаче, и

$$\alpha_r \not\equiv \alpha_s \pmod{2(n-m)}, \quad \beta_r \not\equiv \beta_s \pmod{2(n-m)} \tag{A}$$

при $r \neq s$; $r, s = m+1, \ldots, n$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ в окрестности $\lambda = \lambda_0$ существует единственное собственное значение задачи (1)—(2), $\lambda = \lambda(\varepsilon)$, причем

$$\lambda = \lambda_0 + \eta\lambda_1 + \ldots + \eta^\sigma\lambda_\sigma + \eta^{\sigma+1}\Lambda_\sigma(\eta),$$
$$|\Lambda_\sigma(\eta)| < c_\sigma. \tag{3}$$

Здесь $\eta = \varepsilon^{1/2(n-m)}$, c_σ не зависит от η. Асимптотическое представление (3) имеет место для всякого целого положительного σ. Для всякого σ и $0 < \delta < \frac{1}{2}(b-a)$ соответствующая собственная функция после надлежащей нормировки может быть представлена в виде

$$U(x, \eta) = U_0(x) + \eta U_1(x) + \ldots$$
$$\ldots + \eta^\sigma U_\sigma(x) + \eta^{\sigma+1}R_\sigma(x, \eta),$$

на отрезке $a + \delta \leqslant x \leqslant b - \delta$, причем $|\partial^l R_\sigma(x,\eta)/\partial x^l| \leqslant c_\sigma(\delta)$, $(l = 0, 1, \ldots, 2n-1)$, где $c_\sigma(\delta)$ не зависят от η. Функции $U_0; U_1, \ldots, U_\sigma$ бесконечно дифференцируемы по x.

Теорема 2. Пусть при условиях (2) оператор $P + \varepsilon Q$ является самосопряженным для всякого $\varepsilon > 0$, предельная задача имеет только простые собственные значения и выполнено условие (A) теоремы 1. Тогда каждое собственное значение задачи (1)—(2) при $\varepsilon \to 0$ стремится к соответствующему собственному значению предельной задачи.

Доказательство основной теоремы 1 опирается на асимптотическое представление общего решения уравнения (1) по методу Биркгофа—Лангера. Теорема 2 получается как следствие общих соображений о монотонной зависимости $\lambda_n(\varepsilon)$ от ε с учетом полуограниченности оператора $P+\varepsilon Q$. Библ. 20 назв. Л. А. Чудов

4519 К. Теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений. Меррей, Миллер (Existence theorems for ordinary differential equations. Murray Francis Joseph, Miller K., S., N. Y. univ. press, 1954, 154 p., 5 doll.), Cumul. Book Index, 1955, 58, № 1, 67 (англ).

4520 К. Математика для естествоиспытателей и инженеров. Т. 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Бауле (Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Bd. 4. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 5. Aufl. Baule Bernhard. Leipzig, Hirzel, 1955, 124 S., 5.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 22, 1192 (нем.)

4521 К. Дифференциальные уравнения (Учебник для вузов). Степанов (A differenciálegyenletek tankönyve. Egyetemi tankönyv. 2. kiad. Sztyepanov V. V. Ford. oroszból, Budapest, Tankönyvkiado, 1955, 410 l. 56, 50 Ft.), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 2, 54 (венг.)

4522 К. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Коддингтон, Левинсон (Theory of ordinary differential equations. Coddington Earl A., Levinson Norman. New York, London, McGraw-Hill, 1955, XIII, 429 p., ill., 64 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 289, 8 (англ.)

4523 Д. О нелинейных дифференциальных уравнениях в связи с химическими проблемами. Хун (Egy kémiai porblémával kapcsolatos nemlineáris differenciálegyenletröl. Huhn Péter, Kand. ertekezés tézisei. Tud. Minözitö Bizottsag, Budapest, 1954 (1955), 7l.), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 2, 52 (венг.)

4524 Д. Некоторые вопросы качественной теории линейных дифференциальных уравнений второго, третьего и четвертого порядков. Павлюк И. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Киевск. ун-т, Киев, 1955

4525 Д. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в линейных нормированных пространствах при малой вариации оператора. Узаков Г. Т. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казахск. ун-т, Алма-Ата, 1955.

4526 Д. Некоторые вопросы качественного исследования системы двух нелинейных дифференциальных уравнений. Маркосян С. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

4527 Д. О применении ограниченной проблемы трех тел переменной массы в космогонии. Филянская Е. П. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Одесск. ун-т, Одесса, 1955

4528 Д. Краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ешуков Л. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Уральский ун-т, Свердловск, 1955

4529 Д. О влиянии вырождения на собственные значения и собственные функции некоторых краевых задач, содержащих малые параметры. Гласко В. Б. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

4530. Распространение разрывов старших производных вдоль характеристик. Булах Б. М., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 2, 143—145

Для квазилинейного уравнения

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=d \qquad (1)$$

с достаточно гладкими коэффициентами рассматривается вопрос о распространении разрывов старших производных вдоль характеристики $\varphi(x, y)=0$ уравнения (1). Если через $\{f\}$ обозначить скачок функции f при переходе через характеристику, то $\{u_{xx}\}=\varkappa\varphi_x^2$, $\{u_{xy}\}=\varkappa\varphi_x\varphi_y$, $\{u_{yy}\}=\varkappa\varphi_y^2$, а $\varkappa$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка (уравнению Бернулли). А. Я. Лепин

4531. О задаче Фурье в бесконечной области. Кшижанский (O zagadhieniu Fouriera w warstwie nieograniczonej. Krzyżański Mirosław), Arch. mech. stosowanej, 1953, 5, № 4, 584—588 (польск.; рез. русс., франц.)

Рассматривается вопрос о единственности решения краевой задачи

$$\mathfrak{F}[u]\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant k;$$
$$-\infty<t<\infty, \qquad (1)$$
$$u(0,t)=\psi_1(t),\quad u(k,t)=\psi_2(t),\quad -\infty<t<\infty,$$

встречающейся в гидродинамике. Вообще говоря, единственности не будет (например, $a\equiv\psi_1\equiv\psi_2\equiv 0$, $u=\sin(\pi x/k)\exp(-\pi^2t/k^2)$. Однако если $a(x, t)$ не меняет знака, то в классе функций, для которых $|u|\leqslant M\exp(\lambda\sqrt{t^2+1})$, $\lambda<\pi^2/4k^2$, единственность будет.

Приводится без доказательства утверждение о сходимости решений краевых задач $\mathfrak{F}[u]=0$, $u(0, t)=\psi_1(t)$, $u(k, t)=\psi_2(t)$ $(0\leqslant x\leqslant k;\ -n\leqslant t<\infty)$ к решению краевой задачи (1) при $n\to\infty$ (Krzyżański M., Rend. Accad. Naz. Lincei, 1948, ser. 8, 4, № 4). Теорема о единственности переносится и на уравнение

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}=0,\ 0\leqslant x\leqslant k;\ -\infty<y,\ t<\infty.$$

На стр. 585, строка 11 снизу, вместо $\sin\mu(x+k)$ должно быть $\cos\mu(x-k)$. А. Д. Мышкис

4532. Расходящиеся интегралы и дифференциальные уравнения в частных производных. Бюро (Divergent integrals and partial differential equations. Bureau Florent J.), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 1, 143—202 (англ.)

Обзор применения в теории дифференциальных уравнений в частных производных расходящихся интегралов, которые, однако, имеют смысл, если их заменять на «конечные части» или «логарифмические части», т. е. понимать в смысле главного значения.

Рассматриваются применения расходящихся интегралов к решению задачи Коши для волнового уравнения, уравнений типа $u_{tt}-\Delta u-u=0$, $u_{tt}+kt^{-1}u_t=\Delta u$ ($k=\text{const}$) и дифференциальных уравнений 2-го порядка гиперболического типа с переменными коэффициентами. Кратко рассматриваются вопросы, связанные с уравнениями высших порядков, и применением интеграла Фурье в случае уравнения с постоянными коэффициентами. Для уравнений высших порядков эллиптического типа с постоянными коэффициентами построены фундаментальные решения при помощи разложения δ-функции на плоские волны. Библ. 109 назв. В. М. Бабич

4533. Оценки для линейных эллиптических систем первого порядка с двумя независимыми переменными. Беккерт (Abschätzungen bei linearen elliptischen

Systemen 1. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Beckert Herbert), Math. Nachr., 1955, 13, № 6, 327—342 (нем.)

Выводятся априорные оценки решений эллиптической системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x, y)\frac{\partial u_k}{\partial y} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(x, y)\, u_k + \varphi_i(x, y)$$

($i = 1, \ldots, n$), аналогичные известным оценкам Шаудера решений линейных эллиптических уравнений 2-го порядка (Schauder J., Studia math., 1934, 5, 34—42). Пусть в конечной области $\mathfrak{D}$ с достаточно правильной границей S коэффициенты a, b и свободные члены φ_i удовлетворяют (вплоть до границы) условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0, 1)$, а матрица (a_{ik}) имеет все характеристические числа мнимые и удовлетворяет еще некоторым требованиям, сформулированным в предыдущей работе автора (Math. Nachr., 1951, 5, 173—208), результаты которой здесь систематически применяются. Пусть далее в $\mathfrak{D} + S$ дано непрерывно дифференцируемое решение, производные 1-го порядка которого вдоль S удовлетворяют условию Гельдера с показателем α. Тогда максимум модуля производных решения и констант Гельдера (с тем же показателем) для них в $\mathfrak{D} + S$ не превосходит постоянной (зависящей от области $\mathfrak{D}$ и коэффициентов a, b), умноженной на сумму максимумов модулей решения, его производной вдоль S, функций φ_i и констант Гельдера для этих функций и производных решения вдоль S. При рассмотрении решения на любом компактном подмножестве $\mathfrak{D}$ в оценке отсутствуют граничные данные.

При выводе этого основного результата применяются оценки, аналогичные оценкам Ниренберга (РЖМат, 1954, 1662), которые здесь получены для решений почти линейных систем

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x, y)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x, y, u_1, \ldots, u_n) \quad (1)$$

($i = 1, \ldots, n$), если коэффициенты $a(x, y)$ и правые части $f(x, y, u)$ непрерывны и ограничены в $\mathfrak{D} + S$. В этом случае решения системы (1) удовлетворяют в $\mathfrak{D} + S$ условию Гельдера, показатель которого зависит от коэффициентов a_{ik} и функций f. Проводится также оценка констант Гельдера решения и его производных (в соответствующих дополнительных предположениях) в области $\mathfrak{D} + S$ и на компактных подмножествах $\mathfrak{D}$.

А. Д. Мышкис

4534. Простое доказательство принципа Дирихле. Цудзи (A simple proof of Dirichlet principle. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, № 1, 65—75 (англ.)

Если предположить разрешимость задачи Дирихле, то доказательство существования решения классических вариационных задач, связанных с интегралом Дирихле, может быть значительно упрощено. Автор показывает это на двух задачах: 1) задаче минимизации интеграла Дирихле по компактной римановой поверхности, граница которой состоит из конечного числа жордановых кривых, в классе кусочно-гладких функций, принимающих на границе заданные значения; 2) задаче минимизации интеграла Дирихле по замкнутой или открытой римановой поверхности в классе кусочно-гладких функций $w^*(z) = w(z) - S(z)$, где $S(z)$ — функция особенностей Вейля.

Н. С. Ландкоф

4535. Об уравнении с частными производными $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$. Сато (Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$,) Sato Tokui), Compositio math., 1954, 12, № 2, 157—177 (франц.)

Элементарными приемами исследуются свойства решений задачи Дирихле для уравнения

$$\Delta z = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y).$$

При определенных предположениях (монотонность f по некоторым переменным) доказываются теоремы о сравнении решений, из которых выводится большинство последующих теорем: единственность решения, непрерывная зависимость от параметра, теорема Гарнака. Для доказательства существования решения используется метод последовательных приближений; при этом в области предполагается существование функции Грина для уравнения Лапласа. Так как условия теорем единственности и существования не совпадают, то рассматривается вопрос о наименьшем и наибольшем решении.

А. Я. Ленин

4536. Решение задачи Дирихле в пространстве методом экстремальных точек. Гурский (Méthode des points extrémaux de résolution du problème de Dirichlet dans l'espace. Górski J.), Ann. polon. math., 1955, 1, № 2, 418—429 (франц.)

Пусть D—трехмерная область, содержащая внутри бесконечно удаленную точку, F — граница D, которая является множеством положительного трансфинитного диаметра в смысле Пойа и Сегё (Pólya G., Szegö G., J. Crelle, 1931, 165, 4—49), $f(Q)$ — непрерывная функция точки Q, определенная на F, $d(F)$ — трансфинитный диаметр множества F, $\lambda > 0$ — вещественный параметр, $\mu_\lambda^*(\Delta_Q)$, $\overline{\mu}_\lambda^*(\Delta_Q)$ — вполне аддитивные функции B-множеств, представляющие собой специальным образом определенные распределения единичной массы на F, F_λ — множество всех тех точек F, каждая окрестность которых содержит ненулевую массу, D_λ — область, содержащая бесконечно удаленную точку и имеющая своей границей F_λ, $\rho(P, Q)$ — расстояние между точками P, Q.

Доказано, что если F_0 — замкнутое множество, обладающее свойствами: а) $F_0 \subset F$, б) $d(F_0) = d(F)$, в) для всякой сферы K с центром на F_0 $d(F_0 K) > 0$, то $\rho(z_0, F_\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ для каждой точки $z_0 \in F_0$. Функция

$$\omega_\lambda(P) = \frac{1}{\lambda}\int_F \frac{d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)}{\rho(P, Q)} - \frac{1}{\lambda}\int_F \frac{d\overline{\mu}_\lambda^*(\Delta_Q)}{\rho(P, Q)}$$

представляет решение обобщенной задачи Дирихле для области D_λ, принимающее значение нуль в бесконечно удаленной точке и значение $f(Q)$ всюду на F_λ, за исключением, может быть, множества нулевого трансфинитного диаметра.

Аналогичные результаты получены иными методами М. В. Келдышем (Успехи матем. наук, 1940, 8, 171—231).

В. Е. Шаманский

4537. Базисное множество однородных гармонических полиномов от k переменных. Майлс, Вильямс (A basic set of homogeneous harmonic polynomials in k variables. Miles E. P., Williams Ernest), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 191—194 (англ.)

При фиксированных k и n ($k, n = 0, 1, \ldots$) строится система многочленов

$$\sum \frac{(-1)^{[a_1/2]} n!\, [a_1/2]!}{\prod_{j=1}^{k} a_j!\, \prod_{j=2}^{k} ((b_j - a_j)/2)!} \prod_{j=1}^{k} x_j^{a_j}, \quad (1)$$

где (b_j) — множество неотрицательных целых чисел,

для которых $b_1 \leqslant 1$, $\Sigma_{j=1}^{k} b_j = n$, а суммирование в (1) распространяется на всевозможные (a_j), удовлетворяющие условиям: 1) $a_j \equiv b_j \bmod 2$, $j = 1, \ldots, k$; 2) $\Sigma_{j=1}^{k} a_j = n$; 3) $a_j \leqslant b_j$, $j = 2, \ldots, k$.

Доказывается, что система (1) составляет базис в классе однородных гармонических полиномов порядка n от k переменных. Аналогичные решения выписаны также для уравнений

$$\sum_{j=2}^{k} \partial^2 u / \partial x_j^2 = \partial^2 u / \partial x_1^2,$$

$$\sum_{j=1}^{k} \partial^s u / \partial x_j^s = 0 \quad (s = 3, 4, \ldots).$$

Имеются опечатки. М. Б. Гагуа

4538. **Теоремы о среднем значении и линейные операторы. Хартман, Винтнер** (Mean value theorems and linear operators. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 4, 217—222 (англ.)

Устанавливается простое предложение, обобщающее формулу конечных приращений и позволяющее единым способом установить, а в некоторых случаях и несколько усилить ряд известных теорем о среднем значении для дифференциальных уравнений (Blaschke W., Jahresber. Deutschen Math. Verein., 1918, 27, 157—160; Pólya G., C. r. Acad. sci., 1934, 199, 655 и др.). Пусть S — топологическое пространство точек x, D $(\overline{D} = S)$ и E — его подмножества, $\mathfrak{M}$ — некоторое линейное многообразие непрерывных комплекснозначных функций на S, $\mathfrak{N}$ — его фиксированное линейное подмножество. Предположим, что на $\mathfrak{M}$ определен аддитивный и однородный оператор L, значениями которого служат функции точки из D, обладающий следующими свойствами: 1) существует решение $U_0 \in \mathfrak{N}$ уравнения $(LU_0)(x) = 1$ $(x \in D)$; 2) если $u \in \mathfrak{N}$ и $(Lu)(x) \neq 0$ на D, то $u(x) \neq 0$ на E. Пусть $u \in \mathfrak{M}$ такова, что существует решение уравнения $(LU)(x) = 0$ $(x \in D)$, где $U = u \in \mathfrak{N}$. Тогда каждому $x \in E$ отвечает по крайней мере одна точка $\vartheta_x \in D$ такая, что

$$u(x) = U(x) + U_0(x)(Lu)(\vartheta_x). \qquad (1)$$

Например, пусть $D = E$ — жорданова область в плоскости (ξ, η), S — ее замыкание, $\mathfrak{M}$ — совокупность всех непрерывных функций $u(\xi, \eta)$ на S, для которых существуют $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$, $\mathfrak{N}$ состоит из всех функций из $\mathfrak{M}$, аннулирующихся на границе S, $L = \partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2$. В этом случае формула (1) приводит к некоторому уточнению одной теоремы Полиа из цитированной работы.

Рассматриваются также некоторые вопросы, связанные с принципом максимума для оператора L.

Ю. М. Березанский

4539. **Об одной новой задаче математической физики. Соболев** (Despre o nouă problemă a fizicii matematice. Sobolev S. L.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.- fiz., 1955, 3а, 9, № 1, 5—55 (рум.)

Перевод с русского (Изв. АН СССР, сер. матем. 1954, 18, № 1, 3—50).

4540. **Применение способа последовательных приближений Пикара к интегрированию некоторых уравнений математической физики. Гаврилов А. Ф.**, Сб. тр. Ленингр. электротехн. ин-та связи, М., Связьиздат, 1955, 164—169

Метод последовательных приближений в форме Пикара применяется к некоторым классическим задачам математической физики.

4541. **Неравенства для собственных значений мембран и пластин. Пейн** (Inequalities for eigenvalues of membranes and plates. Payne L. E.), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, 4, № 3, 517—529 (англ.)

D — конечная плоская область, ограниченная гладким выпуклым контуром C; $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \ldots$ и $\mu_1 = 0 < \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n \ldots$ — собственные числа оператора Лапласа для области D, соответствующие краевым условиям $u|_C = 0$ и $\partial u/\partial\nu|_C = 0$. Доказываются неравенства

$$\mu_2 < \lambda_1 - \frac{2}{\rho_{\max} h_{\max}}; \quad \mu_3 < \lambda_1 - \frac{1}{\rho_{\max} h_{\max}};$$

$$\mu_{n+2} < \lambda_n, \quad n > 1.$$

Здесь ρ — радиус кривизны контура и $h(P)$ — расстояние от произвольно выбранного в D начала до касательной к C, проведенной через точку P (в тексте вместо $\rho_{\max} h_{\max}$ неосновательно написано $(\rho h)_{\max}$). Доказательство основано на том, что μ_i суть минимальные значения известного функционала; выбирая в качестве функций сравнения подходящие линейные комбинации собственных функций u_i, соответствующих собственным числам λ_i, и производных этих функций, автор приходит к желаемым неравенствам.

Доказывается также неравенство $\lambda_2 \leqslant \Lambda_1$, где Λ_1 — наименьшее собственное число уравнения $\Delta^2 w + \Lambda \Delta w = 0$ при краевых условиях $w|_C = \partial w/\partial\nu|_C = 0$; это неравенство было сформулировано Вайнштейном в качестве предположения (Weinstein A., Mém sci. math. 1937, 88).

Автор высказывает предположение, что $\Omega_n \geqslant \lambda_1 \lambda_{n+1}$, где Ω_n — n-е собственное число уравнения $\Delta^2 w - \Omega w = 0$ при краевых условиях $w|_C = \partial w/\partial\nu|_C = 0$. Для $n = 1, 2$ доказательство приводится. С. Г. Михлин

4542. **О случайных решениях некоторых уравнений в частных производных, связанных с задачами гидродинамики. Басс** (Sur les solutions aléatoires de certaines équations aux dérivées partielles liées à des problèmes d'hydrodynamique. Bass J.), J. math. pures et appl., 1954, 33, № 4, 295—327 (франц.)

Рассматривается общая задача об исследовании эволюций во времени статистических характеристик поля скоростей несжимаемой жидкости, движение которой описывается уравнениями Навье-Стокса. Поле скоростей предполагается случайным (турбулентность) и статистически однородным в пространстве. Автор ставит вопрос: существуют ли выражения, составленные из моментов, вообще говоря, любого порядка для распределения вероятностей скоростей в одной или нескольких фиксированных точках, изменение во времени которых однозначно определяется значениями тех же характеристик в начальный момент. На основе исследования упрощенной математической «модели турбулентности», предложенной Бюргерсом (Bürgers J. M., Proc. Acad. Sci., Amsterdam, 1950, 53, 247—260, 393—406, 718—731, 732—742), автор приходит к очевидному выводу об отрицательном ответе на поставленный вопрос. Отмечается возможность применения для решения общей задачи уравнений в функциональных производных, предложенных Хопфом (Hopf E., J. Rational Mech. and Analysis, 1952, 1, 87—123), однако конкретных результатов, полученных этим методом, нет. Значительное место уделено доказательству непрерывной зависимости решения уравнения Бюргерса

$$\partial u / \partial t = ku\, \partial u / \partial x + \mu \partial^2 u / \partial x^2$$

от параметра k в окрестности $k = 0$. А. М. Обухов

4543 Д. **Метод наискорейшего спуска для дифференциальных уравнений эллиптического типа. Цах Ласло.** Автореф. дисс. канд. матем. н., ЛГУ, Л., 1955

4544 Д. **Задача Коши для уравнений в частных производных с малыми параметрами при производных по времени. Панайоти Б. Н.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Азерб. ун-т, Ин-т физики и матем. АН АзербССР, Баку, 1955

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

4545. **К вопросу об исследовании областей орбитальной устойчивости. Томсон М. А.,** Вычисл. матем. и вычисл. техника, сб. 2, 1955, 151—208

Рассматривается вопрос об устойчивости в смысле Якоби, Жуковского и Моисеева решения системы уравнений

$$\ddot{x} = 2n\dot{y} + U'_x, \qquad \ddot{y} = -2n\dot{x} + U'_y,$$

где $n = \text{const}$, $U = 3x^2/2 + 1/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, которые определяют движение Луны в одном частном случае (Хилла). Для изоэнергетических траекторий этой системы имеет место следующее уравнение в вариациях:

$$d^2\delta f_*/d\sigma_*^2 = D_{*0}\delta f_*,$$

где $d\sigma_* = [2(U+h)]^{2k-1/2}ds$, $\delta f_* = [2(U+h)]^k \delta f$, h — постоянная энергии, s — длина дуги, δf — вариация по нормали к траектории, k — произвольное постоянное число, D_* — характеристика орбитальной устойчивости, являющаяся функцией от координат x, y, постоянной энергии h и угла Ф между направлением касательной к траектории и осью абсцисс. Знак величины D_* определяет орбитальную устойчивость (случай $D_* < 0$) или неустойчивость случай ($D_* > 0$) в смысле Якоби (при $k=0$), Н. Е. Жуковского (при $k = 1/2$) и Н. Д. Моисеева (при $k = 3/2$). Вопрос об устойчивости решается исследованием области знакоопределенности двух функций $D_1(x, y)$ и $D_2(x, y)$, из которых первая характеризует область знакоопределенности D независимо от угла Ф, а вторая определяет знак D. Исследуются эти функции аналитическими и численными методами. Области устойчивости и неустойчивости в смысле Якоби вследствие возникающих здесь трудностей элементарного характера исследованы автором без достаточной полноты.

В заключение исследуются противоречивые области, являющиеся одновременно областями устойчивости одного типа и областями неустойчивости другого типа. Пользуясь теоремой Штурма—Лиувилля, автор устанавливает, что если принять, что траектории, смежные с невозмущенной, определяются уравнением в вариациях совершенно строго, то никакая траектория не может быть равномерно погружена в противоречивую область. В. А. Мерман

4546. **Об одном случае исследования орбитальной устойчивости решений системы дифференциальных уравнений. Томсон М. А.,** Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1955, сб. 2, 209—229

Изучается вопрос о расположении кинетических фокусов системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + U'_x, \quad \ddot{y} = -2x + U'_y,$$

где $U = 3x^2/2 + 1/r$, определяющих движение Луны в теории Хилла.

Составляются уравнения в вариациях. k придаются значения 0 (характеристика Якоби), $1/2$ (характеристика Жуковского) и $3/2$ (характеристика Моисеева). Различные периодические траектории Хилла, для которых составлено это уравнение, зависят от произвольного параметра m. Автор вычисляет наибольшее M и наименьшее Λ значения D_x (по независимой переменной), для $m = 1/12{,}3682$ (случай Луны), $m = 1/10$, $1/9$, $1/8$, $1/7$, $1/6$, $1/5$, $1/4$ и $1/3$.

Затем, пользуясь теоремой Штурма-Лиувилля в случае определенной отрицательной характеристики D_x, по этим значениям он находит интервалы, в которых заключены корни как функции длины дуги, а затем и времени, для различных m и k. Принимая, что смежные траектории строго определяются уравнениями в вариациях, автор получает для каждого m три различных интервала (для $k = 0, 1/2$ и $3/2$), в которых должны заключаться искомые кинетические фокусы. Это дает возможность выбрать путем комбинации полученных пределов наиболее узкие интервалы, заключающие кинетические фокусы. Г. А. Мерман

4547. **Периодические решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с несимметричным нелинейным демпфированием и возмущающим членом. Гиллис** (The periodic solutions of a non-linear differential equation of the second order with unsymmetrical non-linear damping, and a forcing term. Gillies A. W.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, 8, № 1, 107—128 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{v} - (\varepsilon - \varepsilon^{1/2}kv - \varepsilon v^2)\dot{v} + v = 2B\omega_1 \sin \omega_1 t, \qquad (1)$$

где ε — малый параметр, k, B, ω_1 — постоянные, причем $B = O(\varepsilon)$, $\omega_1 - 1 = O(\varepsilon)$. Строятся и исследуются периодические решения уравнения (1). Такое решение ищется в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\, b^n, \qquad (2)$$

где $v_1(t) = 2\cos(\omega_1 t + \varphi)$. Показано, что $v_n(t) = O(\varepsilon^{1/2(n-1)})$ и что ряд (2) сходится при малых значениях ε. Кроме того, функции $v_n(t)$ оказываются периодическими периода $2\pi/\omega_1$, если амплитуда b и фаза φ удовлетворяют дополнительному условию.

Получены вариационные уравнения, определяющие b и φ для произвольного решения уравнения (1). Они позволяют изучить распределение особых точек в плоскости b, φ (т. е. значений амплитуды и фазы соответствующих периодическому решению) и устойчивость периодических решений. Исследуются также резонансные кривые, устанавливающие зависимость между b и $\omega_1 - 1$ по первому приближению. В статье обобщаются результаты, полученные ранее Картрайт (Cartwright M. L., Ann. Math. Studies, 1950, № 20, 149—241), для уравнения Ван-дер-Поля и обобщается применявшийся ею метод, опиравшийся, в свою очередь, на метод Крылова—Боголюбова. Г. Л. Мизернюк

4548. **Метод плоскости ускорения для анализа цепей с нелинейной индуктивностью и нелинейной емкостью. Гу** (Acceleration plane method for analysis of a circuit with nonlinear inductance and nonlinear capacitance. Ku Y. H.), Commun. and Electronics (N. Y.), 1955, № 16, 619—626 (англ.)

Графическим путем определяется переходный процесс в цепи с нелинейным сопротивлением, индуктивностью и емкостью, при помощи так называемого метода плоскости ускорения, развитого автором ранее (РЖМат, 1954, 3462). Имеется возможность решать этим методом нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$\varphi(\dot{x})\ddot{x} + f(\dot{x}, x) + f_1(x) = F(t).$$

Функции $\varphi(\dot{x})$, $f(\dot{x}, x)$ или $f_1(x)$ могут быть даны графически как экспериментальные данные. Функция внешней силы $F(t)$ может быть синусоидальной или любой другой функцией времени. Рассмотрены пять примеров, в которых $F(t)$ является постоянной или равна данной функции времени. В одном из примеров получено явление феррорезонанса. Указана также возможность применения того же метода к цепи с переменными во времени сопротивлением, индуктивностью и емкостью. Н. А. Бразма

4549. Вынужденные колебания с вязким затуханием и значительным трением скольжения. II. Рейссиг (Erzwungene Schwingungen mit zäher Dämpfung und starker Gleitreibung. II. Reissig Rolf), Math. Nachr., 1954, **12**, № 1—2, 119—128 (нем.)

Продолжение предыдущей работы (РЖМат, 1955, 3751). Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + g(x) + \mu \operatorname{sgn} \dot{x} + f(x) = \Phi(\Omega t), \qquad (1)$$

где $\Phi(\xi + 2\pi) = \Phi(\xi)$; $f(\xi)$ — непрерывная, строго возрастающая функция; $\xi f(\xi) > 0$, $\xi \neq 0$ и существует такое a, что $f(a) = {}^1/_2 (\max \Phi + \min \Phi)$; $g(\xi)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, $\xi g(\xi) > 0$, $\xi \neq 0$. Исследуется поведение интегральных кривых уравнения (1) при $t \to \infty$, выясняется влияние $\mu \operatorname{sgn} \dot{x}$ (кулоново трение) на положение равновесия и другие вопросы. Ю. А. Митропольский

4550. Вращение тяжелой струны — нелинейная задача на собственные значения. Колоднер (Heavy rotating string — a nonlinear eigenvalue problem. Kolonder Ignace I.), Communs Pure and Appl. Math., 1955, **8**, № 3, 395—408 (англ.)

Рассматривается задача

$$(\rho \boldsymbol{X}_t)_t = \rho \boldsymbol{g} + (T \boldsymbol{X}_s)_s,$$

где $\boldsymbol{X} = (x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t))$, $T = T(s,t)$, $\boldsymbol{g} = (0, 0, g)$, $x^2(l,t) + y^2(l,t) = 0$, $z(l) = 0$, $T(0) = 0$, которая приводится методом разделения переменных к задаче:

$$u'' + \lambda (u^2 + s^2)^{-\frac{1}{2}} u = 0, \quad u(0) = u'(1) = 0. \qquad (1)$$

Вводится $\lambda_n = (\sigma_n / 2)^2$, где σ_n — n-й нуль $I_0(x)$.

Теорема 1. Задача (1) при $u \in C_2$ при любом λ, $\lambda_n < \lambda \leqslant \lambda_{n+1}$ имеет в точности n нетривиальных решений $u_1, \ldots, u_n$, причем функция u_k, $k = 1, \ldots, n$ имеет в точности k изолированных нулей (включая $s = 0$).

Рассматривается задача

$$v'' + (v^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} v = 0,$$

$$v(0, a) = 0,\ v'(0, a) = a \geqslant 0,\ x \geqslant 0,\ v \in C_2.$$

Теорема 2. 1. Решение $v(x, a)$ существует, единственно и непрерывно относительно a. 2. $v(x, a)$ имеет бесконечное число изолированных нулей $y_n(a)$, $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n$, $y_n \to \infty$ при $n \to \infty$; $v'(x, a)$ имеет также бесконечное число изолированных нулей $z_n(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, перемежающихся с нулями $y_n(a)$; причем $\lim z_n(a) = \lambda_n$ при $a \to 0$, $\lim z_n(a) = \infty$ при $a \to \infty$. 3. $z_n(a)$ являются дифференцируемыми функциями a и $dz_s / da \geqslant 0$. В. И. Зубов

4551. Решение одной задачи для эллиптического уравнения, имеющей приложения в подземной гидромеханике. Пискунов Н. С., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 210—212

Краткое содержание доклада автора, сделанного на заседании Московского математического общества. Даются постановка и способ оценки решения некоторых краевых задач подземной гидромеханики, связанных с вопросом эксплуатации нефтяных скважин в пластах с подошвенной водой. Заметка изобилует опечатками. Г. С. Салехов

4552. Определение дозвукового потока методом преобразования при квадратичной аппроксимации адиабаты. Шуберт, Шинке (Zur Ermittlung von Unterschallströmungen mit der Transformationsmethode bei quadratischer Approximation der Adiabate. Schubert Hans, Schincke Erich), Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1955, **101**, № 6, 32 S. (нем.)

Редуцированная функция тока

$$\psi(\omega, \vartheta) = \sqrt{K(\omega)}\, \Psi(\omega, \vartheta),$$

где Ψ — функция тока в безвихревом потоке сжимаемой жидкости,

$$\omega = \exp\left\{\int_{w_0}^{w} (1 - w^2 / w_0^2)^{-1/3} w^{-1} dw\right\}$$

(преобразование Чаплыгина: w — скорость в произвольной точке потока, $a = \sqrt{dp / d\rho} > w$ — скорость звука в этой точке, w_0 — параллельная оси x скорость потока на бесконечности), ϑ — угол наклона скорости потока к оси x, удовлетворяет уравнению

$$\psi_{\omega\omega} + \psi_\omega / \omega + \psi_{\vartheta\vartheta} / \omega^2 + \tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(K_\omega / K)^2 - K_\omega / \omega K - K_{\omega\omega} / K\}\psi = 0. \qquad (1)$$

Здесь $K(\omega) = \rho_0 \rho^{-1} \sqrt{1 - w^2 / a^2}$, ρ_0 — плотность на бесконечности. Вводится новый постоянный параметр

$$k^2 = \tfrac{1}{2}(K_\omega / K)^2 - K_\omega / \omega K - K_{\omega\omega} / K, \qquad (2)$$

откуда в силу условия при $w = 0$

$$K(\omega) = \sqrt{1 - w_0^2 / a_0^2}\, \{J_0(k\omega / \sqrt{2}) / J_0(k / \sqrt{2})\}^2.$$

Тогда уравнение (1) сводится к волновому уравнению

$$\Delta\psi + k^2 \psi / 2 = 0 \qquad (3)$$

(обычно полагают $k = 0$). Уравнение (2) совместно с уравнением Бернулли является условием на связь $p = p(\rho)$ между давлением и плотностью, в которой остаются свободными три параметра: a_0 — скорость звука на бесконечности, $p_0 = p(\rho_0)$ и k. Их можно определить так, чтобы первые три члена разложений $\tilde{p} = \tilde{p}_0 (\rho / \rho_0)^\varkappa$ и $p = p(\rho)$ в ряды по $\rho - \rho_0$ совпадали (квадратическая аппроксимация адиабаты). Для этого нужно положить $p_0 = \tilde{p}_0$, $a_0^2 = \varkappa \tilde{p}_0 / \rho_0$ и

$$\frac{1 + (\varkappa - 1) q_0 / 2}{1 - q_0} = 1 + \frac{(k\sqrt{2} / q_0)\sqrt{1 - q_0}\, J_1(k / \sqrt{2})}{J_0(k / \sqrt{2})},$$

$$q_0 = w_0^2 / a_0^2.$$

Далее исследуется обычным образом получаемый таким путем класс обтекаемых контуров $\Psi(\omega, \vartheta) = 0$. При этом функция тока Ψ строится не из гармонических функций, а из частных решений уравнения (3) вида

$$N_\nu\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\Omega\right)\begin{matrix}\cos \nu\theta \\ \sin \nu\theta\end{matrix}, \qquad J_\nu\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\Omega\right)\begin{matrix}\cos \nu\theta \\ \sin \nu\theta\end{matrix},$$

где Ω, θ — полярные координаты годографа скоростей, отнесенные к полюсу в точке $\omega = 1$, $\vartheta = 0$. Показы-

вается, что в этом классе есть близкие к окружности контуры, симметричные относительно осей x и y.

В. И. Левин

4553. Распространение магнито-гидродинамических колебаний в электрически проводящей жидкости, заполняющей полупространство. Цеули (Propagazione di oscillazioni magneto-idrodinamiche in un fluido elettricamente conduttore che riempie un semispazio. Zeuli Tino), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 1, 23—31 (итал.)

В полупространстве $z>0$ решается магнитно-гидродинамическое уравнение

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{1}{c}[\mathbf{jB}]-\operatorname{grad}p=\rho\operatorname{grad}U+$$
$$+\nu\left(\frac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}+\triangle_2\mathbf{v}\right)$$

совместно с уравнениями Максвелла. Предполагается, что колебания малы и решение зависит только от координаты z. Решение для неизвестных функций $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, ρ, p, U, $\boldsymbol{v}$ ищется в виде малых отклонений от стационарного решения: $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\varepsilon$, $\rho=\rho_0+\xi$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{w}$, ... Пренебрегая малыми второго порядка, автор получает систему однородных линейных уравнений относительно h_x, h_y, w_x, w_y, w_z, ξ, ε_z. Зависимость функций от координат и времени задается в виде $e^{in\omega t-\alpha_n^2 z}$. Величины α_n^2 вычисляются в зависимости от $n\omega$ из равенства нулю определителя системы для случая, при котором постоянное магнитное поле перпендикулярно границе полупространства. В полученном решении, экспоненциально затухающем с удалением от границы, для каждого n содержится пять произвольных постоянных, которые определяются заданием на границе жидкости пяти функций времени.

П. П. Бирюлин

4554. Распространение нестационарных возмущений в вязко-упругой среде. Шемякин Е. И., Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 1, 34—37

Решается система уравнений вязко-упругой среды:

$$L\mathbf{u}=(\Lambda+2M)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-M\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}=\rho\,\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2,$$
$$\Lambda=\lambda+\lambda'\partial/\partial t,\ M=\mu+\mu'\partial/\partial t,\ \mathbf{u}=\{u_x,u_y,u_z\}$$

(λ, μ— постоянные Ламэ, ρ — плотность, λ', μ' — диссипативные постоянные) в области $z>0$ при нулевых начальных условиях и граничных условиях, физически соответствующих сосредоточенной силе, приложенной в начале координат и меняющейся по заданному закону.

Метод неполного разделения переменных, часто применяющийся в работах по динамике упругой среды, позволяет выразить вектор $\mathbf{u}$ через интегралы, содержащие функции Бесселя. Для случая, когда $\lambda/\lambda'=\mu/\mu'$, установлена интегральная формула

$$\mathbf{u}(r,\theta,z,t)=\int_0^\infty\mathbf{u}_0(r,\theta,z,\tau)\,R(t,\tau)\,d\tau,\qquad(1)$$

где $\mathbf{u}_0$ — вектор, решающий задачу о сосредоточенном импульсе в идеально упругом полупространстве, а $R(t,\tau)$ выражается через интеграл типа Римана — Меллина.

На примере показывается, как при помощи (1) получить асимптотическое выражение для $\mathbf{u}$ в окрестности волновых фронтов при больших t. Волновые фронты в случае вязко-упругой среды «размыты», полученное асимптотическое выражение выясняет характер размыва.

В. М. Бабич

См. также: 4458, 4637, 4646, 4649, 4667 Д, 4668 Д, 4676, 4688, 4753, 4812, 4851, 4852, 4864, 4874, 4900—4905, 4909.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4555. Об интегральном уравнении Вольтерра. Сато, Ивасаки (Sur l'équation intégrale de Volterra. Satō Tokui, Iwasaki Akira), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 7, 395—398 (франц.)

Рассматривается интегральное уравнение

$$u(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t,u(t))\,dt,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\qquad(1)$$

где $f(x)$ ограничена и измерима, $K(x,t,u)$ непрерывна по (x,u) почти для всех t, измерима по t и мажорируется суммируемой функцией: $|K(x,t,u)|\leqslant M(t)$; $0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1$, $-\infty<u<+\infty$. При неубывании $K(x,t,u)$ по u доказывается существование среди решений (1) максимального $\geqslant$ всякого другого решения. Максимальное решение используется для доказательства теорем сравнения решений двух уравнений типа (1) и некоторой теоремы единственности. Результаты не новы.

М. К. Фаге

4556. Об особой точке интегральных уравнений типа Вольтерра. Такэсада (On the singular point of integral equations of Volterra type. Takesada Tositaka), J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 2, 123—136 (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$xu_j(x)=\sum_{i=1}^n\int_0^x K_{ji}(x,t)\,u_i(t)\,dt\quad(j=1,\ldots,n)\qquad(1)$$

с регулярными

$$K_{ji}(x,t)=\sum_{\alpha,\beta=0}^\infty a_{ji}^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta,\quad|x|<r_1,\quad|t|<r_2.$$

В обоих случаях — простых или кратных корней λ_k характеристического уравнения $|a_{ji}^{00}-\lambda\delta_{ji}|_1^n=0$ — строится формальное решение системы (1) в виде рядов и при условии существования интегралов $\int_0^x t^{\lambda_k-1}\,dt$ доказывается, что эти ряды имеют положительный радиус сходимости.

М. К. Фаге

4557. О соответствии, которое относит точке бикомпактный континуум. Фукухара (Sur l'application qui fait correspondre à un point un continu bicompact. Hukuhara Masuo), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 1, 5—7 (франц.)

Сначала формулируются некоторые свойства отображений, ставящих в соответствие точке некоторый бикомпакт. Затем рассматривается при $\lambda=0$ то же нелинейное интегральное уравнение (1), что и в статье Сато (РЖМат, 1955, 1315) с теми же свойствами К. Основной результат: Множество $\mathfrak{M}$ его решений (равное $(f,0)K$ Сато), есть бикомпактный континуум. Характер доказательства тот же, что у Сато, но метод иной: уравнение (1) аппроксимируется неравенствами

$$\left|\mathbf{y}(x)-\mathbf{f}(x)-\int_0^x\mathbf{K}(x,t,\mathbf{y}(t))\,dt\right|\leqslant\frac{1}{m}\,x\ (m=1,2,\ldots).$$

М. К. Фаге

4558. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений. Гущина В. М. Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-та, 1954, 5, 107—128

Предложения, установленные В. В. Немыцким (Матем. сб., 1934, 41, 438—452) для уравнения

$$u(x) = A(u) \equiv \int_B K(x, y) f[y, u(y)]\, dy,$$

переносятся на более общее уравнение:

$$u(x) = \psi[x, A_1(u), A_2(u), \ldots, A_n(u)], \qquad (1$$

где A_i — операторы того же вида, что A и

$$|\psi(z_0, z_1, \ldots, z_n) - \psi(z_0', z_1', \ldots, z_n')| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n} M_i |z_i - z_i'|^{\sigma_i},\ 0 < \sigma_i \leqslant 1.$$

Доказательство использует вспомогательные предложения, установленные в упомянутой работе, и ведется по тому же плану. Установлены различные теоремы существования и единственности решения уравнения (1) в пространствах L^2 и C.

Как в работе В. В. Немыцкого, установлены теоремы существования решения уравнения (1), принадлежащего шару пространства L^2 (или C) с центром в точке, являющейся решением одного из следующих уравнений:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_B K_i(x, y) f_i[y, u(y)]\, dy + f(x), \quad (2)$$

$$u(x) = \psi[x, B_1(u), B_2(u), \ldots, B_n(u)], \qquad (3)$$

где $B_i(u) = \int_B K_i(x, y)[\beta_i u(y) + s_i(y)]\, dy$, а также теоремы существования решения уравнения (2), принадлежащего некоторому шару с центром в точке, являющейся решением линейного уравнения

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_B K_i(x, y)[\alpha_i u(y) + s_i(y)]\, dy + f(x).$$

Во всех теоремах область интегрирования B — множество конечной меры m-мерного евклидова пространства.

М. М. Вайнберг

4559. Существование и разветвление решений одного класса нелинейных интегральных уравнений. Наджафов К. А., Тр. Азерб. индустр. ин-та, 1955, № 9, 38—46 (рез. азерб.)

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение

$$F[\varphi(x), \lambda] = \int_0^1 K(x, s, \lambda) f[s, \varphi(s), \lambda]\, ds \qquad (1)$$

в предположении, что: 1) $F(u, \lambda)$, $K(x, s, \lambda)$, $f(s, u, \lambda)$ аналитичны относительно аргументов u и λ; 2) при фиксированном λ ядро $K(x, s, \lambda)$ регулярно; 3) f непрерывна по s. Пусть при $\lambda = \lambda_0$ уравнение (1) имеет решение $\varphi_0(x)$. Пусть

$$A_{10}(x, \lambda_0) \equiv \frac{\partial F[\varphi_0(x), \lambda_0]}{\partial \varphi_0};$$

$$B_{10}(x, \lambda_0) \equiv \frac{\partial f[x, \varphi_0(x), \lambda_0]}{\partial \varphi_0}.$$

В первой части доказывается существование решения уравнения (1), голоморфного в окрестности $\lambda = 0$. Во второй части работы доказывается, что если: а) $A_{10}(x, \lambda_0) \neq 0$ и б) единица не является характеристическим числом ядра $M(x, y, \lambda_0) \equiv K(x, y, \lambda_0) \cdot B_{10}(y, \lambda_0) / A_{10}(x, \lambda_0)$, то в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ уравнение (1) имеет единственное голоморфное решение $\varphi(x, \lambda)$, разлагающееся по степеням $(\lambda - \lambda_0)$, предел которого при $\lambda \to \lambda_0$ равен $\varphi_0(x)$. В статье имеется ряд неточных формулировок.

Я. В. Быков

4560. Об одной теореме теории разветвления решения одного класса нелинейных интегральных уравнений. Ахмедов К. Т., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1955, № 6, 3—11 (рез. азерб.)

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ уравнение

$$u(x) = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n} \lambda^p K_p(x, s) f[s, u(s)]\, ds \qquad (1$$

имеет решение $U_0(x)$. Предполагается, что ядра $f[s, u_0(s)] K_p(x, s)$ $(p = 0, \ldots n)$ попарно ортогональны и что непрерывная по $s \in [0, 1]$ функция $f(s, u_0(s) + \psi)$ является аналитической по ψ в некоторой окрестности точки $\psi = 0$. Доказывается, что если $\lambda = \lambda_0$ не является корнем уравнения $D_1(\lambda) \cdot D_2(\lambda^2) \ldots D_n(\lambda^n) = 0$, где D_i — определитель Фредгольма ядра $f[s, u_0(s)] K_i(x, s)$, то в некоторой окрестности точки λ_0 уравнение (1) имеет единственное решение вида: $u(x, \lambda) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \psi_k(x)$. Функции ψ_k определяются из вспомогательных линейных интегральных уравнений. Для доказательства сходимости ряда строятся мажоранты.

Имеются опечатки, например, на стр. 9 в выражении для $F(\mu, \psi)$ написано ψ_i вместо ψ^i.

М. М. Вайнберг

4561. О положительных решениях нелинейных интегральных уравнений типа Урысона. Мамедов Я. Д., Докл. АН АзербССР, 1955, 11, № 9, 591—594 (рез. азерб.)

Рассматривается уравнение

$$u(x) = \lambda \Phi(x, A(u)) + f(x) \qquad (1)$$

в предположении, что интегральный оператор

$$A(u) = \int_a^b K[x, s, u(s)]\, ds$$

удовлетворяет условиям работы Урысона (Матем. сб., 1923, 31, 236—254), $\Phi(x, 0) = 0$, причем положительная и непрерывная функция $F(x, s, u, z) = \Phi_z'(x, z) \times K_u'(x, s, u)$ является возрастающей по u и z. Утверждается, что все предложения, установленные П. С. Урысоном для уравнения $u(x) = \lambda A(u) + f(x)$, сохраняются для уравнения (1), если F удовлетворяет тем же условиям, каким в работе Урысона удовлетворяет функция $K_u'(x, s, u)$. Метод доказательства тот же, как в работе Урысона.

М. М. Вайнберг

4562. Разрешимость нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений методом последовательных приближений. Гехт Б. И., Науч. тр. Новочеркас. политехн. ин-та, 1955, 26, 436—454

Рассматриваются нелинейные сингулярные интегральные уравнения типов

$$u(s) = \lambda \Phi\left(s, u(s), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2}\, d\sigma\right),$$

$$u(s) = f(s) + \Phi\left(s, u(s), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2}\, d\sigma, \lambda\right),$$

а также нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа

$$a(s) u^{(n)}(s) + \frac{b(s)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^{(n)}(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2}\, d\sigma =$$
$$= \lambda \Phi\left(s, u(s), u'(s), \ldots, u^{(n)}(s), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2}\, d\sigma, \ldots\right.$$

$$\ldots, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^{(n)}(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{s-\sigma}{2}\,d\sigma\Big)$$

с начальными данными $u(-\pi)=u'(-\pi)=\ldots$ $\ldots=u^{(n-1)}(-\pi)=0$, где a, b, f и Ф—данные функции, определенные в соответствующих областях изменения своих аргументов, удовлетворяющие некоторым условиям; $u(s)$ — искомая функция; λ — параметр. Рассматриваются также системы указанных выше типов уравнений.

Как отмечает автор, исследование проводится в основном аналогично таковому в работах А. И. Гусейнова (Матем. сб., 1950, 26, № 2, 237—246) и В. К. Наталевича (Уч. зап. Казанск. ун-та, 1952, **112**, № 10, 155—190). Б. В. Хведелидзе

4563. Уточнение данных наблюдений в двух измерениях. Берр (Sharpening of observational data in two dimensions. Burr E. J.), Austral. J. Phys., 1955, 8, № 1, 30—53 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$g(x', y')=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)\,f(x'-x, y'-y)\,dxdy; \quad (1)$$

ядро h нормировано условием $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)dxdy=1$.

Дано решение уравнения (1) в виде полинома, если g — полином; такое решение существует, если существуют моменты

$$M_{pq}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^p y^q/p!\,q!)\,h(x, y)\,dxdy$$

для достаточно больших значений p и q. Особо рассмотрен случай центральной симметрии. Строится приближенное решение в виде полинома в случае, когда значения g даны только на некоторой прямоугольной сетке, а ядро имеет конечные моменты некоторых первых порядков. Имея в виду облегчить использование преобразования Фурье, позволяющего решить уравнение (1) в широком классе случаев, автор приводит небольшую таблицу преобразований Фурье и Фурье — Бесселя. С. Г. Михлин

4564 Д. Исследование точек ветвления решений одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Адонц М. Т. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. ун-т, Баку, 1955

4565 Д. Точки разветвления решений одного класса нелинейных интегральных уравнений. Наджафов К. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. ун-т, Азерб. индустр. ин-т, Баку, 1955

См. также: 4512, 4629, 4660, 4667 Д, 4668 Д, 4688

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

4566. Основы теории показательной и логарифмической функций. Хуан Чун-чжи (指數函數及對數函數理論的基礎. 黃崇智), 數學通報 (Шусюэ тунбао), 1955, 4, 15—17 (кит.)

4567. Теория определения действительных чисел с помощью сечений Дедекинда. Пань Вань-си (藉凝點規定實數的理論. 潘文熙), 數學通訊 (Шусюэ тунсюнь), 1955, № 1, 1—2 (кит.)

4568. Логарифмирование как обратная операция. Винокуров А. Н., Уч. зап. Новосибир. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 10, 99—112

Критика традиционного изложения в школьном курсе алгебры понятия логарифмирования как операции, обратной возвышению в степень. В. И. Левин

4569. О матрицах, элементы которых являются обобщенными гиперболическими функциями. Лерер (On matrices the elements of which are generalized hyperbolic functions. Lehrer Yehiel), Riveon Lematematika, 1954, 7, 71—73 (иврит.; рез. англ.)

Обобщенные гиперболические функции порядка n суть вещественные функции

$$h_j(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^{j+kn}/(j+kn)! \qquad (j=0,1,\ldots,n-1).$$

Пусть $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Автор определяет матрицы

$$T(x)=[h_{j-i}(x)],\ T(\alpha; x)=\left[\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\,h_{j-i}(x)\right]$$

(в квадратных скобках находится элемент i-й строки и j-го столбца). Он показывает, что $\det T(x)=1$, $T(x)T(y)=T(x+y)$, $T(0)=1$, так что $T(x)$ изоморфно абелевой подгруппе n-мерной унимодулярной группы. Он также показывает, что

$$T^{(r)}(\alpha; x)\,T^{(s)}(\alpha; y)=T^{(r+s)}(\alpha; x+y),$$
$$[T^{(r)}(\alpha; x)]^n=T(\alpha; x),$$

где верхние индексы в скобках обозначают дифференцирование по x, и заключает, что каждая $T(\alpha; x)$ изоморфна $T(x)$ и что $T^{(1)}(\alpha: 0)$ есть производящая матрица для $T(\alpha; x)$. Отсюда он заключает, что если A есть постоянная $n\times n$-матрица, для которой $A^n=I$, то элементы матрицы e^{Ax} суть обобщенные гиперболические функции. A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 420.

4570. Об одном функциональном уравнении. Грабьель (On a functional equation. Grabiel Federico), Revista Soc. Cubana cienc. fis. mat., 1953, **3**, 45—49 (исп.)

Основной результат: Пусть D — множество всех элементов из $L_2(a, b)$, имеющих $n+1$ производную в $L_2(a, b)$, T — непрерывный линейный функционал на D, dT/dx определяется уравнением $[dT/dx](f)=-T(f')$. Тогда если T возникает из дифференцируемой функции g, то d^kT/dx^k возникает из k-й производной g $(k=1, 2, \ldots, n)$. I. E. Segal

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 326.

4571. Теорема умножения сумм однородных функций. Уэйнер (A factorization theorem concerning sums of homogeneous functions. Weiner L. M.), Scripta Math., 1955, **21**, № 1, 20—23 (англ.)

Рассматривается кольцо функций, представимых в виде суммы $F=F_n+F_{n-1}+\ldots+F_0$, где $F_j=F_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — непрерывная однородная функция степени i от m действительных переменных. Доказывается, что такое представление элемента кольца единственное. Если F_n не равна тождественно нулю, то n называется степенью F. Приводится пример, показывающий неединственность разложения F на линейные множители. Доказывается теорема разложения и единственности элементов кольца на простые множители. Т. И. Красношекова

4572. Обобщение формулы Тейлора. Ионеску (Generalizarea formulei lui Taylor. Ionescu D. V.), Gaz. mat. si fiz., 1955, **A7**, № 8, 389—395 (рум.; рез. русс., франц.)

Доказывается, что n-кратно дифференцируемая в промежутке $[x_0, x]$ функция $y=y(x)$ допускает представление вида

$$y(x)=y_1(x)\,y(x_0)+y_2(x)\,y'(x_0)+\ldots$$

$$\ldots + y_n(x)\, y^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} K(x, s)\, F[y(s)]\, ds, \quad (1)$$

где $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — интегралы дифференциального уравнения $F(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0$ с непрерывными коэффициентами $a_i(x)$, удовлетворяющие начальным условиям: $y_i^{(k)}(x_0) = \delta_{ik}$ и $K(x, s)$ — интеграл уравнения $F(y) = 0$ такой, что $K_{xi}^{(i)}(x, s)|_{x=s} = \delta_{i,\, n-1}$. При $F(y) = y^{(n)}$ формула (1) представляет формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Б. П. Демидович

4573. О некоторых задачах на максимум и минимум. Морли (On some maximum-minimum problems. Morley R. K.), Math. Mag., 1955, 28, № 5, 273—276 (англ.)

Рассматривается полином с рациональными коэффициентами $y = f(x)$, производная которого имеет вид: $f'(x) = ax^{n+2} + bx^{n+1} + cx^n$; n — целое $\geqslant 1$, a, b, c — рациональны и $\neq 0$. Изучается вопрос, в каком случае корни уравнений $f'(x) = 0$ и $f''(x) = 0$ — рациональны. Результаты иллюстрируются на полиномах четвертой и пятой степени. Л. Я. Цлаф

4574. Достаточные условия относительного экстремума. Заблудовская Л. З., Студ. наук, праці Київськ. ун-ту, 1955, зб. 16, 3—11

Даются достаточные условия относительного экстремума функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при одном уравнении связи $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$. Показывается, что $d^2 f > 0$, если выполняются условия:

$$-\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1k} a_{1n} c_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1} \ldots a_{kk} a_{kn} c_k \\ a_{n1} \ldots a_{nk} a_{nn} c_n \\ c_1 \ldots c_k \ c_n \ 0 \end{vmatrix} > 0,$$

где $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $a_{ij} = \partial^2 f(M_0) / \partial x_i \partial x_j$; $C_k = \partial\varphi(M_0)/\partial x_k$. И. В. Матвеев

4575. О разложении $\operatorname{cot} x$. Гонсальвиш (Sur la décomposition de $\operatorname{cot} x$. Gonçalves J.), Univ. Lisboa. Rev. Fac. cienc. Apl. cienc. Mat., 1954, (2) 3, 200—202 (франц.)

4576. Неопределенные формы в функциях многих переменных. Вебер (Formes indéterminées dans les fonctions de plusieurs variables. Weber), Rev. math. spéc., 1955, 65, № 8, 485—486 (франц.)

Начало (см. РЖМат, 1956, 2295). Отмечаются некоторые элементарные признаки эквивалентности ΔF и dF для функций нескольких переменных. И. В. Матвеев

4577. Об эквивалентности приращения и дифференциала функции многих переменных. Див (Sur l'équivalence de l'accroissement et de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Dive P.), Rev. math. spéc., 1955, 65, № 11, 557—560 (франц.)

Рассматривается вопрос об эквивалентности приращения и дифференциала функции $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ m независимых переменных x_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, определенной в гиперплоскости m измерений. Устанавливается следующее предложение: Если частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ непрерывны и хотя бы одна из них не обращается в нуль в точке $M(x_1, \ldots, x_m)$, то полный дифференциал первого порядка df есть бесконечно малая, эквивалентная приращению Δf, когда точка $M'(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m)$ стремится к точке $M(x_1, \ldots, x_m)$ по кривой (C), неортогональной к $\overline{N} = \operatorname{grad} f$ в точке M. И. В. Матвеев

4578. Об одной формуле перестановки интегралов. Карцивадзе И. Н., Сообщ. АН ГрузССР, 1955, 16, № 1, 3—10

Устанавливаются достаточные условия для перестановки интегралов в выражении

$$\int_0^{2\pi} H(x, t)\, dt \int_0^{2\pi} \varphi(s) \operatorname{ctg} \times \frac{t - s}{2}\, ds,$$

где

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |H(x, t)|^q\, dx dt < +\infty, \quad q > 1.$$

В. В. Немыцкий

4579. Замечание об асимптотическом разложении интеграла ошибок. Хенрич (Kleine Bemerkung zur asymptotischen Entwicklung des Fehlerintegrals. Henrici Peter), Z. angew. Math. und Phys., 1955, 6, № 2, 145—146 (нем.)

Исправляются некоторые неточные места в заметке Сборника (РЖМат, 1955, 3260). М. К. Гавурин

4580. Об одном обобщении формулы Лежандра. Фемпл (О једном уопштењу Legendre-obe релације. Фемпл Станимир), Зб. радова Српска А. Н., 1955, 43, 41—56 (серб.; резюме франц.)

Рассматривается выражение

$$L(k, \psi) = F \cdot E(k', \psi) + E \cdot F(k', \psi) - F \cdot F(k', \psi),$$

где F и E — полные эллиптические интегралы I и II рода модуля k, а $F(k', \psi)$ и $E(k', \psi)$ — соответствующие неполные интегралы (k' — модуль дополнительный к k). Выводится соотношение

$$L(k, \varphi) + L(k, \psi) = \pi/2 + F \cdot k'^2 \sin\varphi \sin\psi,$$

если $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = 1/k$, которое применяется для вычисления частных значений выражения $L(k, \psi)$. Формула Лежандра получается при $\psi = \pi/2 : L(k, \pi/2) = \pi/2$. Получается также оценка $2^{-1} \cdot \pi k' \sin\psi \leqslant L(k, \psi) \leqslant (\pi \sin\psi)/2$. В. И. Левин

4581. Связь между классами функций Lipα и Lip(β, p). **Фрейд** (Ein Zusammenhang zwischen den Funktionenklassen Lip α und Lip $(\beta.p)$. Freud Géza), Acta scient. math., 1954, 15, № 3—4, 260 (нем.)

В поправке к статье (Acta Scient. math., 1955, 16, № 1—2, 28) автор указал, что результат статьи (и даже более сильный) известен (Hardy G. H., Littlewood J. E., Math. Z., 1928, 28, 612—634).

4582 К. Современная математика в физике и технике. Бронуэлл (Advanced mathematics in physics and engineering. Bronwell Arthur. New York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1953, XVI, 475 p., 6.00 doll.) (англ.)

Содержание книги: бесконечные ряды, комплексные числа и гиперболические функции, ряды Фурье и интеграл Фурье, обыкновенные дифференциальные уравнения, бесселевы и шаровые функции, частные производные, колебания, уравнения Лагранжа, функции комплексной переменной, динамическая статистика, преобразование Лапласа. Целью книги является достаточно подробное изложение каждого из отделов высшей математики и каждого из аналитических методов, которые применяются при решении часто встречающихся математических проблем физики и техники. Все это излагается с расчетом на широкое применение. Центр тяжести математических рассмотрений лежит не в выводах общих теорем, которые часто только цитируются и иллюстрируются примерами, а в вычислительной технике, которая изложена с большой подробностью и иллюстрируется многочисленными примерами (с указанием решений). Рассматривая применение математики, автор часто высказывает мысль о

единстве математических методов в различных дисциплинах. Основательное изучение этой книги несомненно поможет физикам и инженерам получить хорошие навыки в вычислительной технике и хорошо понять связь между существом физических и технических проблем и соответствующими математическими методами. J. Meixner

Перевод из Zbl. Math., 1954, 50, № 6—10, 276—277.

4583 К. Краткий курс математического анализа (Учебник для механ.-матем. фак. ун-тов и пед. ин-тов). Хинчин А. Я. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1955, 628 стр., с черт., 12 р. 65 к.

От первого издания (РЖМат, 1954, 4461) это издание отличается лишь небольшими изменениями и исправлениями.

4584 К. Формулы механической кубатуры с минимальным числом членов. Георгиев Г. Варшава, Гос. науч. изд-во, 1955, 71стр., 8 злот. 50 грош, Przew. bibliogr., 1955, № 16, 243 (русс.)

4585 К. Курс математического анализа Ч. 2. (Учеб. пособие для втузов). **Бермант А. Ф.** Изд. 6-е стереотип., М., Гостехиздат, 1955, 359 стр. с черт., 7 р. 85 к.

Часть I (См. РЖМат, 1954, 3360 К)

4586 К. Теория пределов и непрерывные функции (Учеб. пособие для студентов). **Брин И. А., Гросберг Ю. И., Леонтьев А. Ф., Никитин Б. Д., Румшиский Л. З.** (Моск. энерг. ин-т), М., 1955, 100 стр., с черт., беспл.

4587 К. Математический анализ. Для вечерних и заочных инженерных училищ. Зелинский (Analiza matematyczna. Dla wieczorowych i zaocznych szkoł inzynierskich. Zielinski Kazimierz. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk, 1955, 382 s., 15,05 zł.), Przeg. bibliogr.,1955,11,№ 8,128 (польск.)

4588 К. Интегральное исчисление. Лузин (Calculul integral. Luzin N. N., Bucureşti, Ed. tehn., 1955, 430 p., 15,30 lei), Bul. bibliogr., 1955, А4, № 3, 10 (рум.)

4589 К. Математика для химиков; математический анализ для химико-физиков и инженеров-химиков. Кинч (Mathematics for the chemist: mathematical analysis for chemisto physicists. Kynch George James. London, Butterworth's Scient.Pub., 1955, VII+356 p.,tabl.,diagr., 30 sh.), Brit. Nat.Bibliogr., 1955, № 267, 9 (англ.)

4590 К. Курс алгебры и математического анализа. Чорэнеску (Curs de algebra şi analiză matematică. Ciorănescu N. Bucureşti, Ed. tehn., 1955, 722 p., fig., 41.60 lei), Bul. bibliogr.,1955, А4, № 7, 8 (рум.)

4591 К. Задачник по аналитической геометрии и дифференциальному исчислению. Соловьева Т. А. Всес. заоч. ин-т сов. торговли, М., 1955, 120 стр., б. ц.

4592 К. Математический анализ. Метод (Пособие для студентов-заочников). **Дринфельд Г. И.**, Харьков, Изд-во Харьковск. ун-та, 1955, 63 стр., беспл.

4593 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Бейкон (Differential and integral calculus, 2 ed., Bacon Harold Maile, McGraw, 1955, 547 p., 6 doll.), cumul. Book Index., 1955, 58, № 5, 15 (англ.)

4594 К. Сборник математических формул. Вестрих (Sammlung mathematischer Formeln. 13 Aufl. Westrich Fritz. München, Lindauer, 1955, 63 S., 74 Abb. 1.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, А, № 16, 846 (нем.)

4595 К. Математический анализ. Делаше (L' analyse mathématique, 2 éd, Delachet André, Paris, Presses univ. France, 1954, 120 p.,fig.,144 fr., Bibliogr. France, 1955, 144, № 16, 369 (франц.)

4596 К. Курс высшей математики (Основы дифференциального и интегрального исчисления) (Учеб. пособие). **Файнзильбер А. М.** (Моск. с.-х. акад. им. К. А. Тимирязева), М., 1955, 124 стр. с черт., 2 руб.

4597 К. Лекции о дифференциальном и интегральном исчислении. Том 1. Функции одной переменной. Курант (Vorlesungen über Differential —und Integralrechnung. Bd I. Funktionen einer Veränderlichen 3. verb. Aufl., Courant R., Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1955, XI, 450 S., 126 Textfig, 33.— DM.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, А, № 21, 1128 (нем.)

4598 К. Анализ. Уайли (Calculus. Wylie Jr, C. R. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Co., Inc.,1953, X, 565 pp., 6.00 doll.) (англ.)

В этом учебнике на первом плане стоит применение анализа бесконечно малых к проблемам естествознания. Это становится ясным уже из первой главы, где постановка проблем дифференциального и интегрального исчислений выясняется на простых примерах из физики и техники, предшествующих изложению этих понятий. Характер изложения элементарный, поэтому опускаются доказательства, основанные на теории действительного числа (например, доказательство существования предела монотонно возрастающей ограниченной последовательности) или другие доказательства, которые трудны по этим же причинам. Автор в таких случаях ссылается либо на более обширные учебники или на очевидность. Вместе с тем в книге безупречно все, что касается техники дифференцирования и интегрирования (включая ряды Фурье и некоторые простые типы обыкновенных дифференциальных уравнений). Богато подобранные примеры и задачи (с ответами) служат для этой же цели. Оформление превосходно. G. Aumann

Перевод из Zbl. Math., 1954, 50, № 6—10, 277.

4599 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Франклин (Differential and integral calculus. Franklin Philip. New York-Toronto-London. McGraw-Hill Book Co., Inc., 1953, XI, 641 p. 45, — s.) (англ.)

Книга рассчитана на инженеров и естествоиспытателей, желающих познакомиться с дифференциальным и интегральным исчислением лишь как с набором рабочих правил, не изучая такие тонкости, как критерий сходимости Коши, равномерная непрерывность, равномерная сходимость. К излагаемому теоретическому материалу добавлено большое количество числовых примеров и задач, на которых читатель легко может познакомиться с применениями дифференциального и интегрального исчисления в геометрии и физике. Все теоремы сформулированы достаточно строго, доказательства же проведены наиболее простыми средствами. Это приводит, с одной стороны, к тому, что доказательства основных положений заменяются указанием на геометрическую очевидность (например, теорема о среднем значении в дифференциальном исчислении и существование определенного интеграла от непрерывной функции) и, с другой стороны, к тому, что ряд положений, указанных во введении, пропускаются, например дифференцирование под знаком интеграла, дифференцирование и интегрирование бесконечных рядов, теория рядов Фурье и т. д. В то же время излагаются некоторые вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Рассматриваются применения дифференциального и интегрального исчисления в дифференциальной геометрии и отдельных областях физики. H. Reichardt

Перевод из Zbl. Math, 1954, 50, № 6—10, 27

4600 К. Лекции по математическому анализу. Т. II. Гицетти (Lezioni di analisi matematica. Vol II. Anno accademico 1953—54. (Univ. degli studi di Roma). Ghizzetti Aldo. Roma, G. Pioda e G. Conti, 1953, 584 p.), Bibliogr. ital., 1954, 88, № 642, 455 (итал.)
Том I (см. РЖМат, 1955, 5095 К).

4601 Д. Об аппроксимации в среднем суммируемых функций посредством сингулярных интегралов. Эфендиева М. Р. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. пед. ин-т, Баку, 1955

4602 Д. О коэффициентах Фурье — Лебега функций двух переменных. Барыкин М. П. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Днепропетр. ун-т, Днепропетровск, 1955

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

4603. Вычисление сумм рядов. Кёниг (Výpočet součtu řad. König Bedrich), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 2, 191—201 (чеш.)
Изложен новый метод приближенного вычисления сумм некоторых классов рядов и даны оценки погрешности. В качестве иллюстрации метода вычислены суммы рядов: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$;

$$\sum_{k=20}^{\infty} \frac{\cos(k\pi/3)}{\sqrt{4k^4-k^2+1}}; \quad \sum_{k=20}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/3)}{\sqrt{4k^4-k^2+1}}.$$

К. М. Слепенчук

4604. Чезаровская суммируемость рядов Фурье — Уолша. Файн (Cesàro summability of Walsh — Fourier series. Fine N. J.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 8, 588—591 (англ.)
Пусть $f(x)$ — интегрируемая по Лебегу на $[0, 1]$ функция, $\alpha > 0$ и

$$\sigma_n^{(\alpha)}(f; x) = \int_0^1 K_n^{(\alpha)}(t) f(x+t)\, dt$$

— соответствующие (C, α) средние ряда Фурье функции $f(x)$ относительно системы Уолша (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ОНТИ, 1939, гл. 1). Пользуясь некоторыми своими прежними результатами (Fine M. J., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 65, № 3, 372—414), автор доказывает, что при $n \to \infty$, почти для всех x, $\sigma_n^{(\alpha)}(f; x) \to f(x)$. При доказательстве применяется следующее утверждение, представляющее также и самостоятельный интерес. Если C — измеримое множество отрезка $[0, 1]$, $d(x) = \rho(x, C)$ — расстояние от x до C и $h_1 \geqslant h_2 \geqslant h_3 \geqslant \ldots \geqslant h_n \geqslant \ldots \geqslant 0$ — последовательность, обладающая при некоторой константе M и всех $\delta > 0$ свойствами $\sum_{h_j \leqslant \delta} h_j \leqslant M\delta$, $\sum_{h_j \geqslant \delta} 1/h_j \leqslant M/\delta$, то почти для всех $x \in C$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} d(x \pm h_j)/h_j < \infty.$$

А. Ф. Тиман

4605. О разложении характеристики цепи в ряд по ортогональным функциям. Папулис (On the expansion of a network response into a series of orthogonal functions. Papoulis A.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 1, 104—105 (англ.)
Рассматривается формальное разложение данной функции $f(t)$ в ряд по функциям $e^{-t} L_n(t)$ или же $P_{2n}(e^{-\sigma t})$ при помощи преобразования Лапласа.
Примечание референта. Вследствие ошибки в формуле (3) работы рекуррентные соотношения (7) для разложения по многочленам Лагерра неправильны. Общее выражение для коэффициентов этого разложения имеется у Дёча (Doetsch G., Handbuch der Laplace — Transformation, Basel, 1950). Там же дается подробное исследование справедливости формального разложения.
Э. Я. Рискстыньш

4606. О двух теоремах Харди — Литтлвуда. Щеглов М. П., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 2, 180—187
Для любого бесконечного числового ряда $\sum_0^{\infty} a_n$ рассматриваются конечные или бесконечные числа

$$d = \lim_{N\to\infty} \sum_0^N a_n,\ D = \overline{\lim}_{N\to\infty} \sum_0^N a_n,$$

$$d' = \underline{\lim}_{u\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n/u},\ D' = \overline{\lim}_{u\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n/u},$$

между которыми, как известно, выполняется соотношение $d \leqslant d' \leqslant D' \leqslant D$. Автор исследует осуществимость различных комбинаций знаков в последних неравенствах для следующих классов рядов: $a_n = o(1/n)$, $a_n = O(1/n)$, $a_n^+ = o(1/n)$; $a_n^+ = O(1/n)$, а также для лакунарных рядов $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$, $n_{k+1} \geqslant \alpha n_k$ $(\alpha > 1)$ с условиями $a_{n_k} = o(1)$, $a_{n_k} = O(1)$, $a_{n_k}^+ = o(1)$, $a_{n_k}^+ = O(1)$. Большинство результатов статьи опубликовано в прежних работах автора (Матем. сб., 1951, 28 (70), № 2, 246—282 и Матем. сб., 1946, 18 (60), № 1, 41—58). Б. И. Коренблюм

4607. О линейных методах суммирования. Мазур, Орлич (On linear methods of summability. Mazur S., Orlicz W.), Studia math., 1954, 14, № 2, 129—160 (англ.)
Публикуются результаты проведенных авторами в 1932 г. исследований общих свойств матричных методов суммирования, из которых только основные были опубликованы без доказательства ранее (C. r. Acad. sci., 1933, 196, 32—34). При этих исследованиях авторы применяют методы функционального анализа, пользуясь свойствами введенных авторами линейных метрических пространств типа B_0 (Studia math., 1948, 10, 184—208; 1953, 13, 137—179), являющихся естественным обобщением линейных пространств Банаха. В первом параграфе приводятся общие свойства поля метода A, т. е. множества A^* последовательностей, суммируемых данным методом. Пусть A — метод, сохраняющий сходимость, т. е. суммирующий все сходящиеся последовательности, но не обязательно к их обычным пределам. Поле метода A есть пространство типа B_0 при подходяще выбранных псевдонормах. Для конечнострочных методов метрика упрощается. Если метод A однозначен (т. е. если он преобразует разные последовательности в разные же), то A^* является пространством Банаха. Во втором параграфе содержатся исследования о совместности методов суммирования. Основная теорема утверждает, что если методы A и B регулярны (т. е. суммируют сходящиеся последовательности к их обычным пределам; это условие несколько менее общее, чем указанное в статье) и если метод B не слабее метода A на множестве ограниченных последовательностей, то метод B совместен с методом A на множестве ограниченных последовательностей. Это вытекает из того, что каждая ограниченная последовательность, суммируемая регулярным методом, является в поле этого метода предельной точкой сходящихся последовательностей. Если метод регулярен и если каждая последовательность, суммируемая этим методом, является предельной точкой сходящихся последовательностей, то метод совместен с каждым не менее сильным регулярным методом, т. е. является совершенным. Ранее С. Мазур показал, что классиче-

ские методы Гёльдера и Эйлера совершенны. Если последовательность, суммируемая регулярным методом A, не является предельной точкой сходящихся последовательностей в поле этого метода, то существует не менее сильный регулярный метод B, суммирующий эту последовательность к наперед заданному значению. Авторы дают условия, необходимые и достаточные для того, чтобы последовательность была предельной точкой сходящихся последовательностей в поле данного метода, а также простое условие, необходимое и достаточное для того, чтобы для данного регулярного метода A и для метода B не менее сильного, чем метод A, существовал третий метод C в точности с тем же самым полем, что и у A, и совместный с методом B. Авторы дают также простые необходимые и достаточные условия совершенности регулярного конечностроч-ного метода. В третьем параграфе авторы пытаются дать ответ на трудный вопрос: что можно высказать общего о последовательностях, суммируемых данным методом. Для каждого метода, сохраняющего сходимость конечностроч-ного и однозначного существует последовательность $\{\theta_n\}$ такая, что для каждой последовательности $\{t_n\}$, суммируемой данным методом, выполняется соотношение $t_n = o(\theta_n)$. Для конечностроч-ного метода, сохраняющего сходимость, такая последовательность существует тогда и только тогда, когда метод равносилен однозначному конечностроч-ному методу. Авторы дают достаточные условия того, чтобы метод суммировал неограниченные последовательности, а также необходимые и достаточные условия (в виде неравенств) для того, чтобы метод, помимо сходящихся последовательностей, суммировал только неограниченные последовательности. Регулярный метод A суммирует, помимо сходящихся последовательностей, только неограниченные последовательности тогда и только тогда, когда для каждой неограниченной последовательности, суммируемой данным методом, существует регулярный метод B, не слабее, чем A, который суммирует эту последовательность к иному значению, чем A. Авторы дают простой пример такого метода. Если регулярный метод A суммирует ограниченную расходящуюся последовательность, то он: 1) суммирует расходящуюся неограниченную последовательность, 2) существует последовательность индексов $\{m_p\}$ такая, что для произвольной ограниченной последовательности $\{u_n\}$ существует последовательность $\{t_n\}$, суммируемая методом A, и такая, что $t_{m_p} = u_p$. Аналогичные теоремы авторы доказывают для последовательности методов. В четвертом параграфе доказывается, что не существует метода, поле которого равнялось бы в точности сумме полей последовательности методов $\{A_n\}$ таких, что $A_n \subset A_{n+1}^*$, $A_n \neq A_{n+1}^*$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Не существует также конечностроч-ного метода, поле которого равнялось бы в точности пересечению полей последовательности регулярных методов $\{B_n\}$ таких, что $B_{n+1}^* \subset B_n^*$, $B_{n+1}^* \neq B_n^*$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Если A есть сохраняющий сходимость метод такой, что $\{t_n\} \in A^*$, $\{\tau_n\} \in A^*$ влечет $\{t_n \tau_n\} \in A^*$ (или, если метод A — регулярный и из $\{t_n\} \in A^*$, $\{\tau_n\} \in A^*$, $\tau_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ следует $\{t_n / \tau_n\} \in A^*$) при условии, что A суммирует $\{\tau_n\}$ к величине $\neq 0$, то существует последовательность индексов $\{k_p\}$ такая, что A^* совпадает с множеством последовательностей $\{t_n\}$, для которых существует $\lim_{p \to \infty} t_{k_p}$.

L. Włodarski

4608. Тауберовы теоремы. Коревар (Tauberian theorems. Korevaar Jacob), Simon Stevin, 1954, **30**, № 3, 129—139 (англ.)

Обращение к собранию Математического общества (Wiskundig Genootschap, Amsterdam) 29 ноября 1952 г. Дается обзор исследований по тауберовым теоремам, начиная с работ Таубера (1897 г.) и кончая работами автора по оценке остаточного члена в теореме Литтлвуда. Автор отмечает две современные тенденции в развитии тауберовой теории. С одной стороны, имеется алгебраическое направление, ставящее своей целью получение наиболее общих результатов; это направление восходит к Винеру и связано с работами Гельфанда, Райкова, Годемана, Сегала и Бейрлинга. С другой стороны, имеется тенденция к уточнению классических специальных теорем. Библ. 15 назв. Б. И. Коренблюм

4609. Сходимость абсолютно суммируемых рядов. Чэнь Цзянь-гун (Convergence of absolutely summable series. Chen Kien-Kwong), 中國科學, (Чжунго кэсюэ, Acta sci. sinica), 1955, 4, № 2, 211—228 (англ.)

Пусть σ_n^α — n-е чезаровское среднее порядка α ряда $\sum_{k=0}^\infty u_k$.

Ряд $\sum_{k=0}^\infty u_k$ абсолютно суммируем (A), или суммируем $|A|$, если $f(x) = \sum_{k=0}^\infty u_k x^k$ есть функция ограниченной вариации на $[0,1]$ и абсолютно суммируем (C, α), или суммируем $|C, \alpha|$, если сходится ряд

$$\sum_{n=0}^\infty |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha| \quad (\sigma_1^\alpha = 0).$$

Доказывается: 1. Существует расходящийся ряд, суммируемый $|C, \alpha|$ для любого $\alpha > 0$. 2. Для сходимости суммируемого $|A|$ ряда $\sum_{k=0}^\infty u_k$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^n u_k = O(1), \; u_k = o(1). \tag{1}$$

На примерах показывается, что при выполнении только одного из условий (1) из суммируемости $|A|$ ряда не следует его сходимость. Используя теорему 2, автор доказывает сходимость ряда $\sum_{k=1}^\infty \frac{\Lambda(k) - 1}{k}$, где $\Lambda(k) = p$, если k есть степень простого числа p, и равно нулю в противном случае.

На стр. 223 в формулировке теоремы 2 имеется опечатка. Вместо $c_n = O(1)$ должно быть $c_n = o(1)$.

М. Д. Калашников

4610. О тауберовых теоремах для интеграла Римана—Лиувилля. Раджагопал (On Tauberian theorems for the Riemann — Liouville integral. Rajagopal C. T), Publs Inst. math. Acad. serbe des sci., 1954, **6**, 27—46 (англ.)

Рассматриваются средние

$$\Phi_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \; (\alpha > 0), \; \Phi_0(x) = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ $(x \geqslant 0)$ — функция ограниченной вариации в каждом конечном интервале, $\varphi(0) = 0$. Основная теорема: Пусть $\alpha > \alpha' \geqslant 0$, $W(x)$ $(x > 0)$ — положительная монотонно возрастающая функция, $\theta(x) > 0$ $(x > 0)$, $|\Phi_\alpha(x)| \leqslant mW(x)$. Тогда из

$$\sup_{0 < t < \theta(x)} [\Phi_{\alpha'}(x) - \Phi_{\alpha'}(x-t)] \leqslant mW(x) / [\theta(x)]^{\alpha - \alpha'}$$

следует

$$\Phi_{\alpha'}(x) \leqslant KmW(x) / [\theta(x)]^{\alpha - \alpha'}$$

(K зависит от α, α'), а из

$\sup_{0<t<\theta(x)} [\Phi_{\alpha'}(x+t) - \Phi_{\alpha'}(x)] \leqslant mW(x) / [\theta(x)]^{\alpha-\alpha'}$

следует

$$\Phi_{\alpha'}(x) \geqslant -KmW(x+\theta(x)) / [\theta(x)]^{\alpha-\alpha'}$$

Из этой общей теоремы выводятся многочисленные следствия. Б. И. Коренблюм

4611. Сходимость и суммирование ряда Фурье, соответствующего некоторой аналитической функции. Казнав (Convergence et sommation d'une série de Fourier correspondant à une fonction analytique. Cazenave René), Ann. télécommuns, 1955, **10**, № 5, 102—108 (франц.)

Рассматриваются ряды Фурье, суммы которых являются действительными частями аналитических функций комплексного переменного z на единичной окружности с центром в начале координат. После построения ряда по степеням z, определяющего такую аналитическую функцию, сходимость и свойства коэффициентов ряда Фурье выводятся из свойств этого степенного ряда. Предельное значение интеграла Пуассона на единичной окружности в точке разрыва первого рода следует из интеграла Стильтеса, в который переходит в данном случае интеграл Пуассона. Наконец, ряд Фурье представлен в виде векторной диаграммы аналогично известному приему представления суммы колебаний одинакового периода. Автор совершенно не использует и не касается богатой литературы по теории сопряженных рядов Фурье. Н. А. Бразма

4612. О таблицах для численного умножения и деления степенных рядов. Хара И. С., Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1955, **5**, 151—154

Предлагается табличный способ числовых расчетов для умножения и деления степенных рядов (табл. I и Ia) и для деления многочленов с остатком (табл. II). В заключение указывается на возможность его использования для разложения в ряды рациональных выражений от функций, разложения которых известны. А. Л. Кузьмина

4613. Краткое доказательство одной классической теоремы из теории интегралов Фурье. Рис, Ливингстон (A short proof of a classical theorem in the theory of Fourier integrals. Riesz Marcel, Livingston A. E.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 6, 434—437 (англ.)

Дано новое доказательство справедливости формулы

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{iyt}\,dt = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \quad -\infty<x<\infty, \qquad (1)$$

когда $f(x)$ имеет ограниченную вариацию и исчезает на бесконечности (относительно прежнего доказательства см. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948, стр. 25). При доказательстве используются свойства интегрального синуса, а также выведенное авторами неравенство

$$\left|\int_a^b fg\,dt\right| \leqslant V_f(a,b)\sup_{a\leqslant\xi,\eta\leqslant b}\left|\int_\xi^\eta g\,dt\right| + \inf_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)\int_a^b g\,dt\right|,$$

где g — непрерывная функция, а f — функция с ограниченной вариацией. Отмечается, что тем же способом можно доказать равномерную сходимость к функции $f(x)$ внешнего интеграла в формуле (1), понимаемого как главное значение при $y\to 0$ и $y\to\pm\infty$, на каждом внутреннем интервале интервала непрерывности $f(x)$. Ю. И. Черский

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

4614. Полиномы Аппеля больших порядков. Сингх (Appell polynomials of large order. Singh Vikramaditya), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 4, 475—479 (англ.)

Используя интегральное представление полиномов Аппеля $P_n(x) = \int_a^b (x+t)^n/n!\,d\beta(t)$ (производящая функция которых $A(t) = \int_a^b e^{ut}\,d\beta(u)$), автор дает для них асимптотические выражения при $n\to\infty$ и x/n конечном. Рассмотрены частные случаи: полиномы Эрмита, Бернулли и Эйлера. Доказана также теорема: Пусть $\{\alpha_n\}$ таковы, что $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|} = 1/\rho$ и $P_n(x)$ — полином Аппеля n-го порядка. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n P_n(x)$ равномерно сходится при $|x|<\rho/e$. В. А. Рымаренко

4615. О нулях производной функции Бесселя первого рода. Гаттески (Sugli zeri della derivata delle funzioni di Bessel di prima specie. Gatteschi Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 1, 43—47 (итал.)

В формуле

$$j'_{n,r} = x_{n,r} - [4n^2+3]/8x_{n,r} + \varepsilon(n,r),$$
$$x_{n,r} = (2r+n)\pi/2 + \pi/4,$$

где $j'_{n,r}$, $r=1,2,\ldots$, r-й корень $j'_n(x)$, $0\leqslant n\leqslant 1$, дается следующая оценка остаточного члена:

$$|\varepsilon(n,r)| < 2{,}85/(2r+n)^3.$$

В. И. Левин

4616. Ограничение некоторых, в частности Лагерровых, многочленов. Палама (Limitazioni di taluni polinomi ein particolare di quelli di Laguerre. Palamà Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 1, 47—51 (итал.)

Известно следующее разложение многочлена в непрерывную дробь:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = c_0 + \cfrac{c_1 x}{1} - \cfrac{\frac{c_2}{c_1}x}{1+\frac{c_2}{c_1}x} - \cdots - \cfrac{\frac{c_n}{c_{n-1}}x}{1+\frac{c_n}{c_{n-1}}x}.$$

Исходя отсюда и пользуясь тем, что при определенных условиях значение непрерывной дроби заключено между двумя последовательными ее подходящими, автор получает оценки некоторых многочленов, в частности обобщенных Лагерровых:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (x^{-\alpha}e^x/n!)\,(d^n x^{\alpha+n}e^{-x})/dx^n.$$

Например, если $d_i = [\alpha+i+1]/[n-i]$, то при $0<x<2d_1$ и $n>3$ оказывается

$$(\alpha+1,n)(1-10d_1/3d_0) < L_n^{(\alpha)}(x) < (\alpha+1,n)(1+2d_1/d_0),$$

где $(\alpha+1,n) = (\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)$. И. П. Натансон

4617. Теоремы разложения для G-функций. IX. Производящие функции обобщенных гипергеометрических многочленов и функций. Мейер (Expansions theorems for the G-function. IX. Generating functions of generalized hypergeometric polynomials and functions. Meijer C. S.), Proc. Konikl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 2, 243—251; Indagationes math., 1955, **17**, № 2, 243—251 (англ.)

(См. РЖМат, 1953, 796, 797; 1954, 4082; 1955, 3822, 3823, 3824). Полиномы Лагерра $L_r^{(\alpha)}(\lambda)$ можно в обозначениях автора представить в виде:

$$(r!)^{-1}\Gamma(1+\alpha+r)\,{}_1\varphi_1(-r;1+\alpha;\lambda)$$

и

$$(r!)^{-1}\Gamma(1+\alpha+r)\,e^{\lambda}\,{}_1\varphi_1(1+\alpha+r;1+\alpha;-\lambda).$$

Обобщая результаты Н. Я. Сонина (Math. Ann., 1880, 16, 1—80), автор строит производящие функции многочленов ${}_{k+1}\varphi_l(-r,\gamma_1,\ldots\gamma_k;\delta_1,\ldots\delta_l;\lambda)$ и функций ${}_{p+1}\varphi_q(\mu+r,\alpha_1,\ldots\alpha_p;\beta_1,\ldots\beta_{q-1},\mu;\zeta)$, где r — целое неотрицательное (см., например, Джексон. Ряды Фурье и ортогональные полиномы, М., Изд-во ин. лит. 1948, 207). Л. М. Глускин

4618. Теоремы разложения для G-функций. X. Производящие функции обобщенных гипергеометрических многочленов и функций. Мейер (Expansion theorems for the G-function. X. Generating functions of generalized hypergeometric polynomials and functions. Meijer C. S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 3, 309—314, Indagationes math., 1955, **17**, № 3, 309—314 (англ.)

Как и в 9-й части статьи (реф. 4617), автор обобщает разложения по полиномам Лагерра на разложения по обобщенным гипергеометрическим функциям. Л. М. Глускин

4619. Интегрирование гипергеометрических функций. Слейтер (The integration of hypergeometric functions. Slater L. J.), Proc. Cambridge Philos Soc., 1955, **51**, № 2, 288—296 (англ.)

Даются различные обобщения следующей теоремы Майера (Mejer C. S. Proc. Acad. Sci. Amst., 1946, **49**, 229—233). Пусть

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma\left[\begin{matrix}(a)+s,(b)-s\\(c)+s,(d)-s\end{matrix}\right]z^s ds, \qquad (1)$$

$$\Sigma_A=\sum_{\mu=1}^{A}z^{-a_\mu}\Gamma\left[\begin{matrix}(a)'-a_\mu,(b)+a_\mu\\(c)-a_\mu,(d)+a_\mu\end{matrix}\right]\times$$

$$\times\,{}_{B+C}F_{A+D-1}\left[\begin{matrix}(b)+a_\mu,1+a_\mu-(c)\\1+a_\mu-(a)',(d)+a_\mu\end{matrix}(-1)^{A+C}z^{-1}\right],$$

$$\Sigma_B=\sum_{\nu=1}^{B}z^{b_\nu}\Gamma\left[\begin{matrix}(a)+b_\nu,(b)'-b_\nu\\(c)+b_\nu,(d)-b_\nu\end{matrix}\right]\times$$

$$\times\,{}_{A+D}F_{B+C-1}\left[\begin{matrix}(a)+b_\nu,1+b_\nu-(d)\\(c)+b_\nu,1+b_\nu-(b)'\end{matrix}(-1)^{B+D}z\right];$$

здесь (a) обозначает последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_A$ (штрих над (a) в последовательности $(a)'-a_m$ означает пропуск элемента, равного нулю), ${}_AF_L\left[\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}x\right]$ — обобщенная гипергеометрическая функция и

$$\Gamma\left[\frac{(a)}{(b)}\right]\equiv\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_A)\,|\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_B)|^{-1}.$$

Тогда, в предположении, что $\pi(A+B-C-D)>>2|\arg z|$, имеют место следующие равенства и асимптотические представления:

$$I=\Sigma_A\sim\Sigma_B \text{ при } A+D>B+C$$

(и при $A+D=B+C$, если $|z|>1$),

$$I=\Sigma_B\sim\Sigma_A \text{ при } A+D<B+C$$

(и при $A+D=B+C$, если $|z|<1$),

$$I=\Sigma_A=\Sigma_B \text{ при } z=1,\ A-C=B-D\geqslant 0$$

и $\operatorname{Re}\Sigma(c+d-a-b)>0$.

Автор получает аналогичный результат для интеграла

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma\left[\begin{matrix}(a)+s,(b)-s,(g)+s,(h)-s\\(c)+s,(d)-s,(j)+s,(k)-s\end{matrix}\right]\times$$

$$\times\,{}_{A+B+E}F_{C+D+F}\left[\begin{matrix}(a)+s,(b)-s,(e)\\(c)+s,(d)-s,(f)\end{matrix}x\right]z^s ds,$$

обращающегося в (1) при $x=0$, $g_i=j_i$, $(i=1,2,\ldots,G=I)$ и $h_i=k_i$ $(i=1,2,\ldots,H=K)$; соответствующие функции $\Sigma_A(x,z)$ и $\Sigma_B(x,z)$ представляются конечными суммами двойных рядов по степеням x и z. Как частные случаи получаются результат Бейли (Bailey W. N., Generalized hypergeometric series, 1935, § 6. 3. (1)) и известные интегральные представления функций Аппеля F_i $(i=1,2,3,4)$ от двух переменных; асимптотические представления для них (при больших значениях одного из переменных) указываются здесь, повидимому, впервые. Без доказательства отмечены дальнейшие обобщения, касающиеся интеграла

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma\left[\begin{matrix}(a)+s,(b)-s\\(c)+s,(d)-s\end{matrix}\right]\times$$

$$\times\,{}_{A'+B'+E}F_{C'+D'+F}\left[\begin{matrix}(a')+s,(b')-s,(e)\\(c')+s,(d')-s,(f)\end{matrix}x\right]\times$$

$$\times\,{}_{A''+B''+G}F_{C''+D''+H}\left[\begin{matrix}(a'')+s,(b'')-s,(g)\\(c'')+s,(d'')-s,(h)\end{matrix}y\right]z^s ds.$$

и др. М. Н. Олевский

4620. Интегралы для асимптотических разложений гипергеометрических функций. Слейтер (Integrals for asymptotic expansions of hypergeometric functions. Slater L. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 226—231 (англ.)

Дается аналог теоремы Майера (реф. 4619) для базисных гипергеометрических функций. М. Н. Олевский

4621. Преобразования Меллина гипергеометрических функций. Слейтер (Hypergeometric Mellin transforms. Slater L. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 4, 577—589 (англ.)

На основании результатов, полученных автором ранее (реф. 4619, 4620), выводятся формулы для преобразований Меллина гипергеометрических функций. Эти формулы содержат как частные случаи некоторые известные соотношения. В. И. Левин

4622. Некоторые базисные гипергеометрические преобразования. Слейтер (Some basic hypergeometric transforms. Slater L. J.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 3, 351—360 (англ.)

Даются для базисных гипергеометрических рядов ${}_p\Phi_q$ аналоги теорем, установленных автором в его работе (реф. 4619) для обобщенных гипергеометрических рядов ${}_pF_q$. М. Н. Олевский

4623. О гипергеометрических функциях. Нерлунд (Über hypergeometrische Funktionen. Nörlund Niels Erik), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 258—265 (нем.)

Обобщенное гипергеометрическое уравнение

$$\left(z\frac{d}{dz}-\gamma_1\right)\dots\left(z\frac{d}{dz}-\gamma_n\right)y- -z\left(z\frac{d}{dz}+\alpha_1\right)\dots\left(z\frac{d}{dz}+\alpha_n\right)y=0, \qquad (1)$$

где α_s и γ_s — нецелые числа, имеет в особой точке $z=0$ n нецелых характеристических показателей γ_s, а в особой точке $z=1$ единственный нецелый характеристический показатель $\beta_n=n-1-\sum_{s=1}^{n}(\alpha_s+\gamma_s)$, которому принадлежит каноническое решение

$$\xi_n(z)=\xi_n\left(\begin{matrix}\alpha_1\dots\alpha_n\\ \gamma_1\dots\gamma_n\end{matrix}\Big/\ z\right), \qquad (2)$$

однозначно определяемое условием $\lim_{z\to 1}\frac{\xi_n(z)}{(1-z)^{\beta_n}}=1$.

Статья посвящена выводу основных свойств функций $\xi_n(z)$. Используя одно рекуррентное соотношение и изображение Меллина функции $\xi_p(z)$, автор получает общее интегральное представление, содержащее произвольный параметр γ_0

$$\xi_n(z)= =\frac{\Gamma(\beta_n+1)(1-z)^{\gamma_0-1}}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\left(\frac{1-z}{z}\right)^x\times \times\prod_{s=1}^{n}\frac{\Gamma(x+\gamma_s)}{\Gamma(x-\alpha_s+1)}F\left(\begin{matrix}x+\gamma_0\dots x+\gamma_n\\ x-\alpha_1+1\dots x-\alpha_n+1\end{matrix}\right)dx, \qquad (*)$$

где интегрирование производится вдоль прямой, проведенной параллельно мнимой оси так, чтобы точки $-\gamma_s$ лежали слева от нее, а точка $\beta_n-\gamma_0+1$ справа. Интеграл (*) сходится и представляет $\xi_n(z)$ в плоскости z, разрезанной вдоль положительной вещественной оси от 1 до $+\infty$ и вдоль отрицательной вещественной оси от нуля до $-\infty$.

Разложение функции $\xi_n(z)$ в круге $|z-1|<1$ по степеням $z-1$ автор представляет в n видах

$$\xi_n(z)=z^{\gamma_1}(1-z)^{\beta_n}\sum_{\nu=0}^{\infty}g_{\nu,n}^{(i)}(1-z)^{\nu}.$$

Канонические решения уравнения (1) в окрестности точки $z=0$ разлагаются в гипергеометрические ряды

$$z^{\gamma_s}F\left(\begin{matrix}\alpha_1+\gamma_s\dots\alpha_n+\gamma_s\\ \gamma_s-\gamma_1+1\dots\gamma_s-\gamma_n+1\end{matrix}\ z\right).$$

При $n=2$ уравнение (1) после преобразования $y=z^{\gamma_1}u$ переходит в обычное гипергеометрическое уравнение Гаусса, в котором обе особые точки $z=0$ и $z=1$ равноправны, но при $n>2$ особая точка $z=1$ существенно отличается от точки $z=0$ тем, что имеет только один нецелый характеристический показатель.

Свойства обычных гипергеометрических функций зависят, с одной стороны, от строения коэффициентов гипергеометрических рядов и, с другой стороны, от характера интегральных представлений этих функций. При $n>2$ свойства первого рода переносятся на решения (**), а свойства второго рода — на рассматриваемые Нерлундом функции $\xi_n(z)$. Ю. Л. Рабинович

4624. Регулярные и иррегулярные волновые функции Кулона, выраженные через функции Бесселя — Клиффорда. Абрамовиц (Regular and irregular Coulomb wave functions expressed in terms of Bessel-Clifford functions. Abramowitz Milton), J. Math. and Phys., 1954, **33**, № 1, 111—116 (англ.)

Волновыми функциями Кулона $F_L(\eta,\rho)$ и $G_L(\eta,\rho)$ называются регулярное и иррегулярное решения уравнения

$$d^2y/d\rho^2+[1-2\eta\rho^{-1}-L(L+1)\rho^{-2}]y=0, \qquad (1)$$

где $L\geqslant 0$ — целое число, а η — непрерывный параметр, определяющий значения энергии, причем эти решения нормированы так, чтобы при $\rho\to\infty$ $G_L+iF_L\sim \sim\exp[i(\rho-\eta\ln 2\rho-L\pi/2+\sigma_L)]$, где $\sigma_L=\arg\Gamma(L+ +1+i\eta)$.

При $L=0$ получаем $F_0=C_0(\eta)\ \rho\Phi_0(\rho,\eta)$; $G_0= =D_0(\eta)\ \theta_0(\rho,\eta)$, $C_0^2=2\pi\eta(e^{2\pi\eta}-1)^{-1}$, $D_0C_0=1$, $\theta_0= =2\eta\rho(\ln 2\rho+(2\eta)^{-1}q_0\ (\eta))\Phi_0+\psi_0$, $\Phi_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\rho^{n-1}$, $\psi_0=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\rho^n$; $A_1=1$, $A_2=\eta$; $a_0=1$, $a_1=0$; $n(n-1)A_n= =2\eta A_{n-1}-A_{n-2}$; $n(n-1)a_n=2\eta a_{n-1}-a_{n-2}-(2n- -1)2\eta A_n$; $(2\eta)^{-1}q_0=2\gamma-1+\mathrm{Re}[\Gamma'(1+i\eta)/\Gamma(1+i\eta)]$, где γ — постоянная Эйлера.

Обозначая $\rho\Phi_0$ и Θ_0 общим знаком H_0, автор разлагает H_0 в ряд по функциям Бесселя — Клиффорда:

$$H_0=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}b_nu_n, \qquad (2)$$

где

$$u_n=\begin{cases}(2\eta\rho)^{n/2}I_n(2\sqrt{2\eta\rho}), & \text{если } H_0=\rho\Phi_0,\\ \cos n\pi\,(2\eta\rho)^{n/2}K_n(2\sqrt{2\eta\rho}), & \text{если } H_0=\Theta_0.\end{cases}$$

λ определяется начальными условиями при $\rho=0$:

$$\rho\Phi_0|_{\rho=0}=0;\ \{d/d\rho\,(\rho\Phi_0)\}_{\rho=0}=1;\ \Theta_0|_{\rho=0}=1.$$

Затем производится оценка членов ряда (2) при $n\to\infty$. Именно получаются оценки

$$t^{n/2}I_n(2\sqrt{t})=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{t^{s+n}}{\Gamma(s+1)\Gamma(n+s+1)}<t^ne^t/n!,$$

а из формул

$$K_n(2\sqrt{t})=2^{-1}\int_0^{\infty}\exp[-\sqrt{t}(\xi+\xi^{-1})]\,\xi^{-n-1}d\xi,$$

$$(n-1)!=\int_0^{\infty}\exp(-\xi)\,\xi^{n-1}d\xi$$

следует: $2t^{n/2}K_n(2\sqrt{t})=(n-1)!\,(1-\theta_n t/\cdot(n-1))$, где $0<\theta_n<1$. Пусть $v_n=b_n\,t^{n/2}K_n(2\sqrt{t})$. Тогда $|v_{n+1}/v_n|\to \to\beta_2 n/2\eta$ при $n\to\infty$, откуда вытекает расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$. С другой стороны, в интеграле для

$K_n(2\sqrt{t})$ преобладает окрестность точки $\xi = 1$, так что при $t \to \infty$

$$K_n(2\sqrt{t}) \sim 2^{-1} \int_{1-h}^{1+h} \exp[-\sqrt{t}(\xi + \xi^{-1})]\, \xi^{-n-1}\, d\xi,$$

где $0 < h < 1$. Ю. Л. Рабинович

4625. О симметрии сферических функций. Мейер (On the symmetries of spherical harmonics. Meyer Burnett), Canad. J. Math., 1954; **6**, № 1, 135—157 (англ.)

Дается способ построения всех сферических функций данной степени, инвариантных по отношению к данной конечной группе ортогональных преобразований. Результаты сведены в хорошо обозримые таблицы. Доказательства на стр. 140—142 могут быть упрощены, если воспользоваться тем, что любой однородный полином $F_n(x, y, z)$ степени n однозначно представляется в виде $H_n(x, y, z) + r^2 H_{n-2}(x, y, z) + \ldots$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, H_n, $H_{n-2}, \ldots$ — гармонические полиномы степени $n, n-2, \ldots$ Д. К. Фаддеев

4626. Об интегральных уравнениях для гиперсферических функций. Феньё (A magasabbrendü gömbfelületi függvényekre vonatkozó integrálegyenletröl. Fenyö István), Magyar tud. akad. mat. és fiz., osztalyanak közlemenyei, 1953, **3**, № 4, 513—520 (венг.)

Дается новое более простое доказательство следующей известной теоремы (Erdélyi A., Math. Ann., 1937, **115**, 456): Пусть $F(\xi)$ — любая функция $\in L_2(-1, +1)$. G — сфера в $n+2$-мерном евклидовом пространстве, P и Q — точки на G; γ — угол POQ, где O — начало координат.

$$df_Q = \sin^n \varphi_1 \sin^{n-1} \varphi_2 \ldots \sin \varphi_n d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_n\, d\varphi_{n+1},$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n+1}$ — полярные координаты точки Q на сфере. Тогда собственными значениями интегрального уравнения

$$\varphi(P) = \lambda \int_G F(\cos\gamma)\, \varphi(Q)\, df_Q$$

будут числа

$$\lambda_k = (2k + n)\, \Gamma(n/2) / 4\pi^{(n/2)+1} C_k;$$

$$C_k = \frac{2^{n-1}\, k!\, ((n/2) + k)\, \Gamma^2(n/2)}{\pi \Gamma(n + k)} \int_{-1}^{+1} F(\xi)\, V_k^{(n)}(\xi) \times$$

$$\times (1 - \xi^2)^{(n-1)/2}\, d\xi,$$

где $V_k^{(n)}$ означают $n+2$-мерные функции Гегенбауэра. Каждое собственное значение имеет кратность $u_k = (k + n - 1)!\, (2k + n) / k!\, n!$; нормированными собственными функциями этого уравнения, принадлежащими значению λ_k, будут u_k линейно независимых гиперсферических функций

$$\varphi(P) = S_{k,i}^{(n)}(P)\ (k = 0, 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots u_k),$$

где k означает порядок гиперсферической функции.

4627. Трактат о теории эллиптических функций. Гонсалес (Memoir on the theory of elliptic functions. González Mario O.), Revista soc. Cubana ci. fis. mat., 1953, **3**, 39—44 (исп.)

Исторический очерк возникновения и развития теории эллиптических функций, за которым должны последовать две дальнейшие вводные главы об общих свойствах эллиптических функций. Автор упоминает о работах Бернулли, Фаньяно, Эйлера, Лежандра, Абеля, Якоби, Луивилля, Эрмита, Брио и Букэ и Вейерштрасса. Отмечается аналогия между функцией Якоби $\mathrm{sn}\, z$ и функцией Вейерштрасса $\sigma(z)$, с одной стороны, и функцией $\sin z$, с другой, а также еще более тесная аналогия между функцией Вейерштрасса $\wp(z) = -d^2 \log \sigma(z) / dz^2$ и $\mathrm{cosec}^2 z = -d^2 \log \sin z / dz^2$, выражающиеся в том, что обе функции мероморфны, четны, периодические и имеют полюсы второго порядка. Простота подхода Вейерштрасса к теории эллиптических функций, по мнению автора, во многом объясняется наличием указанной аналогии, тогда как более сложные черты этой теории сравниваются с тригонометрией, в которой основной функцией являлась бы $\mathrm{cosec}^2 z$. Обнаружена также тесная аналогия между $\mathrm{tg}\, z$ и введенной автором (Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, 833—834; Actas Acad. ci. Sima, 1952, 15, 93—97, а также Proc. Internat. Congress Math., Cambridge, Mass., 1950, 1, Amer. Math. Soc. Providence, R. I, 1952, p. 393) эллиптической функцией $\mathrm{Tan}\, z$; функции $\mathrm{tg}\, z$ и $\mathrm{th}\, z$ оказываются частными случаями эллиптической функции $\mathrm{Tan}\, z$. В следующих главах будет развита теория эллиптических функций, в которой основной функцией является $\mathrm{Tan}\, z$. E. Grosswald

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 421.

4628 К. Эллиптические функции и интегралы с действительным модулем в механике жидкостей. Лежандр (Les fonctions et intégrales elliptiques à module réel en mécanique des fluides. Legendre Robert. Publs O. N. E. R. A., 1954, № 71, 74 pp. (франц.)

Книга состоит из Введения и 5 глав: 1. Преобразование Шварца; 2. Эллиптические интегралы первого рода и эллиптические функции; 3. Функции тэта; 4. Функции дзета и вычисления эллиптических интегралов; 5. Различные приложения. Книга написана для инженеров, интересующихся приложениями теории эллиптических функций и интегралов к вопросам течения несжимаемой и сжимаемой жидкостей. Автор видит основную цель не в строгости изложения, а в том, чтобы представить материал в наглядной форме и показать его приложения. Книга богато иллюстрирована схемами и чертежами (63 рис.). П. И. Кузнецов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4629. Операторная математика. II. Хайн (Operator mathematics. II. Hines Jerome), Math. Mag., 1955, 28, № 4, 199—207 (англ.)

(Часть I см. Math. Mag., 1952, 25, 251—261). Установлено обобщенное правило Лопиталя, позволяющее раскрывать неопределенные операторные формы, содержащие операторы аннулирования. Дано определение логарифма оператора и исследованы некоторые свойства логарифма производной. Отмечено, что результаты, полученные автором для логарифма производной, существенным образом отличаются от соответствующих результатов, найденных Вольтерра при помощи метода интегральных уравнений.

Автор считает, что в основе этого различия лежит несовместимость определения логарифма производной по Вольтерра с законами операторных уравнений, установленными в предыдущей статье.

М. И. Клиот-Дашинский

4630. Об обращении в среднем преобразований Фурье и Ханкеля. Херц (On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms. Herz Carl S.),

Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, 1954, **40**, № 10, 996—999 (англ.)

Пусть t есть точка k-мерного пространства Евклида R_k. Если $F(t) \in L^p(R_k)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, то $F(t)$ имеет преобразование Фурье $G(s) \sim \int_{R_k} \exp(is \cdot t) F(t)\, dt$. Пусть C — выпуклый многогранник в R_k, содержащий внутри себя начало координат и nC, n его расширение. Бохнеру принадлежит следующая теорема:

Теорема 1. Если $F \in L^p$, $1 < p \leqslant 2$, то $F_n(t) = 1/(2\pi)^k \int_{nC} \exp(-is.t) G(s)\, ds$ также $\in L^p$ и l. i. m.$_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$ (в степени p). Ограничение, состоящее в том, что C имеет конечное число сторон, существенно. Если B — сфера в R_k, то справедлива

Теорема 2. Пусть $F = f(t \cdot t)\, p(t) / |t|^{\nu}$, где $p(t)$ — гармонический полином степени ν. Если $F \in L^p$, $2k/(k+1) < p \leqslant 2$, то $F_n(t) = (1/(2\pi)^k) \int_{nB} \exp(-is \times t) G(s)\, ds$ также $\in L^p$ и l. i. m. $F_n(t) = F(t)$ (в степени p). Для каждого p, $1 \leqslant p \leqslant 2k/(k+1)$, существует $F \in L^p$ описанного вида, для которой $F_n(t) \in L^p$ для всех n, за исключением возможно счетного множества, которое зависит от F. Суммирование по сферам в теореме 2 приводит к рассмотрению преобразований Ханкеля. Пусть $A_\delta(x) = I_\delta(2\sqrt{x})\, x^{-\delta/2}$, $\gamma \geqslant -1/2$, $\nu \geqslant 0$, $L_\gamma^{(p)}$ — пространство функций с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int_0^\infty |f(x)|^p x^\gamma\, dx \right\}^{1/p}$$

Теорема 3. $g(y) \sim \int_0^\infty A_{\gamma+\nu}(xy)(xy)^{\nu/2} f(x)\, dx$ есть линейное преобразование $L_\gamma^{(p)}$ в $L_\gamma^{(p')}$, для $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $1/p + 1/p' = 1$.

Теорема 4. Пусть $F(t)$ такого же вида, как и в теореме 2. Если $F \in L^p(R_k)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ и G — ее преобразование Фурье, то $f \in L_\gamma^{(p)}$, $\gamma = (k-2)/2$ и $G(s) = i^\nu \pi^{\nu/2} g(1/4 \cdot s \cdot s)\, p(s) / |s|^{\nu}$ (g — определяется в теореме 3).

Теорема 5. Если $f \in L_\gamma^{(p)}$, $4((\gamma+1)/(2\gamma+3)) < p \leqslant 2$ и g — преобразование Ханкеля теоремы 3, то $f_n(k) = \int_0^n A_{\gamma+\nu}(xy)(xy)^{\nu/2} g(y)\, y^\gamma dy$ также $\in L_\gamma^{(p)}$ и l. i. m $f_n(x) = f(x)$ (в степени p). Для каждого p $1 \leqslant p \leqslant 4((\gamma+1)/(2\gamma+3))$, существует $f \in L_\gamma^{(p)}$, для которой $f_n(x) \notin L_\gamma^{(p)}$ для каждого n, за исключением возможно счетного множества, которое зависит от f.

Теорема 2 есть следствие теоремы 5. Перечисленные теоремы были ранее известны для $k = 1$ и $\gamma = -1/2$.

Б. М. Левитан

4631. Заметка о преобразовании Эйлера. Брауэр (A note on Euler transforms. Brauer George), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 6, 432—433 (англ.)

Символом E_λ обозначен класс λ-преобразований Эйлера, т. е. функций f, представимых в виде интеграла

$$f(x) = \int_0^\infty (x+t)^{-\lambda}\, d\Phi(t),\ \lambda > 0,\ x > 0,$$

где $\Phi(t)$ — непостоянная и неубывающая функция. Доказано, что $f \in E_{\lambda-1}$, если 1) $f \in E_\lambda$, $\lambda > 1$, 2) функция $\Phi(t)$ имеет производную, не убывающую при $t > 0$; 3) $\Phi'(t) = O(t^{\lambda-1})$ при $t \to \infty$. Ю. И. Черский

4632. Об операционном исчислении с двумя переменными. Чакраварти (On symbolic calculus of two variables. Chakravarty N. K.), Acta math., 1955, **93**, № 1—2, 1—14 (англ.)

Обозначим через $\varphi(p, q) \subset h(x, y)$ соотношение

$$\varphi(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} h(x, y)\, dxdy,\ \mathrm{Re}\, p > 0,\ \mathrm{Re}\, q > 0.$$

Доказывается следующая теорема об итерировании преобразований Лапласа: Если $f(p) \subset x^{\nu-1} h(x)$ и $p^{\mu-\lambda} h(p^{-\mu}) \supset \sigma(x)$, то при $\mu > 0$, $R(\lambda) > -1$, $R(\mu) > -1$

$$y^{\nu-\lambda/\mu}\, \sigma(xy^{1/\mu}) \supset p^{\mu\nu-\lambda} f(p^\mu q).$$

Этот результат является обобщением одной формулы Дельрю, которая получается из него при $\nu = \mu = 1$ и $\lambda = k+1$. Теорема применяется к выводу конкретных операционных соотношений с двумя переменными, содержащих бесселевы, гипербесселевы и другие специальные функции. Простейшие примеры:

$$(\sqrt{y})^{-1} \operatorname{ber}(2\sqrt{x\sqrt{2y}}) \supset \sqrt{\pi q}\, e^{-1/4p^2q},$$

$$x^{\nu+1} y^{-\nu/2} J_\nu(x\sqrt{y}) \supset 2^{\nu+1} (\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma(\nu + 3/2)\, p^{1-2\nu} q S(\nu + 3/2, p^2 q),$$

где $S(\nu, z) = \int_0^\infty e^{-zt} (1+t)^{-\nu}\, dt$.

В. И. Левин

4633 к. Преобразование Лапласа и его применение. Функ, Заган, Зелиг (Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung. Funk Paul, Hans Sagan, Franz Selig. Wien: Franz Deuticke, 1953, VIII, 106 S.) (нем.)

В книге дается легко понимаемое введение в теорию преобразования Лапласа и его приложений. Книга предназначена для инженеров, однако изложение содержит и математические доказательства. Изложение каждой группы теоретических свойств сопровождается примерами на их применение в технике. Объем имеющегося в книге материала может быть охарактеризован следующими заглавиями: Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (мотора постоянного тока трансформатора), Интегральные уравнения (уравнение Абеля), Уравнения в частных производных (теплопроводность), Формулы обращения на комплексной плоскости, Техника применения правил, в особенности применение асимптотических разложений. Обычно в книгах по операционному исчислению этот раздел излагается совершенно недостаточно, здесь же он представлен весьма широко. G. Doetsch

Перевод из Zbl. Math., 1954, **50**, № 6—10, 329.

4634 Д. Применение метода интегральных преобразований к решению задач теории молекулярного переноса. Смирнов М. С. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. технол. ин-т пищ. пром-сти, М., 1955

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4635. Преобразование одного уравнения частот в теории гофрированных волноводов. Грожан (Transformation of a frequency equation in corrugated wave guide theory. Grosjean C. C.), Nuovo cimento, 1955, **1**, № 1, 174—192 (англ.; рез. итал.)
(см. РЖФиз, 1955, 22727).

4636. Экспериментальное подтверждение одного уравнения частот для гофрированных волноводов. Грожан, Ванхёйсе (Experimental verification of a frequency equation for corrugated wave guides. Grosjean C. C., Vanhuyse V. J.), Nuovo cimento, 1955, **1**, № 1, 193—200 (англ.; рез. итал.)
(см. РЖФиз, 1955, 22728).

4637. Решение при помощи интеграла Фурье задачи о напряжениях в полубесконечной полосе. Митчелл (A Fourier integral solution for the stresses in a semi-infinite strip. Mitchell L. H.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, **7**, Part 1, 51—56 (англ.)

Ищется функция напряжения в виде интеграла Фурье для полубесконечной полосы, закрепленной между двумя ребрами, расположенными вдоль ее длинных сторон, к концам которых приложены нормальные напряжения. Эти ребра предполагаются восприимчивыми лишь к нормальным напряжениям, а сама упругая полубесконечная полоса, по допущению, находится в плоско-напряженном состоянии. Проделанные приближенные расчеты косых напряжений вблизи короткой стороны показывают, что результаты согласуются с фотоупругими исследованиями.

И. Н. Карцивадзе

См. также: 4258, 4312, 4400, 4407, 4409, 4410, 4730, 4733, 4929

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

4638. Характеристика соединений линейно независимых множеств. Хорн (A characterization of unions of linearly independent sets. Horn Alfred), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 4, 494—496 (англ.)

Для линейного пространства X любой размерности над произвольным полем доказывается теорема: Пусть k — натуральное число, множество $S \subset X$. Если мощность любого конечного подмножества $T \subset S$ не превосходит произведения k на максимальное число линейно независимых элементов из T, то S может быть разбито на k непересекающихся множеств линейно независимых элементов.

Б. З. Вулих

4639. О полных продолжениях линейных непрерывных отображений. Тома (Über vollständige Erweiterungen linearer, stetiger Abbildungen. Thoma Elmar), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 177—178 (нем.)

Рассматривается векторная система R с вещественными числами в качестве области операторов и в R вводится предел посредством соотношения

$$\varliminf \operatorname{alg} a_n = \bigvee_{v=1}^{\infty} \left(\bigwedge_{n=v}^{\infty} a_n\right)$$

(предполагается, что операции объединения и пересечения счетного числа ограниченных сверху соответственно снизу множеств в R всегда выполнимы). Отображение F подмножества $r \subset R$ в $w(M)$ — векторную систему конечных вещественных функций, определенных на M, называется непрерывным, если из $f_n \geqslant f_{n+1}$, $f_n \in r$ и $\lim \operatorname{alg} f_n = 0$ следует $\lim \operatorname{alg} F(f_n) = 0$.

Непрерывное продолжение линейного непрерывного отображения F подмножества $r \subset R$ в $w(M)$ до линейного отображения подмножества $r' \supset r$, $r' \subset R$ в $w(M)$ с помощью процесса P, называемое «P-продолжением», будет «P-полным», если оно более P-непродолжаемо.

Пусть даны два процесса $P = A$ и $P = Q$, первый из которых оперирует с «алгебраическим» пределом, введенным выше, а второй с пределом, вводимым с помощью квазинормы. Утверждается, что полное Q-продолжение уже, чем полное A-продолжение.

В. И. Соболев

4640. Ограниченность и непрерывность линейных функционалов. Кли (Boundedness and continuity of linear functionals. Klee V. L., Jr), Duke Math. J., 1955, **22**, № 2, 263—269 (англ.)

Теорема А. Пусть E — вещественное линейное метрическое пространство и C — его выпуклое множество. Тогда эквивалентны следующие утверждения: 1) Существует замкнутое линейное подпространство L с конечным дефектным числом в E (т. е. прямое дополнение к L в E имеет конечную размерность) такое, что $C \subset L$, причем множество K, состоящее из всевозможных разностей $x - y$, где $x, y \in C$, содержит непустое множество внутренних точек подпространства L. 2) Каждый линейный функционал в E, ограниченный на C, непрерывен.

Теорема В. Если E — вещественное полное линейное метрическое пространство и C — замкнутое выпуклое множество в E, то 1) и 2) эквивалентны следующему утверждению: каждый линейный функционал f в E, для которого $f(C) \neq (-\infty, \infty)$, непрерывен.

Даны некоторые приложения этих теорем и рассмотрен аналог теоремы В в комплексных пространствах.

М. М. Вайнберг

4641. О разложении некоторых линейных преобразований банахова пространства в ряд ортогональных конечномерных преобразований. Оден (Sur le développement de certaines transformations linéaires en série de transformations orthogonales et de rangs finis dans un espace de Banach. Audin Maurice), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 8, 832—835 (франц.)

Всякому разложению банахова пространства $\mathfrak{E}$ в прямую сумму двух подпространств соответствует разложение тождественного преобразования в сумму двух ортогональных проекторов. В частности, такое разложение можно сопоставить каждой точке Рисса (РЖМат, 1955, 2764) линейного ограниченного преобразования A, отображающего $\mathfrak{E}$ в себя. Один из двух проекторов, соответствующих точке Рисса λ, является всегда конечномерным и обозначается Q_λ. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то Q_{λ_1} и Q_{λ_2} ортогональны.

Формулируются без доказательств следующие теоремы:

1. Если $\mathfrak{E}$ слабо компактно, то всякая неубывающая последовательность проекторов P_n, ограниченных в совокупности, сходится сильно к некоторому непрерывному проектору P.

2. Если $\mathfrak{E}$ слабо полно, проекторы Q_n попарно орто-

гональны и все суммы $\Sigma_1^n Q_{\nu_i}$ ограничены в совокупности при любом выборе индексов ν_i, то ряд $\Sigma_1^\infty Q_n$ сходится сильно, и притом коммутативно, к некоторому непрерывному проектору.

Вторая из теорем, как отмечает автор, является непосредственным следствием одной теоремы Орлича. Обозначая через $\{\lambda_n\}$ последовательность точек Рисса, автор получает далее некоторые результаты о сильной сходимости ряда $\Sigma_1^\infty Q_{\lambda_n}$. Отмечается, что если сходимость имеет место, то преобразование $A' = A - \Sigma_1^\infty A Q_{\lambda_n}$ ортогонально ко всем AQ_{λ_n} и имеет, за исключением λ_n, те же сингулярные точки, что и A.

С. Н. Крачковский

4642. Неравенство для линейных операторов между пространствами L^p. Фуллертон (An inequality for linear operators between L^p spaces. Fullerton R. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 186—190 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть T — ограниченный линейный оператор из $L^p(R, \varphi)$ в $L^q(S, \psi)$, $1 \leqslant p, q < \infty$. Тогда существует вещественная функция $K(e, t)$, определенная для $e \in \mathfrak{F}(S)$ и $t \in R$, такая, что для всякого $x \in L^p(R, \varphi)$

$$Tx = (d/de) \int_R K(e, t)\, x(t)\, d\varphi,$$

где $K(e, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\int_E K(\cdot, t)\, d\varphi \in V^q(S, \psi)$ для каждого $E \in \mathfrak{F}(R)$, $\varphi(E) < \infty$;

2) для каждого $e \in \mathfrak{F}(S)$ $K(e, \cdot) \in L^{p'}(R, \varphi)$, где $p^{-1} + p'^{-1} = 1$;

3) $\| T \| \leqslant q\text{-вар}_S [(\int_R | K(e, t) |^{p'} d\varphi)^{1/p'}]$;

4) если $p \leqslant q$ и $\psi(S)$ ограничена, то $\int_R | K(e, t) |^{p'} d\varphi$ имеет ограниченную q-вариацию;

5) $$\frac{(q\text{-вар}_S \int_R | K(e, t) |^{p'} d\varphi)^{1/p'}}{\sup_\pi (\Sigma_{j=1}^n [\psi(e_j)]^{(p'-1)(q-1)})^{1/qp'}} \leqslant \| T \|,$$

где верхняя грань берется по всем конечным семействам π непересекающихся множеств из S, имеющих конечную положительную меру. В частности, если $\psi(S) \leqslant 1$ и $p \leqslant q$, то

$$[q\text{-вар}_S \int_R | K(e, t) |^{p'} d\varphi]^{1/p'} \leqslant \| T \|.$$

Определение пространств $L^p(R, \varphi)$ и $L^q(S, \psi)$ см. РЖМат, 1956, 579. Пространство $V^p(R, \varphi)$ определяется как пространство всех вполне аддитивных функций множества, заданных в $\mathfrak{F}(R)$ и обладающих тем свойством, что из $F \in V^p(R, \varphi)$ следует существование постоянного C, зависящего от F, такого, что

$$C_n = \sum_{i=1}^n (| F(e_i) |^p / \varphi(e_i)^{p-1} < C$$

для каждого конечного семейства $\{e_i\}$ непересекающихся измеримых подмножеств из $\mathfrak{F}(R)$ конечной положительной меры. $V^p(R, \varphi)$ — банахово пространство, если $\| F \| = p\text{-вар}_{\mathfrak{F}(R)} F(e) = \sup_\pi C_n$, где π — любая совокупность конечного числа непересекающихся множеств из R.

М. М. Вайнберг

4643. Сопряженная полугруппа. Филлипс (The adjoint semi-group. Phillips R. S.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 2, 269—283 (англ.)

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — вещественные или комплексные банаховы пространства и $y = T(x)$ ($x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{Y}$) — линейный оператор, для которого $\overline{\mathfrak{D}(T)} = \mathfrak{X}$. Сопряженным к T называется оператор $x^* = T^*(y^*) \in \mathfrak{X}^*$ ($y^* \in \mathfrak{Y}^*$), для которого $y^*(T(x)) \equiv x^*(x)$ ($x \in \mathfrak{D}(T)$). Вначале выясняются условия плотности $\mathfrak{D}(T^*)$ в $\mathfrak{Y}^*$ и условия существования и ограниченности оператора $(T^*)^{-1}$. В дальнейшем считается, что $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$. Пусть $T(s)$ ($0 \leqslant s < \infty$) — полугруппа линейных ограниченных операторов, для которой $T(s_1 + s_2) = T(s_1)\, T(s_2)$ ($s_1, s_2 \geqslant 0$), $T(0) = I$, для любого $x \in \mathfrak{X}$ $T(s)\, x$ непрерывно при $s > 0$ и $\int_0^1 \| T(\sigma)\, x \|\, d\sigma < \infty$. При этом вводится дополнительно условие

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \int_0^\infty \exp(-\lambda\sigma)\, T(\sigma)\, x\, d\sigma \equiv x \quad (x \in \mathfrak{X}). \qquad (1)$$

Сопряженной полугруппой $T^+(s)$ с инфинитезимальным оператором A^+ называется расширение $T^*(s)$ на пространство $\mathfrak{X}^+ = \overline{\mathfrak{D}(A^*)}$, где A — инфинитезимальный оператор полугруппы $T(s)$ (Пространство $\mathfrak{X}^+$ характеризуется также некоторыми другими способами). Доказывается, что если функция $\| T^*(s)\, x^* \|$ ($0 \leqslant s \leqslant 1$) для каждого $x^* \in \mathfrak{X}^*$ мажорируется интегрируемой функцией, то и $T^+(s)$ удовлетворяет условию (1) (в $\mathfrak{X}^+$); если же дополнительно $\lim_{\tau \to +0} \int_0^\tau T(\sigma)\, x\, d\sigma / \tau \equiv x$ ($x \in \mathfrak{X}$) или $\lim_{s \to +0} T(s)\, x \equiv x$ ($x \in \mathfrak{X}$), то и $T^+(s)$ обладает тем же свойством. Замыкание $\overline{A^+}$ представляет собой максимальное расширение A^* с областью определения и множеством значений в $\mathfrak{X}^+$. Норма $\| x \|' = \sup | x^+(x) |$ ($\| x^+ \| \leqslant 1$, $x^+ \in \mathfrak{X}^+$) топологически эквивалентна норме $\| x \|$; если же $\lim_{\lambda \to \infty} \| \lambda (\lambda I - \overline{A})^{-1} \| = 1$, то $\| x \|' = \| x \|$. Если выполнено указанное выше условие мажорируемости, то множества значений λ, для которых существуют ограниченные операторы $(\lambda I - \overline{A})^{-1}$ и $(\lambda I - \overline{A^+})^{-1}$, совпадают. Если этому условию мажорируемости удовлетворяет и $(T^+)^*$, то пространство $\mathfrak{X}$ с нормой $\| x \|'$ естественно вкладывается в $\mathfrak{X}^{++}$, причем для $\mathfrak{X}^{++} = \mathfrak{X}$ необходима и достаточна слабая компактность $(\lambda I - \overline{A})^{-1}$ в некотором смысле (включающем как частный случай обычную слабую компактность).

А. Д. Мышкис

4644. Проблема моментов и теория эрмитовых операторов. Котляр (El problema de los momentos y la teoria de operadores hermitianos. Cotlar Misch a), 2° symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Villavicencio-Mendoza, julio 1954, Montevideo, Centro Coop. cient., UNESCO América Latina, 1954, 71—85 (исп.)

Обзор основных этапов развития проблемы моментов и постановка ряда новых вопросов. Особое внимание уделено связи проблемы моментов с теорией эрмитовых операторов. В обзоре не нашли отражения исследования М. Г. Крейна по применению идей проблемы моментов к решению обратных задач для дифференциальных уравнений (Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, **16**, 293—324; РЖМат, 1953, 238; 1955, 3755). М. С. Лившиц

4645. О полноте системы конечномерных инвариантных подпространств пары дифференциальных операторов. Дашниц Л. С. (в подлиннике Д. С. Дашниц), Тр. Одесск. технол. ин-та, 1954, **6**, 163—169

Рассматривается пара дифференциальных операторов L и M, определенных на многообразии $D(L)$ функций $f(x)$, абсолютно непрерывных на (a, b) вместе со своими производными $(2\nu - 1)$-го порядка и удовлетворяющих некоторым граничным условиям $U_p(f) = 0$ ($p = 1, 2, \ldots, \nu$), причем $Lf \in L_2(a, b)$. Оператор L (порядка 2ν) — само-

сопряженный ($L^* = L$) и полуограниченный снизу, оператор M (порядка $2\mu < 2\nu$) — эрмитов.

Вводится замыкание $D[L]$ по Фридрихсу области $D(L)$ и скалярное произведение

$$(f, g)_1 = \sum_1^\infty |\lambda_k| (f, \varphi_k)\overline{(g, \varphi_k)} \quad (f, g \in D[L],$$

где $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{\varkappa} < 0 < \lambda_{\varkappa+1} \leqslant \ldots$ — все собственные значения оператора L (предполагается, что $\lambda = 0$ не является собственным значением L). Если $f \in D(L)$, $f \not\equiv 0$ и $Lf = \pi Mf$, то f называется собственной функцией пары (L, M), отвечающей собственному значению π. Подпространство Π пространства $L_2(a, b)$, принадлежащее $D(L)$, называется инвариантным подпространством пары операторов (L, M), если $M\Pi \subset L\Pi$.

Основной результат:

Собственные значения пары (L, M) вещественны, за исключением самое большее $\varkappa$ пар комплексносопряженных собственных значений. Если, кроме того, из условий $g \in D(L) \cap D(M^*)$, $Mg = 0$ следует, что $g = 0$, то линейная замкнутая в смысле нормы $\|\cdot\|_1$ оболочка конечномерных инвариантных подпространств пары (L, M) совпадает со всем пространством $D[L]$.

И. С. Иохвидов

4646. О спектральном разложении гипермаксимальных операторов, которые распадаются при разделении переменных (Первое сообщение). Кордес (Über die Spektralzerlegung von hypermaximalen Operatoren, die durch Separation der Variablen zerfallen. I. Mitteilung. Cordes Heinz Otto), Math. Ann., 1954, 128, № 4, 257—289 (нем.)

Изучается спектральное разложение для оператора в частных производных

$$Au = \frac{1}{h^1k^2 + h^2k^1}\left[-k^2\frac{\partial}{\partial x}\left(p^1\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \right.$$
$$\left. - k^1\frac{\partial}{\partial y}\left(p^2\frac{\partial u}{\partial y}\right) + (q^1k^2 + q^2k^1)u\right], \qquad (1)$$

где p^j, q^j, h^j, k^j зависят только от x при $j = 1$ и только от y при $j = 2$. В предыдущей работе (РЖМат, 1955, 5809) автор изучил тот случай, когда операторы, на которые распадается оператор A, имеют чисто точечный спектр. В реферируемой работе составные операторы могут иметь также и непрерывные спектры. Основной результат заключается в том, что при достаточно общих условиях спектральное разложение оператора A может быть построено из спектральных разложений составных операторов, т. е. в конечном счете из решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

В первых семи параграфах работы изучаются «разделимые» операторы в абстрактном сепарабельном пространстве Гильберта. Затем на основе абстрактных теорем в последнем, восьмом параграфе изучается спектральное разложение оператора (1). Б. М. Левитан

4647. О методе априорных границ. Шефер (Über die Methode der a priori-Schranken. Schaefer Helmut), Math. Ann., 1955, 129, № 5, 415—416 (нем.)

Пусть E — линейное локально выпуклое полное хаусдорфово пространство. Отображение ψ пространства E в себя называется вполне непрерывным, если оно непрерывно и если существует такая окрестность U нуля, что все множества $\overline{\psi(nU)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ бикомпактны. Множество $M \subset E$ называется ограниченным, если для любой окрестности U нуля найдется такое μ, что $M \subset \mu U$.

Теорема. Пусть ψ — вполне непрерывное отображение E в себя. Тогда уравнение $x = \lambda\psi(x)$ либо имеет решения при всех $\lambda \in [0,1]$, либо множество $\{x;\ x = \lambda\psi(x),\ 0 < \lambda < 1\}$ неограничено в E.

Доказательство заключается в сведении к принципу неподвижной точки А. Н. Тихонова (Math. Ann., 1935, 111, 767—776). М. А. Красносельский

4648. Степень отображения в банаховых пространствах и спектральная теория. Роте (Mapping degree in Banach spaces and spectral theory. Rothe Erich H.), Math. Z., 1955, 63, № 2, 195—218 (англ.)

Предлагается метод введения понятия степени отображения области банахова пространства, не использующий конечномерной аппроксимации отображения, являющейся основой построения теории степени отображения Лере — Шаудера (Успехи матем. наук, 1946, 1, № 3—4, 71—95). Вначале определяется индекс широкого класса линейных отображений по характеристикам их спектра. Этот индекс оказывается равным либо 1, либо —1. Рассматриваемые нелинейные отображения $f(x)$ ограниченной области D комплексного банахова пространства $\mathfrak{X}$ предполагаются дифференцируемыми по Фреше и удовлетворяющими ряду дополнительных ограничений. Предполагается, что уравнение $f(x) = y$, где $y \notin f(\overline{D} \setminus D)$, имеет в D конечное число решений. Каждому из этих решений x_i приписывается индекс, равный индексу линейного по h отображения — производной Фреше $D(x_i, h)$ отображения $f(x)$ в точке x_i. Степень отображения $f(x)$ области D относительно y определяется как сумма индексов решений x_i.

Доказывается ряд свойств введенного понятия. Более подробно оно изучается для случая комплексных пространств с сопряжением и для случая вещественных пространств. В случаях, когда определены и новое понятие степени и понятие степени отображения в смысле Лере — Шаудера, эти степени совпадают.

М. А. Красносельский

4649. Замечания о сингулярных точках функциональных уравнений. Грейвс (Remarks on singular points of functional equations. Graves Lawrence M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 1, 150—157 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$G(x, y) = 0, \qquad (1),$$

где $G(0,0) = 0$, x и y — переменные из некоторых банаховых пространств. Если дифференциал $L(dx) = d_xG(0,0; dx)$ имеет непрерывный обратный, то в силу теоремы о неявной функции (см. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М.—Л., 1951, стр. 316) уравнение (1) имеет единственное решение $x = x(y)$ в окрестности нуля. В случае, когда дифференциал $L(dx)$ не имеет обратного, возникает вопрос об оценке числа решений $x = x(y)$ уравнения (1) вблизи точки $x = 0$, $y = 0$. Для получения ответа на этот вопрос применяется метод, обобщающий на случай абстрактных уравнений теорию Ляпунова — Шмидта ветвления малых решений нелинейных интегральных уравнений. Аналогичный метод применялся в работе Бартла (РЖМат, 1954, 3734). В качестве примера рассмотрено эллиптическое уравнение с нелинейностями, удовлетворяющими определенным ограничениям. М. А. Красносельский

4650. Применение операторных ортогональных многочленов к решению неоднородных линейных уравнений. Воробьев Ю. В., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 89—96

Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H; E_λ — его спектральная функция; z_0 — фиксированный элемент H; $z_k = A^k z_0$

($k=0, 1, \ldots, n$); H_n — линейная оболочка z_k ($k=0, \ldots, n-1$); $\overline{z_n}$ — проекция z_n в H_n; H_z — линейная замкнутая оболочка $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$. Оператор A аппроксимируется действующими в H_n конечномерными операторами B_n, которые задаются формулами $B_n^k z_0 = z_k$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$), $B_n^n z_0 = \overline{z_n}$, $B_n = 0$ на $G_n = H \ominus H_n$. В предыдущей работе (РЖМат, 1954, 4844) автор использовал операторы B_n для приближенного определения спектра A.

Теорема 1. В H_z операторы B_n сильно сходятся к A.

То же верно для непрерывных функций операторов, а также для спектральных функций $E_{n\lambda}$ операторов B_n, если λ не есть собственное значение $A: \varphi(B_n) \to \varphi(A)$, $E_{n\lambda} \to E_\lambda$.

Уравнение

$$Ax = f \quad (f \in H_z) \tag{1}$$

приближенно заменяется уравнением

$$B_n x_n = f_n, \tag{2}$$

где f_n — проекция f на H_n.

Теорема 3. Если A — ограниченно обратимый оператор и его отрицательный спектр состоит из конечного числа конечнократных собственных значений, то решения x_n уравнений (2) сходятся к решению x^* уравнения (1).

Случай, когда $A = B - \lambda E$, B — вполне непрерывный оператор, был исследован Карушем (Karush W., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 839—851).

Пусть $f_n = F_{n-1}(A) z_0$, $P_n(\lambda)$ — ортогональный полином по весу $(E_\lambda z_0, z_0)$ степени n (РЖМат, 1954, 4844) и многочлен степени $n-1$

$$Q_{n-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[F_{n-1}(\lambda) - \frac{F_{n-1}(0)}{P_n(0)} P_n(\lambda)\right].$$

Показано, что

$$x_n = Q_{n-1}(A) z_0, \tag{3}$$

и приведена оценка для $x^* - x_n$. Отмечается, что при $f = f_n = z_0$ и для положительно определенного A x_n совпадает с первым приближением n-шагового метода наискорейшего спуска (Канторович Л. В., Успехи матем. наук, 1948, 3, № 6, 89—185; Бирман М. Ш., Успехи матем. наук, 1950, 5, № 3, 152—155). В предположении только ограниченной обратимости A предлагается формула, аналогичная (3), но более сложная.

М. Ш. Бирман

4651. Об одной гипотезе Капланского. Видав (Über eine Vermutung von Kaplansky. Vidav Ivan), Math. Z., 1955, 62, № 3, 330 (нем.)

Капланский высказал предположение о том, что в ассоциативном нормированном кольце коммутатор $c = ab - ba$ элементов a и b, перестановочный с a или b, является квазинильпотентным. Патнам (РЖМат, 1956, 1478) доказал это утверждение для кольца операторов в гильбертовом пространстве в том случае, когда c перестановочен с a и b. Автор доказывает эту теорему Патнама для произвольного ассоциативного нормированного кольца. А именно он получает оценку $\|c^n\| \leqslant |\lambda|^{-n} e^{2|\lambda| \|a\|} (2\|b\|)^n$ (λ — любой скаляр), из которой и следует результат.

Ф. В. Широков

4652. Топологизация поля $C(t)$. Вильямсон (On topologising the field $C(t)$. Williamson J. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 729—734 (англ.)

Рассматривается поле $C(t)$ рациональных функций переменного t над полем C комплексных чисел. Изучаются два способа введения топологии в $C(t)$ так, что все алгебраические операции в $C(t)$ оказываются непрерывными. В первой топологии $C(t)$ метризуемо, но не обладает линейными функционалами; вторая топология оказывается локально выпуклой. Из условия непрерывности умножения следует, как показано автором, что система окрестностей нуля не может быть ни слишком широкой, ни слишком узкой. Именно в этом случае всякая окрестность нуля содержит такую окрестность N, что для всякого $r \in C(t)$ $\sup_{\alpha r \in N} |\alpha| < \infty$. С другой стороны, если в некоторой топологии $C(t)$ есть линейное пространство и существует окрестность нуля, двойственная к ограниченному множеству функционалов, то умножение не является непрерывным в этой топологии. Отметим также следующий результат.

Пусть A — алгебра с делением над полем комплексных чисел C с топологией такой, что 1) существует хотя бы один ненулевой линейный функционал, 2) алгебраические операции непрерывны и 3) для всякого $\lambda_0 \in C$ существует натуральное $n(\lambda_0)$ такое, что $(\lambda - \lambda_0)^n \{(t - \lambda_0 e)^{-1} - (t - \lambda e)^{-1}\}$ ограничено вблизи λ_0, и существует n' такое, что $\lambda^{-n'}(t - \lambda e)^{-1}$ ограничено при достаточно больших $|\lambda|$ ($t \in A$, e — единица из A). Тогда $A = C$.

Ю. А. Шрейдер

4653. Алгебры Банаха, порожденные ограниченным линейным оператором. Томита (Banach algebras generated by a bounded linear operator. Tomita Minoru), Math. J. Okayama Univ., 1955, 4, № 2, 97—102 (англ.)

Элемент A нормированной алгебры $\mathfrak{R}$ называется порождающим (generator), если совокупность рациональных функций от A, имеющихся в $\mathfrak{R}$, плотна в $\mathfrak{R}$. Используя теорию нормированных алгебр И. М. Гельфанда (автор везде пишет Gelfund), автор показывает, что пространство максимальных идеалов алгебры, порождаемой элементом A, гомеоморфно ограниченному замкнутому множеству комплексных чисел. Если $\{u_n\}$ ($n = 1, 2 \ldots$) — дополнительные ограниченные связные открытые области, то замыкание рациональных функций от A с корнями вне областей $\{u_{n_k}\}$ дает подалгебру алгебры $\mathfrak{R}$; обратно, всякая подалгебра может быть получена таким способом. Если A — ограниченный оператор в банаховом пространстве, то множество максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{R}$, порожденной всеми ограниченными рациональными функциями от A, совпадает со спектром оператора A. Все подалгебры этой алгебры описываются указанным выше способом.

Г. Е. Шилов

4654. Теория кратности для операторных алгебр. Кейдисон (Multiplicity theory for operator algebras. Kadison Richard V.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 3, 169—173 (англ.)

Дается полная система унитарных инвариантов $*$-представления полного нормированного кольца с инволюцией $\mathfrak{A}$, содержащего единицу и удовлетворяющего условию $|x^*x| = |x|^2$ (C^*-алгебры, в терминологии американских авторов). Именно, каждому $*$-представлению кольца $\mathfrak{A}$ ставится в соответствие функция $\varphi(x)$ (функция кратности), аргумент которой пробегает действительные числа и бесконечные кардинальные числа, а значениями являются некоторые идеалы в совокупности всех борелевских множеств в X, где X — замыкание в слабой топологии в $\overline{\mathfrak{A}^H}$ совокупности всех неразложимых положительных функционалов f в $\mathfrak{A}$, удовлетворяющих условию $f(e) = 1$, а $\overline{\mathfrak{A}^H}$ — сопряженное пространство к совокупности $\mathfrak{A}^H$ всех эрмитовых элементов кольца $\mathfrak{A}$. В случае коммутативного кольца этими идеалами будут совокупности борелевских мно-

жеств меры нуль по отношению к некоторым борелевским мерам на X (спектральным мерам); полное определение функции $\varphi(x)$ в общем случае весьма сложно. Основной результат: Два представления кольца $\mathfrak{A}$ унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда отвечающие им функции кратности совпадают. Из этого результата получается как частный случай полная система унитарных инвариантов данного самосопряженного ограниченного оператора. Доказательства не приводятся. М. А. Наймарк

4655. Представления полупростых групп Ли. II. Харин-Чандра (Representations of semisimple Lie groups. II. Harish-Chandra), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 1, 26—65 (англ.)

Продолжение предыдущей статьи (РЖМат, 1955, 3086). Доказывается, что любое неприводимое представление комплексной полупростой группы Ли в банаховом пространстве инфинитезимально эквивалентно (в смысле предыдущей статьи) одному из представлений описываемого в работе класса. Результаты статьи были сообщены автором ранее (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1951, **37**, 691—694). М. И. Граев

4656. Представления полупростых групп Ли. III. Харин-Чандра (Representations of semisimple Lie groups. III. Harish-Chandra), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 2, 234—253 (англ.)

Задача статьи — определение характера неприводимого квазипростого (терминология ч. I (РЖМат, 1955, 3086)) представления связной полупростой группы Ли G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть A — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$ и $\{\psi_\alpha\}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$. По определению, оператор A имеет след, если для каждого такого базиса ряд $\Sigma_\alpha (\psi_\alpha, A\psi_\alpha)$ сходится в обычном смысле и сумма ряда не зависит от выбора базиса. Сумма ряда называется следом оператора A. Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция на группе G, равная нулю вне компактного множества; π — квазипростое неприводимое представление G в $\mathfrak{H}$. Доказывается, что оператор

$$T_f = \int f(x)\,\pi(x)\,dx,$$

где интегрирование ведется по мере Хара на группе, имеет след $T_\pi(f)$, являющийся обобщенной функцией. След T_π автор называет характером представления π. T_π инвариантен относительно внутренних автоморфизмов группы G; если два представления π_1 и π_2 эквивалентны, то $T_{\pi_1} = T_{\pi_2}$. Доказывается далее, что оператор T_f является оператором Гильберта — Шмидта, т. е. оператор $T_f^* T_f$ имеет след. Если $\pi_1, \ldots, \pi_q$ — конечная система квазипростых неприводимых представлений группы G, никакие два из которых не являются инфинитезимально эквивалентными, то характеры $T_{\pi_1}, \ldots, T_{\pi_q}$ линейно независимы. Два неприводимых унитарных представления эквивалентны тогда и только тогда, когда их характеры совпадают. В заключение выводится формула для сферических функций на комплексной полупростой группе (Впервые вывод этой формулы был проведен на примере комплексной унимодулярной группы И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, 36)). М. И. Граев

4657. Замечание к обобщению теоремы Боголюбова. Фёльнер (Note on a generalization of a theorem of Bogoliouboff. Følner Erling), Math. scand., 1954, **2**, № 2, 224—226 (англ.)

Показывается, что основные результаты предыдущей статьи автора (РЖМат, 1956, 578) могут быть усилены в том отношении, что плотное относительно конечного числа элементов множество E может быть заменено множеством с положительной верхней плотностью (заметим, что плотность множества относительно конечного числа элементов влечет положительность его нижней плотности, а тем более верхней). Ю. М. Березанский

4658. Доказательство теоремы об инвариантном среднем значении на почти периодических функциях. Никайдо (A proof of the invariant mean-value theorem on almost periodic functions. Nikaidô Hukukane), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 361—363 (англ.)

Приводится новое доказательство теоремы о существовании среднего значения для почти периодических функций на группе. При помощи известного приема (Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, М., Изд-во ин. лит., 1950) вопрос сводится к случаю компактной группы и непрерывных функций на ней.

Пусть G — компактная группа, E — полное локально выпуклое топологическое линейное пространство, E^G — линейное топологическое пространство с естественной топологией, составленное из непрерывных функций $f(g)$ $(g \in G)$ со значениями в E. Рассмотрим фиксированную функцию $\varphi \in E^G$ и обозначим через K_φ замкнутую выпуклую линейную оболочку в E^G функций $\varphi_a(g) = \varphi(ag)$ $(a \in G)$. Основной результат: для каждой $\varphi \in E^G$ K_φ содержит функцию, тождественно равную некоторому элементу из E. Доказательство опирается на один частный случай теоремы А. Н. Тихонова о неподвижной точке (автор приводит простое доказательство этого частного случая). Из сформулированной теоремы легко вытекает существование обычного среднего — инвариантной меры на компактной группе. Ю. М. Березанский

4659. Об универсально интегрируемых функциях. Лидер (On universally integrable functions. Leader Solomon), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 232—234 (англ.)

Рассматривается абстрактное пространство X и булева алгебра $\mathfrak{A}$ множеств E из X. Пусть ρ — конечный набор непересекающихся множеств $E_k \subset \mathfrak{A}$, образующих разбиение X. Эти наборы образуют структуру, если $\rho < \rho'$ означает, что ρ' есть измельчение ρ. Если F — действительная конечноаддитивная мера на $\mathfrak{A}$ и f — действительная функция на X, то полагаем

$$\int f\,dF = \lim_\rho \sum_\rho f(x_k)\,F(E_k), \qquad (1)$$

когда предел, понимаемый в смысле Мура — Смита, конечен и не зависит от выбора $x_k \in E_k$. Функция f называется универсально интегрируемой, если интеграл (1) существует для любой конечноаддитивной меры F на $\mathfrak{A}$.

Основной результат: Функция f универсально интегрируема тогда и только тогда, когда она является равномерным пределом ступенчатых функций, где под ступенчатой функцией понимается конечная линейная комбинация характеристических функций множеств системы $\mathfrak{A}$. В. И. Соболев

4660. Интегралы Стилтьеса в линейных пространствах. Мак-Нерни (Stieltjes integrals in linear spaces. MacNerney J. S.), Ann. Math., 1955, **61**, № 2, 354—367 (англ.)

Пусть S — пространство Банаха, B — пространство ограниченных линейных операторов из S в S. Рассматриваются заданные на отрезке $a \leqslant u \leqslant b$ функции со значениями в S или B и интегралы Стилтьеса

$$\int_a^b G(u)\cdot dh(u),\ \int_a^b F(u)\cdot dG(u)\cdot h(u),\ \int_a^b E(u)\cdot dF(u)\cdot G(u),$$

где $h \in S$; $E, F, G \in B$. Первые два интеграла суть пределы по норме соответствующих интегральных сумм, последний — предел в сильном смысле. Если, например, в последнем интеграле $E(u) \equiv 1$, то в написании интеграла эта функция опускается.

Оператор $M(s,t) \in B$ $(-\infty < s, t < \infty)$ называется гармоническим, если он, как функция от s и t, удовлетворяет некоторым условиям гладкости и если выполняются тождества

$$M(r,s)\,M(s,t) = M(r,t),\ M(s,s) = 1.$$

Через H обозначается класс всех гармонических операторов, через φ — класс функций $F(u) \in B$ $(-\infty < u < \infty)$, непрерывных и имеющих ограниченную вариацию на каждом конечном промежутке и таких, что $F(0) = 0$. Между классами H и φ устанавливается взаимно однозначное соответствие такое, что для соответствующих M и F соблюдается тождество

$$M(s,t) = 1 + \int_s^t dF(u)\cdot M(u,t).$$

Из дальнейших результатов, относящихся к гармоническим операторам, отметим следующие ($M(s,t)$ и $F(t)$ — соответствующие друг другу элементы из H и φ): а) если все значения $F(s)$ коммутируют попарно, то $M(s,t) = \exp\{F(t) - F(s)\}$; б) единственным локально ограниченным решением интегрального уравнения

$$f(s) = g(s) + \int_s^r dF(u)\cdot f(u)$$

(непрерывная $g(s) \in S$ задана) служит функция

$$f(s) = g(s) + \int_s^r d_u M(s,u)\cdot g(u).$$

Вводится понятие непрерывного произведения ${}_a\Pi^b\{1 + dF\}$ как предела произведений ${}_{i=1}\Pi^n\{1+\Delta F_i\}$ (сомножители выписываются в порядке возрастания индекса) и доказывается равенство $M(a,b) = {}_a\Pi^b\{1 + dF\}$. Далее рассматривается некоторое специальное нелинейное интегральное уравнение в терминах функций F, решаемое в терминах соответствующих функций M. Результаты, относящиеся к гармоническим операторам, обобщают результаты Уолла (РЖМат, 1955, 3786), рассматривавшего гармонические матрицы.

В последнем параграфе выводится необходимое и достаточное условие независимости криволинейного интеграла от пути. Полученное условие известно (см., например, работу референта: Уч. зап. ЛГУ, 1950, № 137, 59—154). М. К. Гавурин

4661. Замечание к теореме о перемешивании. Рыль-Нардзевский Ч., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1955, 3, № 6, 295—296

Замечание к теореме о перемешивании. Рыль-Нардзевский (A remark on the mixing theorem. Ryll-Nardzewski C.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1955, 3, № 6, 297—298 (англ.)

Пусть μ — мера, определенная на кольце B подмножеств пространства X, с $\mu(X) = 1$. Пусть T — отображение X в себя, измеримое и сохраняющее меру (т. е. если $E \in B$, то $T^{-1}(E) \in B$ и $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)$). T называется неразложимым, если каждое множество $E \in B$ такое, что $\mu((E - T^{-1}(E)) + (T^{-1}(E) - E)) = 0$, имеет меру 0 или 1. По определению, T — отображение со слабым перемешиванием, если для любых $E, F \in B$ $\lim_{j\in N} \mu(ET^{-j}(F)) = m(E)\,m(F)$, где N — последовательность плотности нуль.

Доказывается эквивалентность следующих трех условий: 1) отображение T со слабым перемешиванием; 2) отображение $T \times T(x,y) = (T(x), T(y))$ неразложимо относительно произведения мер $\mu \times \mu$; 3) если $f(T(x)) = \lambda f(x)$ (λ — комплексное), то $f(x) = \text{const}$.

Эта эквивалентность ранее была известна только для взаимно однозначного отображения T. R. Sikorski

4662. Стохастическая эргодическая теорема. Гладыш С., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, 2, № 9, 413—416

Стохастическая эргодическая теорема. Гладыш (A random ergodic theorem. Gładysz S.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1954, 2, № 9, 411—413 (англ.)

Пусть S и X — пространства с нормированными мерами m и μ ($m(S) = \mu(X) = 1$); T — отображение X в X, сохраняющее меру μ при взятии прообраза; $\Phi = \{\varphi_x\}_{x\in X}$ — семейство отображений S в S, сохраняющих (для каждого $x \in X$) меру m при взятии прообраза. Функция $\varphi_x(s)$ пары (s,x), отображающая произведение $S \times X$ (с мерой-произведением $m \times \mu$) в S, измерима. Формулируются (без доказательств) следующие эргодические теоремы:

Теорема I. Если $f(s,x) \in L^p(S \times X)$ $(p \geqslant 1)$, то

$$\lim \frac{1}{n}\,\Sigma_{k=1}^n f(\varphi_{T^{k-1}x} \cdots \varphi_{Tx}\,\varphi_x\ s,\ T^k x) = F(s,\ x) \in L^p$$

для почти всех (s,x) (а также в метрике $L^p(S \times X)$).

В формулировке следующей теоремы речь идет только о пространстве X.

Теорема II. Если $f(x) \in L^p(X)$, $q(x)$ — измеримая комплекснозначная функция и $|q(x)| = 1$, то для почти всех x (а также в метрике $L^p(X)$)

$$\lim \frac{1}{n}\,\Sigma_{k=1}^n q(x) \ldots q(T^{k-1}x)\,f(T^k x) = F(x) \in L^p(X),$$

$$q(x)\,F(Tx) = F(x);$$

если, кроме того, отображение T неразложимо, то $|F(x)| = a = \text{const}$, и если $a > 0$, то $\int_X \frac{f(x)}{F(x)}\,d\mu = 1$.

Теорема III (достаточно сложная по формулировке) является обобщением стохастической эргодической теоремы (Kakutani S., Proc. 2-nd Berkeley Symp., 1951, 247—261). Даны также критерии неразложимости и слабого перемешивания для семейства отображений. Во всех формулах заметки должно быть $n^{-1}\Sigma_{k=1}^n \ldots$ вместо $n^{-1}\Sigma_{k=0}^n \ldots$ C. Ryll-Nardzewski

4663. Произведение распределений. I. Кёниг (Multiplikation von Distributionen. I. König Heinz), Math. Ann., 1955, 128, № 5, 420—452 (нем.)

Проблема определения произведения распределений (Schwartz L., Théorie des distributions, I—II, Paris, 1950—1951) решается с помощью обобщенных распределений (РЖМат, 1953, 649).

Для элементов пространства $\mathfrak{F}$ обобщенных распределений, представимых в виде $a = \Sigma_0^m f_k z^k$, где $f_m(x) \not\equiv 0$, и функций с непрерывной $(m-1)$-й производной определяется внутреннее произведение

$$ga = \Sigma_{k=0}^m (\Sigma_{l=k}^m (-1)^{l-k} C_l^k\, g^{(l-k)} f_l)\, z^k \in \mathfrak{F},$$

которое обобщает определенное Шварцом произведение распределения конечного порядка на соответствующее число раз дифференцируемую функцию (Гальперин И., Введение в теорию обобщенных функций. М., Изд-во ин. лит., 1954, § 4). Изучается возможность определения произведения любых обобщенных распределений. Такое произведение естественно считать билинейной операцией, отображающей $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ в некоторое линейное

пространство $\mathfrak{P}$ и удовлетворяющей следующим условиям:
I. $\mathfrak{F}$ изоморфно подпространству пространства $\mathfrak{P}$.
II. Для $S \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$ определено билинейное произведение $S \circ \mathfrak{A}$.
III. Если S, $T \in \mathfrak{F}$ имеют в $\mathfrak{F}$ внутреннее произведение $S \cdot T$, то $S \circ T$ совпадает с $S \cdot T$.
IV. В $\mathfrak{P}$ определена операция дифференцирования $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$, совпадающая на элементах $S \in \mathfrak{F}$ с операцией дифференцирования, введенной в $\mathfrak{F}$. При этом $(S \circ \mathfrak{A})' = S' \circ \mathfrak{A} + S \circ \mathfrak{A}'$.
V. Для каждой ограниченной области $\Delta \subset (-\infty, \infty)$ существуют пространство $\mathfrak{P}_\Delta$ и отображение $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_\Delta$, которое элементам $S \in \mathfrak{F}$ ставит в соответствие их «рестрикции» S_Δ на Δ, определенные в пространстве $\mathfrak{F}$. По «рестрикциям» $\mathfrak{A}_\Delta$ с произвольно мелкими Δ элемент $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$ однозначно восстанавливается так же, как любой элемент $S \in \mathfrak{F}$.

Основной результат: Произведение $S \circ T$ двух распределений S, $T \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда является распределением, когда S и T имеют в $\mathfrak{F}$ внутреннее произведение; при этом оба произведения совпадают.

Я. И. Житомирский

4664 К. Лекции по линейным операторам. Т. I. Введение в линейный анализ. Фикера Lezioni sulle trasformazioni lineari. Vol. I: Introduzione all', analisi lineare. Fichera Gaetano, Trieste, Ist. matem. Univ., 1954, xviii, 506 p.), Bibliogr. ital., 1955, 89, № 647, 132 (итал.)

4665 Д. Топологическая эквивалентность некоторых пространств Банаха. Кадец М. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1955

4666 Д. *FK*-пространства в теории функций. Целлер (*FK*-Räume in der Funktionentheorie. Zeller Karl. Diss. Math.-naturwiss. F., Tübingen, 1953, III, 87 gez. Bl., Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, B, № 15, 1088 (нем.)

4667 Д. О некоторых методах приближенного решения операторных уравнений. Чернышенко Э. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1955

4668 Д. Разложение по собственным функциям диссипативных ядер. Мукминов Б. Р. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Одесса, 1955

4669 Д. Об исследовании оператора типа Шредингера в случае наличия особенностей у потенциала. Бурнат М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1955

См. также: 4401, 4402, 4456, 4513, 4518, 4525 Д, 4677, 4849, 4899

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4670. Экстремум математического ожидания функции независимых случайных величин. Хёффдинг (The extrema of the expected value of a function of independent random variables. Hoeffding Wassily), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 2, 268—275 (англ.)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с $Mg_i^j(\xi_j) = c_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, n$ и $P\{A_j \leqslant \xi_j \leqslant B_j\} = 1$ $(-\infty \leqslant A_j < B_j \leqslant \infty)$, где c_{ij}, A_j и B_j — заданные постоянные. Обозначим через C класс функций распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)$ таких n-мерных случайных величин $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Подкласс класса C, в котором каждая ξ_i принимает конечное число значений, обозначим C^*, а подкласс класса C, в котором каждая ξ_i принимает не более m значений, обозначим C_m. Ищутся те распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C$, которые соответствуют экстремальным значениям (например, максимуму) математического ожидания $\varphi(F) = MK(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ некоторой данной функции $K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Доказаны теоремы:

Теорема 2.1. $\sup_{F \in C^*} \varphi(F) = \sup_{F \in C_{k+1}} \varphi(F)$.

Показано, что в этой теореме нельзя заменить $k+1$ на меньшее число, если не вводить ограничения на $g_i^j(x)$ и $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Вводятся следующие условия:

Условие А. Для любой $F \in C$ и $\varepsilon > 0$ существует такая $F^* \in C^*$, что

$$d(F, F^*) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_j(x) - F_j^*(x)| < \varepsilon.$$

Условие В. $\varphi(F)$ непрерывен в метрике $d(F, G)$.

Теорема 2.2. Если условия А и В выполнены, то

$$\sup_{F \in C} \varphi(F) = \sup_{F \in C_{k+1}} \varphi(F).$$

Теорема 3.1. Условие А выполняется, если класс C определяется с помощью $g_i^j(x) = x^{m_{ij}}$, где m_{ij} — положительные целые числа.

Теорема 4.1. Условие В выполняется, если $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть характеристическая функция для такого борелевского множества S, что каждое множество

$S_j(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = \{x_j : x \in S, x_h$ фиксированы для $h \neq j\}$ есть объединение конечного числа интервалов (может быть, бесконечной длины).

В частности, условию последней теоремы удовлетворяет функция

$$K\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 + x_2 + \ldots + x_n < t, \\ 0, & \text{если } x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant t. \end{cases}$$

Это дает возможность изучать экстремальные значения функции распределения суммы независимых случайных величин в случае, если фиксированы некоторые моменты слагаемых. Б. А. Севастьянов

4671. О вероятностях значений функций. Применение к кристаллографии. Берто (Sur la probabilité de valeurs de fonctions. Application à la cristallographie. Bertaut Félix), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 2, 152—154 (франц.)

Функции распределения. Наиболее вероятные значения параметров. Применение к прямому определению атомной структуры в кристаллографии. Берто (Fonctions de répartition. Parametres les plus probables. Application à la determination. directe des structures atomiques en cristallographie. Bertaut Felix), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 3, 272—274 (франц.)

Статистика комплексных функций. Применение к кристаллографии. Берто (Statistique des fonctions complexes. Application à la cristallographie. Bertaut Félix), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 9, 938—940 (франц.)

Приводятся формулы (имеющие в тексте формальный смысл) для плотности распределения $P(A_1, \ldots, A_m)$ значений m вещественных функций $F_k(x_1, \ldots, x_n)(k=1, \ldots, m)$ (первая заметка) и для совместной плотности распределения $P(A_1, A_2, \ldots, A_m, x_1, \ldots, x_n)$ значений функций и значений независимых переменных (вторая заметка). Эти формулы получены с помощью разложения δ—функции Дирака в ряд по полиномам Эрмита. В третьей заметке соответствующие выражения обобщаются на комплекснозначные функции. И. И. Гихман

4672. Обобщение одной теоремы Хинчина. Фиш (A generalization of a theorem of Khintchin. Fisz M.), Studia math., 1954, 14, № 2, 310—313 (англ.)

Две функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ называются однотипными, если существуют такие постоянные $A>0$, B, что тождественно $G(x)=F(Ax+B)$. Референтом была доказана (Изв. н.-и. ин-та матем.-мех. Томского ун-та, 1937, 1, 261—262) следующая теорема: пусть при $n=1, 2, \ldots$ функции распределения $F_n(x)$ и $G_n(x)$ невырождены и однотипны; если тогда, при $n\to\infty$, $F_n(x)\to F(x)$, $G_n(x)\to G(x)$ и если функции $F(x)$ и $G(x)$ невырождены, то они также однотипны. В настоящей статье дается многомерное обобщение этой теоремы. Доказательство приводится полностью.

В другой статье (см. РЖМат, 1956, 3182) автор применяет эту теорему к задаче отыскания класса всех предельных законов для последовательностей многомерных распределений. А. Я. Хинчин

4673. Одна предельная теорема теории вероятностей и уравнение теплопроводности. Одданака (確率論における或る極限定理と熱傳導の方程式について. 小田中敏男), 電氣試驗所彙報 (Дэнки сикэнсё ико, Bull. Electrotechn. Lab)., 1954, 18, № 9, 19—23 (япон.; рез. англ.)

Автор доказал, используя уравнение теплопроводности, несколько предельных теорем о максимуме сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых имеет среднее 0 и стандартное отклонение 1. Из резюме автора

4674. О дифференцируемости переходных вероятностей в однородном по времени марковском процессе со счетным числом состояний. Ван Шоу-жэнь (關於具有可數無窮個情況的時齊的馬爾可夫過程的傳遞概率的可微分性. 王壽仁), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 3, 359—364 (кит.; рез. англ.)

Желая доказать, что переходные вероятности $p_{ij}(t)$ однородного марковского процесса со счетным числом состояний при $t\geqslant 0$ имеют правые производные, каждая из которых ограничена сверху, автор не замечает, что неравенство (13) $p_{ij}(t_0+t)\geqslant np_{ij}(t_0+h)(1-3\varepsilon)\ i\neq j$ ($\varepsilon>0$ и $t>0$ малы, $h>0$, $nh<t$), на котором основано его доказательство, при $p_{ij}(t_0)\neq 0$ противоречит очевидному требованию $p_{ij}(t_0+t)\leqslant 1$. Ошибка при выводе этого неравенства допущена на стр. 362, 8 строка сверху, где автор, механически переносит рассуждение А. Н. Колмогорова (Уч. зап. МГУ, 1951, 4, 53—64), справедливое при $t_0=0$, на случай произвольного неотрицательного t_0, складывает вероятности пересекающихся событий, как если бы они не пересекались. А. А. Юшкевич

4675. О дифференцируемости переходных вероятностей в однородном во времени марковском процессе со счетным числом состояний. Ван Шоу-жэнь (對„關於具有可數無窮個情況的時齊的馬爾可夫過程的傳遞概率的可微分性“ 的更正. 王壽仁), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1955, 5, № 2, 285 (кит.; рез. англ.)

Отмечается ошибка, допущенная в статье (реф. 4674).

4676. Случайные интегралы уравнения теплопроводности на бесконечном стержне. Кампе-де-Ферье (Intégrales aléatoires de l'équation de la chaleur dans une barre unfinie. Kampé de Fériet Joseph), C. r. Acad. Sci., 1955, 240, № 7, 710—712 (франц.)

Пусть Ω — некоторое пространство элементарных исходов, $\mathfrak{F}$ — борелевское поле множеств в Ω и μ — мера на $\mathfrak{F}$. m — мера Лебега на прямой X. Действительная функция $f(x, \omega)$ ($x\in X$, $\omega\in\Omega$) относится к классу $\mathfrak{L}^p(\alpha)$, если (H_1) $f(x, \omega)$ $m\times\mu$ измерима; (H_2) $f(x, \omega)\in L^p(\Omega, \mu)$ для всех $x\in X$; (H_3) $\alpha(x)\int|f(x, \omega)|^p d\mu\in L^1(X, m)$.

Функция $u(x, t)\in Ch$ в открытой области Δ плоскости (x, t), если а) u и ее производные u_x, u_{xx}, u_t непрерывны в Δ, б) $u_t=u_{xx}$.

Теорема. Пусть $f\in\mathfrak{L}^p(e^{-ax^2})$ для некоторого $a\geqslant 0$, тогда интеграл

$$u(t, x, \omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y, t)f(y, \omega)\,dy; \qquad (1)$$

$$k(x, t)=(4\pi t)^{-1/2}e^{-x^2/4t}$$

принадлежит классу Ch в полосе $0<t<4a$ для всех $\omega=\Omega-\Lambda$, $\mu(\Lambda)=0$. Для $\omega_0\in\Omega-\Lambda$, $\lim\limits_{t\to+0} u(t, x, \omega_0)=f(x, \omega_0)$ при $x\in X-E(\omega_0)$, $m(E(\omega_0))=0$.

На основании (1) можно определить смешанные моменты $u(t, x, \omega)$, зная моменты $f(x, \omega)$. А. В. Скороход

4677. Характеризация условных математических ожиданий как преобразований функциональных пространств. Мой (Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces. Chen Moy Shu-Teh), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 1, 47—63 (англ.)

Пусть задано поле вероятностей $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$. Пусть $\mathfrak{S}$ — пространство, определенных на Ω, $\mathfrak{B}$-измеримых неотрицательных функций (значение $+\infty$ допускается; функции из $\mathfrak{S}$ считаются равными, если они совпадают почти всюду). Пусть P — класс линейных преобразований T, переводящих $\mathfrak{S}$ в $\mathfrak{S}$ и обладающих свойствами: 1) если x ограничено, то и Tx ограничено, 2) при любых $x\in\mathfrak{S}$, $y\in\mathfrak{S}$ $T(xT(y))=(Tx)(Ty)$, 3) если $x_n\in\mathfrak{S}$ и $x_n\to x$ почти всюду, то $Tx_n\to Tx$ почти всюду. Обозначим через $E\{z\,|\,\mathfrak{B}_1\}$ условное математическое ожидание функции $z\in\mathfrak{S}$ относительно некоторого борелевского поля $\mathfrak{B}_1$ (т. е. $\mathfrak{B}_1$-измеримую функцию такую, что $\int\limits_B E\{z\,|\,\mathfrak{B}_1\}\,d\mu=\int\limits_B z d\mu$ для любого $B\in\mathfrak{B}_1$. Доказывается, что P совпадает с классом преобразований вида $Tx=E\{xg\,|\,\mathfrak{B}_T\}$, где $\mathfrak{B}_T\in\mathfrak{B}$ и g — некоторая неотрицательная, $\mathfrak{B}$-измеримая функция, для которой $E\{g\,|\,\mathfrak{B}_T\}$ ограничено. Аналогичный результат выводится также для преобразований пространства $L^p(\Omega, \mu)$, $p\geqslant 1$.

Указывается на связь рассмотренной задачи с проблемой осредненния в теории турбулентности. Р. Л. Добрушин

4688. **О вероятности перемещения (частичек) в теории броуновского движения. V, VI. Хасидзумэ** (ブラウン運動論に於ける經路の確率について. V. VI. 橋爪夏樹), 物性論研究 (Буссэйрон кэнкю), 1955, № 87, 109—119; № 88, 11—20 (япон.)

4679 К. **Введение в теорию случайных процессов. Методы и применения. Бартлетт** (An introduction to stochastic processes, with special reference to methods and applications. Bartlett Maurice Stevenson. Cambrige, Cambridge univ. press, 1955, xiv, 312 p., tabl. diagrs, 35 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 276, 9 (англ.)

4680 К. **Основы теории вероятностей** (Учеб. пособие). Под ред. А. М. Майнзильбера. 2-е изд. **Андреев П. П.** Всес. заоч. ин-т сов. торговли, М., 1955, 100 стр. с черт. Беспл.

4681 К. **Теория вероятностей; основания, случайные последовательности. Лоэв** (Probability theory; foundations, random sequences. Loeve Michel Moise, Van Nostrand, 1955. 515 p., 12 doll.), Cumul. Book Index, 1955, 58, № 2, 54 (англ.)

4682 К. **Теория вероятности. Учебник для вузов. Реньи** (Valószínűségszámitás. Egyetemi tankönyv. Rényi Alfréd, Budapest. Tankönyvkiadó, 1954 (1955), 746 l., ill., 107—112 Ft), Magyar nemzett bibliogr., 1955, № 2, 54 (венг.)

4683 Д. **О локальной безграничной делимости марковских процессов. Мартынов А. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

4684. **Оценки по методу минимального расстояния в непараметрических стохастических разностных уравнениях. Вольфовиц** (Estimation by the minimum distance method in nonparametric stochastic difference equations. Wolfowitz J.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 203—217 (англ.)

Предлагаемый метод получения статистических оценок неизвестных значений параметров основан на минимизации расстояния между двумя соответствующим образом построенными функциями распределения.

Из них одна строится по эмпирическим данным, а другая содержит величины, определяемые требованиями минимизации и служащие оценками неизвестных параметров. Рассматриваются три задачи статистической оценки параметров по наблюденным значениям случайных величин x_i: а) оценить параметр α, $|\alpha|<1$, в системе уравнений $x_i = u_i + \alpha u_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$; б) оценить параметр β, $|\beta|<1$, в соотношениях $y_i = \beta y_{i-1} + u_i$, $x_i = y_i + v_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где $\{y_i\}$ — стационарная последовательность; в) оценить параметр γ, $|\gamma|<1$, в соотношениях $x_i = \gamma x_{i-1} + u_i$, где $\{x_i\}$ — стационарная последовательность. Здесь $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ две последовательности независимых, одинаково распределенных случайных величин. Доказывается существование оценок, сходящихся с вероятностью единица при $n \to \infty$ к точному значению определяемого параметра.

В замечании к работе указывается, что автор нашел более простые доказательства применимости метода минимизации расстояния к значительно более общему классу задач. И. И. Гихман

4685. **Проблема оценок при испытаниях по количественному признаку. Эйтчисон, Браун** (An estimation problem in quantitative assay. Aitchison J., Brown J. A. C.), Biometrika, 1954, 41, № 3—4, 338—343 (англ.)

Пусть результаты n независимых наблюдений $u_1, \ldots, u_n$ удовлетворяют уравнениям $u_i = HP(\alpha + \beta x_i) + \varepsilon_i$, где H, α и β — неизвестные постоянные, $P(y)$ — функция нормального распределения с параметрами (0,1) и ε_i — взаимно независимые нормальные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией σ^2, не зависящей от x. Проблема получения оценок параметров H, α и β для этого случая рассматривалась в работе Финни (Finney D. J., Probit analysis, Cambridge University Press, 1952, 2 ed.). Авторы замечают, что в практически интересных задачах дисперсия Du зависит от x и поэтому модель Финни оказывается мало применимой. Утверждается, что иногда более удобной является модель, описываемая формулой $u_i = HP(\alpha + \beta x_i)\, e^{\varepsilon_i}$. (В этом случае коэффициент вариации для u_i оказывается постоянным.) Излагается процедура для получения оценок параметров H, α и β, соответствующая предложенной модели. К работе прилагаются таблицы, упрощающие вычисления. Л. Н. Большев

4686. **Критерий Крамера — Смирнова в параметрическом случае. Дарлинг** (The Cramer — Smirnov test in the parametric case. Darling D. A.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 1, 1—20 (англ.)

Получен ряд результатов, касающихся предельного распределения критерия ω^2, когда исследуемое распределение зависит от эмпирически определяемого параметра. Пусть исследуемая случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения $F(x, \theta)$, зависящую от параметра θ; θ_0 — истинное значение θ, $\hat{\theta}$ — оценка θ, полученная на основании n независимых наблюдений ξ, и $F_n(x)$ — соответствующая эмпирическая функция распределения. Рассматриваются величины $\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x, \theta_0)]^2\, dF(x, \theta_0)$ и $c_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F(x, \hat{\theta}) - F_n(x)]^2\, dF(x, \hat{\theta})$. Основные результаты автора состоят в следующем (мы не приводим всех условий, при которых справедливы эти теоремы):

1. Если оценка $\hat{\theta}$ параметра θ такова, что $nM(\hat{\theta} - \theta_0)^2 \to 0$, то при $n \to \infty$ предельное распределение для ω_n^2 и c_n^2 одно и то же.

2. Если $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)$ имеет предельное нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2, то предельное распределение для c_n^2 совпадает с распределением $\int_0^1 y^2(t)\, dt$, где $y(t)$ — некоторый нормальный марковский стохастический процесс.

3. Если параметр θ оценивается достаточно регулярным методом (например, методом максимального правдоподобия), то $\lim_{n\to\infty} M \exp itc_n^2 = [D(zit)]^{-1/2}$, где $D(z)$ — определитель Фредгольма некоторого интегрального уравнения.

Следует заметить, что аналогичные результаты были доложены И. И. Гихманом на научной сессии Киевского университета в 1953 г. (Тезисы докладов X научной сессии КГУ им. Т. Г. Шевченко; сек. матем., 1953, Изд-во КГУ). Б. В. Гнеденко

4687. **Верхняя граница для отклонения распределения статистики Вилкоксона от нормального в общем случае. Стокер** (An upper bound for the deviation from normality of Wilcoxon's test statistic for the two-sample problem in the general case. Stoker David Johannes), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 305—306 (англ.)

4688. **Заметка о статистических выводах, касающихся некоторых непрерывных стохастических процессов. Сегути, Икеда** (Note on the statistical inferen-

ces of certain continuous stochastic processes. Seguchi Tsunetami, Ikeda Nobuyuki), Mem. Fac. Sci. Kūsyū Univ., 1954, A8, № 2, 187—199 (англ.)

Рассматривается случайный процесс $x(t)$ с $Ex(t)=0$ и корреляционной функцией $r(t, s)=E\{x(t)x(s)\}$ такой, что:
1. $r(t, s)=\varphi(t)\psi(s)$, $t\geqslant s$, φ и ψ — линейно независимые функции, ограниченные и непрерывные в каждом конечном интервале.
2. $r(t, s)$ при $t\neq s$ удовлетворяет по t дифференциальному уравнению второго порядка $L_t[y]\equiv[p(t)y']'+q(t)y=0$ ($p(t)$ и $q(t)$ — дифференцируемые функции, причем $p(t)>0$).
3. $\lim\limits_{\substack{u\to t\\ v\to t}}\left[\frac{\partial r(t, u)}{\partial u}-\frac{\partial r(t, v)}{\partial v}\right]=\frac{\alpha}{p(t)}$,

где α — постоянная; ряд задач, касающихся экстраполирования и фильтрации такого процесса, ранее рассматривался Долфом и Вудбэри (Dolph C. L., Woodbury M. A., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, № 3, 519—550). Доказывается, что если многомерные распределения вероятностей процесса $x(t)$ — гауссовские, то он будет марковским процессом, сводящимся к винеровскому при помощи простого преобразования оси времени.

Далее для процесса $x(t)$ даются в явном виде решения задач: а) о наилучшем (в смысле метода наименьших квадратов) линейном экстраполировании и интерполировании, б) о наилучшей несмещенной линейной оценке среднего значения m процесса $y(t)=x(t)+m$ по наблюденным значениям $y(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant T$.

В случае, когда процесс $x(t)$ — гауссовский, доказывается, что построенная оценка для m является одновременно оценкой наибольшего правдоподобия и строится равномерно наиболее мощный критерий для проверки «нулевой гипотезы» $m=0$ при альтернативной гипотезе $m>0$.

Вывод результатов, касающихся линейных экстраполирования, интерполирования в оценке среднего значения, опирается на решение некоторых линейных интегральных уравнений, родственных рассматривавшимся в цитированной выше работе Долфа и Вудбэри; построение оценки наибольшего правдоподобия и критерия согласия проводится сходно с аналогичными построениями (относящимися к стационарному случаю) в работе Гренандера (Grenander U., Arkiv. Math., 1950, 1, № 3, 195—277). А. М. Яглом

4689. Статистическая оценка параметров в марковских процессах. Ланге (Statistical estimation of parameters in Markov processes. Lange O.), Colloq. math., 1955, 3, № 2, 147—160 (англ.)

Через $f(t_0, x_0, t_k, x_k, \theta_1, \theta_2, \ldots)$ обозначим переходную вероятность или плотность в марковском процессе, где x_0 — состояние в момент t_0, x_k — состояние в момент $t_k>t_0$, θ_1, θ_2 ... — параметры.

Пусть имеется n следующих независимых реализаций процесса: в моменты времени $t_0^{(r)}, t_1^{(r)}, \ldots, t_k^{(r)}$ наблюдались состояния $x_0^{(r)}, x_1^{(r)}, \ldots, x_k^{(r)}$, $r=1, 2, \ldots, n$. Тогда $L=\prod_{r=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} f(t_{i-1}^{(r)}, x_{i-1}^{(r)}, t_i^{(r)}, x_i^{(r)}, \theta_1, \theta_2 \ldots)$ будет функцией правдоподобия. В статье находятся оценки наибольшего правдоподобия $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \ldots$ из условия $L=\max$ для случаев простого пуассоновского процесса, броуновского движения, процесса «рождения» и процесса «смерти», а также для простой цепи Маркова. Вычисляются математические ожидания и дисперсии полученных оценок. Б. А. Севастьянов

4690. О проблеме конструкции ортогональных строев. Сейден (On the problem of construction of orthogonal arrays. Seiden Esther), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 1, 151—156 (англ.)

Указывается метод построения матриц особого типа, составленных из элементов некоторого множества Σ. Эти матрицы введены Бозе и Бушем для целей факторного анализа (Bose R. C., Bush K. A., Ann. Math. Statistics, 1952, 23, 508—524). $k\times N$ матрица A называется «ортогональным строем» объема N с k «ограничениями», s уровнями и силы t, если каждая $t\times N$ подматрица A содержит все возможные $t\times 1$ вертикальные векторы с одной и той же частотой λ ($N=\lambda s^t$); λ называется индексом строя. Н. В. Смирнов

4691. О некоторых критериях зависимости для выборок из биполярного нормального распределения. Рой (On some tests of significance in samples from bipolar normal distributions. Roy J.), Sankhyā, 1954, 14, № 3, 203—210 (англ.)

4692. Ранговый анализ опыта с неполными блоками. II. Дополнительные таблицы для метода парных сравнений. Брэдли (Rank analysis of incomplete block designs. II. Additional tables for the method of paired comparisons. Bradley Ralph Allan), Biometrika, 1954, 41, № 3—4, 502—537 (англ.)

Таблицы, позволяющие находить вероятностную оценку результатам опыта по методу парных сравнений в дисперсионном анализе (Bradley R. A., Terry M. E., Rank analysis of incomplete block designs. I. The method of paired comparisons, Biometrika, 1952, 39). Н. В. Смирнов

4693. О комбинаторных размещениях. Маджумдар (On combinatorial arrangements. Majumdar Kulendra N.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 662—664 (англ.)

«Балансированным» планом опыта с неполными блоками называется размещение по b блокам (множествам) объектов, принадлежащих к v различным разновидностям, удовлетворяющее следующим требованиям: 1) нет двух тождественных блоков (т. е. содержащих те же разновидности); 2) каждая разновидность встречается не более чем один раз в блоке; 3) каждая пара разновидностей встречается всегда ровно λ раз ($\lambda>0$); 4) каждый блок содержит $k<v$ разновидностей. Такие размещения играют важную роль в современном дисперсионном анализе. Из допущений 1—4 следует, что 5) каждая разновидность встречается во всем опыте одинаковое число $r=\frac{\lambda(v-1)}{k-1}$ раз. В общем случае из 1), 2), 3), 5) не следует 4); однако для случая $b=v$ это справедливо, как показал Райзер (Ryser H. J., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 422—424). Автор указывает условия, когда теорему Райзера можно распространить на случай $b\neq v$. Н. В. Смирнов

4694. Метод инверсии при построении частично сбалансированных с неполными блоками планов (B. U. B) из соответствующих B. U B. планов. Рой (On the method of inversion in the construction of partially balanced incomplete block designs from the corresponding B. U. B. designs. Roy Purnendu Mohon), Sankhyā, 1954, 14, № 1—2, 39—52 (англ.)

4695. Упрощенное выражение для дисперсии χ^2 в таблице сопряженности признаков. Досон (A simplified expression for the variance of the χ^2-function on a contingency table. Dawson Reed B.), Biometrika, 1954, 41, № 1—2, 280 (англ.)

4696. Некоторые ряды планов с частично сбалансированными неполными блоками. Спротт (Some series of partially balanced incomplete block designs. Sprott D. A.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 3, 369—381 (англ.)

4697. Некоторые классы частично сбалансированных планов. Бос, Клатуэрти (Some classes of partially balanced designs. Bose R. C., Clatworthy W. H.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 2, 212—232 (англ.)

4698. Применение кронекеровского умножения матриц к статистическим планам. Вартак (On an application of Kronecker product of matrices to statistical designs. Vartak Manohar Narhar), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 3, 420—438 (англ.)

4699. Использование нормальной вероятностной бумаги. Чернов, Либерман (Use of normal probability paper. Chernoff Herman, Lieberman Gerald J.), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, 49, № 268, 778—785 (англ.)

Рассматриваются вопросы графической оценки математического ожидания a и среднего квадратичного отклонения σ нормальной случайной величины по ее n независимым наблюдениям. Пусть $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n$ — вариационный ряд, составленный из n наблюденных значений, и пусть задано n чисел p_i, удовлетворяющих неравенствам $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < 1$. Для оценки a и σ предлагается нанести на вероятностную бумагу точки с координатами (u_i, p_i) и произвести линейное сглаживание способом наименьших квадратов (при практических вычислениях авторы рекомендуют произвести сглаживание визуально). В качестве оценки $\hat{a}$ для a берется абсцисса точки сглаживающей прямой, соответствующая $p = 0{,}5$, а в качестве оценки $\hat{\sigma}$ для σ — разность абсцисс, соответствующих точкам $p = 0.8413$ и $p = 0{,}5$. Обсуждается вопрос: какими должны быть числа p_i, чтобы описанные оценки обладали заранее заданными свойствами? Для $n = 2\,(1)\,10$ приведены таблицы p_i для случаев: 1) $p_i = i/(n+1)$, 2) $p_i = (i - {}^1/_2)\,n$, а также для случаев, когда требуется, чтобы 3) $\hat{\sigma}$ была линейной относительно всех u_i и $D\hat{\sigma} = \min$, 4) $\hat{\sigma}$ была несмещенной, линейной относительно всех u_i и $D\hat{\sigma} = \min$. Для всех рекомендованных значений p_i $\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$. К работе приложены таблицы эффективностей предложенных оценок. Л. Н. Большев

4700. Оценка погрешности при использовании биномиальной бумаги Мостеллера-Такки. Вицорке (Fehlerabschätzung zum Binomialpapier von Mosteller-Tuckey. Wiezòrke Bernhard), Mitteilungsbl. math. Statist., 1955, 7, № 1, 66—70 (нем.)

4701. О комбинированной проблеме Бейса – Бернулли. Крысицкий (O połączonym zagadnieniu Bayesa i Bernoulliego. Krysicki W.), Zastosow. mat., 1955, 2, № 2, 172—178 (польск.; рез. русс, англ.)

4702 К. Введение в статистическое исчисление. Митропольский А. К. (Всес. заоч. лесотехн. ин-т), Л., 1955, 114 стр. Беспл.

4703 К. Преподавание взглядов на математическую статистику. Лоренц (Anschauungsunterricht in mathematischer Statistik. Lorenz Paul. Leipzig, Hirzel, 1955, VII, 134 S., 15.30 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 19, 1006 (нем.)

4704 Д. Процессы Маркова и некоторые задачи математической статистики. Гихман И. И. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1955

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

4705. Определение устойчивости для игр с n игроками. Льюс (A definition of stability for n-person games. Luce R. Duncan), Ann. Math., 1954, 59, № 3, 357—366 (англ.)

Игра с n игроками обозначается (I_n, v), где $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков, v — характеристическая функция, определенная на подмножествах I_n и принимающая вещественные значения, причем: 1) $v(\Lambda) = 0$ (Λ — пустое множество); 2) если S, $T \subseteq I_n$ и $S \cap T = \Lambda$, то $v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T)$. Если еще для любого $T \subset I_n$ 3) $v(T) + v(I_n - T) = v(I_n)$, то игра называется игрой с постоянной суммой. Если $\sum_{i \in I_n} v(\{i\}) = v(I_n)$, то игра называется несущественной; в противном случае существенной.

Матрица $X = \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$ называется следом игры (imputation of the game), если 1) $\sum_{i \in I_n} x_i = v(I_n)$, 2) $x_i \geqslant v(\{i\})$ для всех $i \in I_n$.

Коалицией T называется всякое непустое множество игроков. Коалиционной структурой τ называется собственное подразделение I_n. Коалиция $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ называется эффективной относительно следа X, если $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k} \leqslant v(\{i_1, i_2, \ldots, i_k\})$. След $A = \|a_1, a_2, \ldots, a_k\|$ доминирует след $B = \|b_1, b_2, \ldots, b_k\|$, если для некоторой эффективной относительно A коалиции $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ выполняются неравенства $a_{i_j} > b_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Множество следов ν называется решением игры, если никакой след из ν не доминируется другим следом из ν и всякий след не из ν доминируется некоторым следом из ν.

Одной из главных проблем общей теории игр автор считает определение классов «приемлемых» следов. Перечисляются некоторые работы в этом направлении, например «решения» Неймана и Моргенстерна (Neumann J. von, Morgenstern O., The theory of games and economic behavior, Princeton, 1947, 246). Работа автора представляет еще одну попытку в этом направлении. Класс «приемлемых» следов выделяется с помощью ограничений на множество коалиций.

Коалиция T называется X-допустимой, если $v(T) = \sum_{i \in T} x_i$. Если τ — коалиционная структура и k — неотрицательное целое число, то всякое множество $(T \cup K) - H$, где $T \in \tau$, $H \subset T$, $K \subset I_n - T$ и $|H \cup K| \leqslant k$ ($|A|$ — число элементов A), называется k-критической коалицией τ.

Пусть k — постоянная и $1 \leqslant k \leqslant n-2$. Пара (X, τ) k-устойчива, если каждая k-критическая коалиция относительно τ X-допустима и если $v(\{i\}) \leqslant x_i$ для всех $i \in T$ таких, что $T \in \tau$ и $|T| > 1$. Игра k-устойчива, если существует по меньшей мере одна k-устойчивая пара.

Рассматривается эквивалентность игр относительно понятия устойчивости. Показывается, что все n-2-устойчивые игры с постоянной суммой несущественны, и это используется для описания всех k-устойчивых игр с тремя и четырьмя игроками с постоянной суммой. Далее обобщается понятие простой игры и характеризуются k-устойчивые простые игры. Доказано, что существуют k-неустойчивые игры для всех n и всех $k \leqslant n-2$. С. С. Дымков

4706. «Ребро куба» — игра с четырьмя игроками. Милс (The four person game-edge of the cube. Mills W. H.), Ann. Math., 1954, 59, № 3, 367—378 (англ.)

Относительно терминологии см. реф. 4705.

Автор указывает, что понятие решения Неймана и Моргенштерна хорошо интерпретируется на играх с одним, двумя и тремя игроками, но лишь для немногих игр с большим числом игроков известны все решения. Вообще вопрос о существовании решения для любой игры с n игроками остается проблемным. Рассматри-

ваются игры с четырьмя игроками с нулевой суммой. Каждая конкретная игра такого типа определяется тремя параметрами t, u, w, удовлетворяющими соотношениям

$$|t| \leqslant 2,\ |u| \leqslant 2,\ |w| \leqslant 2,\ \max\{|t|, |u|, |w|\} = 2.$$

Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между играми этого класса и точками поверхности куба. Указывается, что игры, соответствующие вершинам куба, несущественные. Игры, соответствующие точкам граней, не имеют конечных решений. Для игр, соответствующих точкам ребер куба, автор перечисляет все решения. С. С. Дымков

4707. **Об одном классе решений игр. Исбелл** (A class of game solutions. Isbell J. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 346—348 (англ.)

Пусть Г — игра с множеством N игроков, число которых равно n, а S — переменное подмножество N. Псевдоглавным решением игры Г называется множество $\{\alpha^s\}$, где α^s — определенные на N функции, для которых $\alpha_i^s = X_i$ (X_i — некоторая постоянная) при $i \in S$, и $\alpha_i^s = 0$ при $i \notin S$. При этом $\{\alpha^s\}$ должно составлять решение Г.

Рассматривается игра Г, в которой каждая состоящая из $n-k+1$ игроков коалиция содержит выигрывающую коалицию из k игроков. Через A обозначается множество всех выигрывающих коалиций из k игроков, а через B — множество всех коалиций из k игроков, не входящих в A, но таких, что дополнения к ним не содержат элементов A. Через V_R обозначается множество всех α^s, где $S \in A \cup B$, а $\alpha_i^s = 1/R$ для $i \in S$ и $\alpha_i^s = 0$ при $i \notin S$. Доказывается, что V_R является псевдоглавным решением Г. Отмечается, что всякая конечная проективная плоскость определяет простую игру, имеющую псевдоглавное решение. Н. Н. Воробьев

4708. **Теория игр с n игроками с полной информацией. Гейл** (A theory of n-person games with perfect information. Gale David), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 6, 496—501 (англ.)

Рассматриваются конечные игры с n игроками с полной информацией. Определение такой игры: X — множество позиций; $x_0 \in X$ — начальная позиция; P — функция, ставящая в соответствие каждой позиции предыдущую, причем $P^N(x) = x_0$ (при каждом x и некотором $N \leqslant N_0$); x — финальная позиция, если $P^{-1}(x) = \Lambda$; X_F — множество всех финальных позиций; $X \setminus X_F$ разбивается на подмножества $X_1, X_2, \ldots, X_n$; $x \in X_i$, если i-й игрок делает ход из этой позиции; на X_F заданы вещественные функции P_i ($i=1,2,\ldots,n$), определяющие выигрыши игроков. Игра Г (в узком смысле) есть последовательность $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, где $P(x_i) = x_{i-1}$ и $x_k \in X_F$.

Функция σ_i, заданная на X_i: $\sigma_i(x) \in P^{-1}(x)$ называется чистой стратегией i-го игрока. Если Σ_i — множество стратегий i-го игрока, то каждая точка $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n$ определяет некоторую игру $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Полагают $P_i(\sigma_1, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) = P_i(x_k)$. Множество $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n$ с заданными на нем функциями P_i называется нормальной формой игры. Говорят, что стратегия σ_i' доминирует над стратегией σ_i'', если $P_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i', \ldots, \sigma_n) \geqslant P_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i'', \ldots, \sigma_n)$ при всех σ_j ($j \neq i$) и при некоторых имеет место строгое неравенство; стратегии σ_i' и σ_i'' эквивалентны, если при любых σ_j ($j \neq i$) имеет место знак равенства.

Делаются два предположения: 1) игроки не используют доминируемых стратегий; 2) игроки используют эквивалентные стратегии с равными вероятностями. Вводятся операции: D_i — вычеркивание доминируемых стратегий, A_i — замена множества эквивалентных стратегий смешанной, использующей их с равными вероятностями.

Формулируется основная теорема: Если Г есть нормальная форма игры с полной информацией, то последовательное применение операций D_i и A_i сведет Г после конечного числа шагов к игре Γ^k, имеющей ровно одну чистую стратегию для каждого игрока. Это предложение распространяет теорему о существовании оптимальных стратегий для игроков на игры рассматриваемого типа. С. С. Дымков

4709. **Об одном обобщении понятия равновесия. Фаркуарсон** (Sur une généralisation de la notion d'équilibrium. Farquharson Robin), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 1, 46—48 (франц.)

Под игрой n лиц («игроков») понимается произведение X n множеств $S_1 \times \cdots \times S_n$, рассматриваемое совместно с системой n бинарных транзитивных отношений $R_1, \ldots, R_n$ на нем, причем для любых $u, v \in X$ и k либо uR_kv, либо vR_ku. Через I_k обозначается пересечение R_k и обратного ему отношения, а через P_k — разность отношений R_k и I_k.

Если K — некоторое множество игроков, то точка $s = s_1 \times \cdots \times s_n$ называется уязвимой для K, если существует точка $t = t_1 \times \cdots \times t_n$, для которой при $k \in K$ имеет место tP_ks, а при $k \notin K$ $t_k = s_k$. Если точка не является уязвимой для какого-либо множества, содержащего r игроков, то она называется точкой равновесия порядка r. Точка равновесия порядка 1 является точкой равновесия в смысле Наша (Nash J., Ann. Math., 1951, 54, 286—295).

Результатом игры называется класс точек, эквивалентных в смысле отношения $J = \bigcap_k I_k$. Пусть игра такова, что из существования k, для которого uP_kv, следует существование j, для которого vP_ju. Тогда, если число игроков равно двум, то все точки равновесия принадлежат одному и тому же результату.

Игра n лиц называется мажоритарной, если для каждого результата q и для любого игрока k существует такое непустое $T_k(q) \subset S_k$, что при обозначении через M_s ($s = s_1 \times \cdots \times s_n$) числа s_k среди $s_1, \ldots, s_n$, для которых $s_k \in T_k(q)$, из $M_s > n/2$ следует $s \in q$. Если игра мажоритарна и из uP_kv следует, что при некотором j vP_ju, то существует точка u, которая при любом $r < n/2$ является точкой равновесия порядка r. Н. Н. Воробьев

4710. **Игры с ограничениями и линейное программирование. Чарнс** (Constrained games and linear programming. Charnes A.), Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 1953, 39, № 7, 639—641 (англ.)

Под игрой с ограничением понимается конечная нулевая игра двух лиц, у которой смешанные стратегии каждого из игроков удовлетворяют некоторым линейным неравенствам. Статья содержит доказательство основной теоремы для игр с ограничениями, проводимое на основе идей теории линейного программирования. Н. Н. Воробьев

4711. **О бесконечных играх. Мыцельский Ян, Земба А.,** Бюлл. Польской АН, Отд. 3, 1955, 3, № 3, 135—138

О бесконечных играх. Мыцельский, Земба (On infinite games. Mycelski Jan, Zieba A.), Bull. Acad. polon. sci. Cl. 3, 1955, 3, № 3, 133—136 (англ.)

Пусть A и B — два множества, на которые разбито множество всех неотрицательных и не превосходящих единицы троичных дробей, в разложение которых не входит цифра 1. Рассматривается (в геометрической интерпретации) игра $\Delta(A, B)$, состоящая в выборе поочередно первым и вторым игроком одной из двух цифр, 0 или 2. Игра продолжается бесконечно. Если в результате получится число из A (из B), то выигрывает первый (второй) игрок. Игра называется замкнутой, если хотя бы один из игроков может гарантировать себе выигрыш независимо от образа действия противника.

Доказывается, что из замкнутости одного из множеств A или B вытекает замкнутость игры $\Delta(A, B)$. Из счетности множества $A(B)$ вытекает замкнутость игры $\Delta(A, B)$, причем второй (первый) игрок может обеспечить себе выигрыш. Существуют множества A и B, для которых игра $\Delta(A, B)$ не замкнута. Указываются некоторые обобщения игры $\Delta(A, B)$, на которые распространяются перечисленные теоремы. Ставятся некоторые нерешенные проблемы. Н. Н. Воробьев

4712. Теория одного класса игр на последовательности квадратов, использующая операцию продвижения в некоторой группе. Уэлтер (The theory of a class of games on a sequence of squares, in terms of the advancing operation in a special group. Welter C. P.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 2, 194—200; Indagationes math., 1954, 16, № 2, 194—200 (англ.)

На доске с бесконечной последовательностью квадратов 1, 2, 3, ... расположено n фигур, распределение которых известно. Играют поочередно два игрока. Ход заключается в передвижении одной фигуры на свободный квадрат с меньшим номером. Выигрывает игрок, достигший первым позиции 1, 2, 3, ..., n. Рассматривается упорядоченная абелева группа с элементами второго порядка: $1 < a < b < ab < c < ac < bc < abc < d < \cdots$. Элементы этой группы сопоставляются квадратам последовательности. Через Fx обозначается элемент, непосредственно предшествующий x. Вводятся функции $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (x_i — элементы группы), индуктивно определенные следующими соотношениями:

$$\varphi_n(1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \varphi_{n-1}(Fx_1, Fx_2, \ldots, Fx_{n-1}).$$

$$\varphi_n(xx_1, xx_2, \ldots, xx_n) = x^n \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\varphi_1(1) = 1.$$

Полная теория рассматриваемой игры дается следующей теоремой:

Если игрок занял любую позицию $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которой $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, то он может выиграть игру; ходы должны выбираться так, чтобы они переводили в позиции $(y_1\ y_2, \ldots, y_n)$, для которых $\varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 1$. В доказательстве теоремы существенно используются результаты предыдущей статьи автора (Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., 1952, A55, № 3, 304). И. Л. Канторович

4713. Об одном классе игр над пространством функций и связанных с ним вариационных задачах. Флеминг (On a class of games over function space and related variational problems. Fleming W. H.), Ann. Math., 1954, 60, № 3, 578—594 (англ.)

Рассматриваются нулевые игры двух лиц, стратегиями которых являются измеримые (в смысле Бореля) функции $x(t)$ и $y(t)$, определенные на компактном метрическом пространстве T, причем для любого $t \in T$ $x(t) \in X \subset R^k$ и $y(t) \in Y \subset R^l$ (через R^n обозначается n-мерное евклидово пространство; X и Y — соответственно компактные подмножества R^k и R^l),

$$\int_T \varphi_i(x(t), t)\, dW = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

$$\int_T \psi_j(y(t), t)\, dW = b_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

а выигрыш $M(x(t), y(t))$ определяется формулой

$$M(x(t), y(t)) = \int_T K(x(t), y(t), t)\, dW,$$

где W — неотрицательная конечная неатомическая борелевская мера на T, а все функции K, φ_i и ψ_j непрерывны.

Такая игра имеет решение в чистых стратегиях, если множества X и Y выпуклы, функция K вогнута относительно x и выпукла относительно y, а φ_i и ψ_j линейны относительно x и y.

Пусть $x(t, u)$ — измеримая функция на $T \times (0,1)$ со значениями в X, C_1 — пространство Банаха всех непрерывных принимающих вещественные значения функций на $X \times T$. Смешанной стратегией первого игрока в рассматриваемой игре называется всякий элемент f сопряженного пространства C_1^*, определяемый соотношением

$$f(\varphi) = \int_0^1 \int_T \varphi(x(t, u), t)\, dW du, \quad \varphi \in C_1,$$

для которого выполняются условия $f(\varphi_i) = a_i$ ($i = 1, \ldots, m$). Аналогично определяются смешанные стратегии второго игрока. Доказывается, что всякая игра рассматриваемого типа имеет решение в смешанных стратегиях. Устанавливается «правило множителей», позволяющее получать решения игр рассматриваемого типа из решений игр без ограничений вида (1) и (2) при помощи метода, аналогичного методу неопределенных множителей Лагранжа, применяемого в задачах об относительном экстремуме.

В заключение рассматриваются две частные задачи, в которых ядро K не зависит от стратегии одного из игроков и которые поэтому являются задачами об оптимизации. Н. Н. Воробьев

4714. Дифференциальный критерий для «конечных решений» игр. Гликсберг (A derivative test for finite solutions of games. Glicksberg I.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 895—897 (англ.)

Для вещественной функции $M(x, y)$, непрерывной в единичном квадрате (так называемого выигрыша), по основной теореме теории игр следует существование единственного числа v — цены игры и распределений вероятностей f и g на $[0,1]$, называемых максимизирующей и минимизирующей стратегиями, таких, что

$$\int_0^1 M(x, y)\, df(x) \geqslant v \geqslant \int_0^1 M(x, y)\, dg(y).$$

Доказывается для любого n теорема, полученная Карлиным (Karlin S., «Contributions to the theory of games», II, Ann. Math. Studies, 1953, № 28, 159—171) для $n \leqslant 4$. Если $\partial^n M / \partial y^n$ непрерывна и не меняет знака, то существует максимизирующая оптимальная стратегия с не более чем n точками роста и минимизирующая оптимальная стратегия с не более чем $n/2$ точками роста (считая, в этом случае 0 и 1 за полточки каждую). Вторая теорема Карлина выглядит как следствие: Если $\partial^n M / \partial y^n$ не обращается в нуль и сохраняет знак и имеется k-мерное множество минимизирующих оптимальных стратегий, то существует

максимизирующая оптимальная стратегия с не более чем $n-k$ точками роста. С. С. Дымков

4715. Теория бесконечных игр. Карлин (The theory of infinite games. Karlin Samuel, Ann. Math., 1953, 58, № 2, 371—401 (англ.)

Конечная игра (РЖМат, 1955, 6001) сводилась к следующему. Два игрока независимо друг от друга выбирают свои стратегии; игрок I — m-мерный вектор $f=(f_1,\ldots,f_m)$, $\Sigma_{\mu=1}^{m} f_\mu=1$, $f_\mu\geqslant 0$; игрок II — n-мерный вектор $g=(g_1,\ldots,g_n)$, $\Sigma_{\nu=1}^{n} g_\nu=1$, $g_\nu\geqslant 0$; функция $G(f,g)=\Sigma_{\mu,\nu}a_{\mu\nu}f_\mu g_\nu$ ($\|a_{\mu\nu}\|$ — заданная матрица) при этом показывает выигрыш игрока I.

Такую игру, очевидно, можно рассматривать и так. В m-мерном пространстве ε выделен конус положительных элементов P ($f_\mu\geqslant 0$), P_v — сечение этого конуса гиперплоскостью ($\Sigma f_\mu=1$); Q_u — сечение конуса Q в n-мерном пространстве F; заданы операторы A и B, переводящие ε в F^*: $x=Af$ имеет координаты $x_\nu=\Sigma_\mu a_{\mu\nu}f_\mu$. $x'=Bf$ имеет координаты $x'_\nu=\Sigma_\mu f_\mu$. Игроки I и II выбирают свои стратегии соответственно из P_v и Q_u. Тогда $G(f,g)=(Af,g)/(Bf,g)$ показывает выигрыш игрока I.

Рассматриваются игры, в которых ε и F не конечномерные, а произвольные линейные нормированные полуупорядоченные пространства с аддитивной (для положительных элементов) нормой.

Пусть ε, R, S, F — вещественные пространства Банаха; P, K, L, Q — выделенные (соответственно) замкнутые конусы «положительных» элементов. Пространства и конусы связаны по схеме:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & R \\ S(\subset\varepsilon^*) & F(\subset R^*)\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} P(\subset L^*) & K \\ L(\subset P^*) & Q(\subset K^*)\end{pmatrix}.$$

u и v — внутренние точки соответственно K и L; тогда существует такое $\rho>0$, что $(g,u)\geqslant\rho$, $(v,f)\geqslant\rho$ при всех $g\in K^*$, $\|g\|=1$, $f\in L^*$, $\|f\|=1$. Определяются сечения: $P_v=[f\in P;\ (v,f)=1]$, $Q_u=[g\in Q;\ (g,u)=1]$. A и B — линейные ограниченные операторы из ε в R. A^* и B^* — сопряженные операторы (для $f\in P$, $g\in Q$: $(A^*g,f)=(g,Af)$; $(B^*g,f)=(g,Bf)$. Предполагается, что $(g,Bf)\geqslant\delta>0$ при всех $g\in Q_u$, $f\in P_v$.

Игра определяется заданием операторов A и B и сечений P_v и Q_u. При этом P_v — множество стратегий игрока I; Q_u — множество стратегий игрока II; $(g,Af)/(g,Bf)$ — выигрыш игрока I.

Вводятся определения: $\overline{\Omega}_s=[\lambda;\ Af\geqslant\lambda Bf$ для некоторого $f\in P_v]$; $\overline{\lambda}_s=\sup_{\lambda\in\overline{\Omega}_s}\lambda$; $\overline{\Omega}_\omega=[\lambda$; для любых $g_1,\ldots,g_n\in Q_u$ существует $f\in P_v$, что $(Af,g)\geqslant\lambda(Bf,g_i)$ при $i=1,\ldots,n]$; $\overline{\lambda}_\omega=\sup_{\lambda\in\overline{\Omega}_\omega}\lambda$; $\underline{\Omega}_s$, $\underline{\lambda}_s$, $\underline{\Omega}_\omega$, $\underline{\lambda}_\omega$ определяются аналогично заменой смысла неравенств и sup на inf; $\overline{\Omega}^*_s$, $\overline{\lambda}^*_s$ и т. д. определяются аналогично в сопряженных пространствах для сопряженных операторов.

Q_u достаточно относительно P_v, если из $(g,Af-\lambda Bf)\geqslant 0$ при всех $g\in Q$ следует, что $Af-\lambda Bf\in K$. P_v достаточно относительно Q_u, если из $(A^*g-\lambda B^*g,f)\geqslant 0$ при всех $f\in P_v$ следует, что $A^*g-\lambda B^*g\in L$.

Автор говорит, что игра $\Gamma(A,B,P_v,Q_u)$ имеет значение, если $\underline{\lambda}^*_s=\overline{\lambda}_s$ (Когда P_v и Q_u достаточны, то это совпадает с обычным определением значения).

Доказывается теорема: Если P_v и Q_u достаточны, то

$$\overline{\lambda}_\omega\geqslant\underline{\lambda}^*_s=\inf_{g\in Q_u}\sup_{f\in P_v}\frac{(g,Af)}{(g,Bf)}\geqslant$$
$$\geqslant\sup_{f\in P_v}\inf_{g\in Q_u}\frac{(g,Af)}{(g,Bf)}=\overline{\lambda}_s\geqslant\underline{\lambda}^*_\omega.$$

Приводятся некоторые достаточные критерии существования значения. Стратегия $f'\in P_v$ доминирует стратегию f, если

$$(g,Af)\leqslant(g,Af') \qquad (1)$$

при всех $g\in Q_u$. Стратегия $f\in P_v$ называется допустимой, если не существует доминирующей стратегии $f'\in P_v$, для которой в (1) имеет место строгое неравенство при некотором $g\in Q_u$. Говорят, что множество допустимых стратегий $\Gamma\subset P_v$ образует полную систему стратегий, если для каждой стратегии $f\in P_v$ в Γ найдется стратегия f', доминирующая f.

Приводится достаточное условие существования полной системы стратегий. Множества $[f\in P_v;\ (g_0,Af)=\max_f(g_0,Af)]$ и $[f\in P_v;\ \max_f(g_0,Af)-(g_0,Af)<\varepsilon]$ называются соответственно решением и ε-решением Байеса относительно g_0. Рассматривается вопрос об аппроксимации допустимых стратегий решениями Байеса. Изучается изменение значения при изменениях операторов и конусов. Указывается, что доказанные теоремы могут быть распространены на игры, индуцированные нелинейными операторами. Даются приложения к некоторым классам игр. Доказывается, что при исследовании игр с ограничениями на допустимые стратегии применим метод множителей Лагранжа. Г. Ш. Рубинштейн

4716 К. Теория игр и статистических решений. Блекуелл, Гершик (Theory of games and statistical decision. Blackwell David, Girshick M. A. New York, John Wiley and Sons, 1954) (англ.)

Определения основных понятий теории статистических решений см. РЖМат, 1954, 5194; 1955, 3324. Теория решающих функций (р. ф.), создателем которой является А. Вальд, изучает вопрос о выборе наиболее выгодного решения в условиях, когда исследователь имеет возможность наблюдать случайный процесс, о распределении вероятностей которого известно лишь, что оно принадлежит некоторому семейству распределений, и, кроме того, известны: 1) для каждого возможного решения убыток от принятия этого решения в зависимости от того, каково истинное распределение процесса, 2) стоимость наблюдения процесса за определенный промежуток времени. Эта теория включает многие разработанные ранее для выборок постоянного объема разделы математической статистики такие, например, как выбор между конкурирующими гипотезами, оценка параметров и т. д. Существование наиболее выгодного способа принятия решения (минимаксной решающей функции) было доказано Вальдом путем сведения этой задачи к теореме Неймана о существовании стратегии минимакса в игре с двумя участниками. Доказательство этого факта вместе с изложением теории р. ф. содержится в работе Вальда (Wald A., Statistical decision functions, New York, 1950).

В реферируемой книге излагается теория р. ф. для процессов с дискретным временем и дискретным множеством состояний. Ограничение этим классом процессов позволяет избежать громоздких конструкций, потребовавшихся в упомянутой книге Вальда, и вместе с тем более четко выделить основные идеи теории.

Главы 1, 2, 4 и 5 посвящены общей теории игр в нормальной форме с двумя участниками. Доказывается теорема Неймана о существовании смешанной

стратегии минимакса для игр с конечным числом чистых стратегий и некоторые ее обобщения для игр с бесконечным их числом; обсуждаются вопросы о выгодности и принципах выбора стратегий, описываются классы оптимальных стратегий (класс допустимых стратегий, байесовских стратегий, полнота классов и т. д.). Полезным, повидимому, методическим приемом является выделение класса S-игр, в которых функция выигрыша задается скалярным произведением в некотором пространстве и для которых теорема Неймана и классы оптимальных стратегий приобретают весьма простой геометрический смысл. В главе 2 описывается общая структура статистических игр. В отличие от работы Вальда основным понятием является нерандомизированная р. ф. Связь с рандомизированными р.ф. устанавливает теорема 7.2.1. В главах 6 и 7 рассматриваются р. ф. с постоянным объемом выборки. Производится построение байесовских решений, изучается задача о конкурирующих гипотезах. Глава 8 — «Достаточные статистики и принцип инвариантности в статистических играх». Глава 9 посвящена последовательным р. ф. и, в основном, описанию байесовских решений, что (как и в главах 6, 7) проведено значительно полнее, чем в упомянутой работе Вальда. Наиболее подробно разработанный раздел теории последовательных р. ф., когда число возможных распределений и допустимых решений конечно, рассматривается в главе 10, где приводятся также основные факты последовательного анализа для двух конкурирующих гипотез и теорема Вальда-Вольфовича об оптимальном характере критерия отношения вероятностей. В главах 11 и 12 строятся р. ф. для оценки параметров распределения вероятностей наблюдаемого случайного процесса и для задачи о сравнении экспериментов. Книга содержит большое количество примеров, задач и упражнений. Библ. по теории игр и р. ф. 180 назв. В. С. Михалевич

4717 К. Статьи по теории игр. II. Кун, Таккер (Contributions to the theory of games. Vol. 2. Kuhn H. W., Tucker A. W. Ann. Math. Studies, № 28, Princeton, N. Y. Univ. Press, 1953, 395 pp.) (англ.)

Сборник состоит из четырех частей.

Часть I. Конечные игры двух игроков с нулевой суммой. Так называются игры двух игроков A и B, в которых имеется конечное число допустимых чистых стратегий (возможных способов поведения в игре) для каждого игрока, если алгебраическая сумма выигрышей игроков (проигрыш считается отрицательным выигрышем) равна нулю. Правила игры определяют матрицу $\| a_{ij} \|_{i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n}$, где a_{ij} — выигрыш, получаемый игроком A в случае, когда A играет согласно i-й, а B — согласно j-й чистым стратегиям. Если считать, что игра повторяется многократно, и при этом A применяет i-ю чистую стратегию с частотой x_i, а B применяет j-ю чистую стратегию с частотой y_j, то средний выигрыш, получаемый игроком A, определится значением функции выигрыша

$$G(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j.$$

Векторы $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$, где $x_i \geqslant 0$, $\sum x_i = 1$, $y_j \geqslant 0$, $\sum y_j = 1$, называются смешанными стратегиями (или просто стратегиями) игроков A и B. Основная теорема теории игр утверждает, что такие игры являются вполне определенными, т. е. всегда существует постоянное число — значение игры, $v = \max_x \min_y G(x, y) = \min_y \max_x G(x, y)$. При этом у игроков имеются оптимальные стратегии x^* и y^* такие, что $\min_y G(x^*, y) = \max_x G(x, y^*) = v$.

В первой работе (A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assigument problem, John von Neumann) автор рассматривает следующую дискретную экстремальную задачу: по данной квадратной матрице $\| a_{ij} \|_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n}$ определить перестановку P элементов $1, \ldots, n$ так, чтобы максимизировать $\sum_{l=1}^{n} a_{l\,P(l)}$. Доказывается, что поставленная задача эквивалентна решению некоторой игры двух игроков с нулевой суммой, в которой для игроков имеется соответственно n^2 и $2n$ чистых стратегий; при этом решение игры рассчитывается проще, чем первая задача, в которой имеется $n!$ возможностей.

В работе 2 (Two variants of poker, D. B. Gillies, J. P. Mayberry, J. von Neumann) определяются решения двух вариантов покера.

Работы 3 и 4 (The double destription method, T. E. Motzkin, H. Raiffa, G. L. Thompson, R. M. Thrall; Solutions of convex games as fixedpoints, M. Dresher, S. Karlin) содержат методы вычисления оптимальных стратегий, при этом в работе 3 развитые методы применяются также для решения конечной системы линейных неравенств.

В работе 5 (Admissible points of convex sets, K. J. Arrow, E. W. Barankin, D. Blackwell) исследуются так называемые «допустимые» точки выпуклого множества $S \subset R^n$; точка $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ называется допустимой, если $t = (t_1, \ldots, t_n) \in S$ и $t_i \leqslant s_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ влечет $t = s$. Полученные результаты применяются для установления критерия того, что чистая стратегия имеет в некоторой оптимальной смешанной стратегии ненулевую координату.

Часть II. Бесконечные игры двух игроков с нулевой суммой. Четыре из пяти работ этой части посвящены изучению игр на единичном квадрате, которые являются непосредственным обобщением конечных игр. $K(x, y)$ — заданная функция, определенная на квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$; игроки A и B выбирают свои стратегии — неубывающие функции $F(x)$ и $H(y)$, определенные в интервалах $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$ и удовлетворяющие условию $\int_0^1 dF(x) = \int_0^1 dH(x) = 1$. При этом $G(F, H) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y)\, dF(x)\, dH(y)$ показывает выигрыши игрока А.

В работе 6 (Cames of timing, Max Shiffman), например, исследуются игры, в которых $K(x, y) = -K(x, y)$ и при $x < y$ $K(x, y)$ — строго возрастающая функция x и строго убывающая функция y. Работы 7, 8 и 9 (Reduction of certain classes of games to integral equations, Samuel Karlin; On a class of games, Samuel Karlin; Notes on games over the square, J. F. Glicksberg, O. Gross) также посвящены отдельным классам игр на единичном квадрате. В работе 10 (On randomization in statistical games with k terminal actions, David Blackwell) рассматривается другой тип бесконечных игр.

Часть III. Игры в обобщенной форме. Нейман применил термин «игра в обобщенной (extensive) форме» к своей формализации интуитивного представления об игре в понятиях личных или случайных ходов, образцов информации, функций выигрыша. С введением чистых и смешанных стратегий этот естественный аппарат теории игр исчезает и остается только определение функции выигрыша на векторах стратегий. Результирующая форма игры, которая в случае конечной игры двух игроков с нулевой суммой есть обычная матрица с вещественными элементами, называется нормализованной формой. Эта форма удобна для доказательства общих теорем, в то время как обобщенная форма служит для исследования отдельных игр с учетом их индивидуальных свойств. За исключением теоремы А о том, что каждая конечная игра двух игроков с нулевой суммой и полной информацией обладает решениями в чистых стратегиях, играми в обобщенной форме

работах по теории игр пренебрегали. Теорема А все еще сохраняет свое частное значение. Работы 11, 12 и 13 посвящены, в частности, ее обобщению.

В работе 11 (Extensive games and the problem of information, H. W. Kuhn) автор вводит новую формализацию игры. Его в основном геометрическая модель в виде топологического дерева позволяет обобщить теорему А. Оказывается, что каждая игра n игроков с полной информацией имеет точки равновесия Наша одно из возможных обобщений понятия решения для игр n игроков) в чистых стратегиях. Рассматриваются также игры с неполной информацией. Вместо смешанных стратегий автор вводит «стратегии поведения», которые можно рассматривать как локальную пробабилизацию на событиях выбора, в то время как смешанные стратегии — полная пробабилизация чистых стратегий, сделанная перед игрой. Показывается, что такие игры, как, например, покер, могут быть решены посредством стратегий поведения (вместо смешанных стратегий) со значительными вычислительными преимуществами.

В работе 12 (Equivalence of information patterns and essentially determinate games, Norman Dalkey), используя ту же геометрическую модель, автор исследует эффект изменения информации участников. Вводятся понятия «расширения» и «полного расширения» игры и доказывается, что две игры, отличающиеся только схемами информаций, имеют одну и ту же нормализованную форму тогда и только тогда, когда они имеют тождественные полные расширения. Автор также находит некоторые необходимые условия существования решений в чистых стратегиях.

В работе 13 (Infinite games with perfect information, David Gale, F. M. Stewart) исследуется возможность распространения теоремы А на бесконечные игры с полной информацией. Авторы строят пример бесконечной игры с полной информацией, которая не имеет решений в чистых стратегиях. Однако указывается класс бесконечных игр, для которых эта теорема справедлива.

Работа 14 (Signaling strategies in n-person games, G. L. Thompson) посвящена изучению стратегий в произвольных играх. В работе 15 (Bridge and signaling, G. L. Thompson) автор прилагает полученные результаты к решению модели бриджа (карточная игра).

В работе 16 (Sums of positional games, John Milnor) автор анализирует ситуацию, которая появляется во многих играх на доске, включая шахматы и японскую игру sen-tch.

Часть IV. Общие игры n игроков. Игра с одним игроком сводится к проблеме максимизации; прямая противоположность интересов в игре двух игроков с нулевой суммой приводит к проблеме минимакса; отсюда концепция таких игр делается совершенно ясной. Эти игры довольно хорошо изучены. Что же касается игр с более чем двумя участниками или без ограничения на постоянство суммы, то они изучены мало; при этом известные подходы к изучению этих игр явно недостаточны. Авторы работ IV части пытаются решить некоторые известные проблемы, а также предлагают новые подходы к теории общих игр n игроков.

Работа 17 (A value for n-person games, L. S. Shapley) посвящена вопросу, можно ли оценить беспристрастность игроков в произвольной игре n игроков (Ann. Math. Studies, 1950, 24, preface, problem 10).

Все еще не решенным остается вопрос, имеет ли всякая игра n игроков решение в смысле Неймана и Моргенштерна (см. там же problem 8). В работах 18, 19 и 20 (Symmetric solutions to majority games, Raul Bott; Discriminatory and bargaining solutions to n class of symmetric n-person games, D. B Gillies; Quota solutions if n-person games, L. S. Shapley) вводятся новые классы игр n игроков, для которых получены решения. Класс игр, рассмотренный в работе 20, содержит некоторые игры с тремя игроками, все игры с четырьмя участниками и часть игр с более чем четырьмя игроками.

В работе 21 (Arbitration schemes for generalized two-person games, Howard Raiffa) рассматриваются обобщенные игры двух игроков (не являющиеся играми с нулевой суммой). Автор преобразует данную игру в новую, в которой меньше пар допустимых стратегий. Основная теорема утверждает, что в преобразованной игре всегда существуют седловые точки.

Г. Ш. Рубинштейн

4718 Д. Задача о крайней точке пересечения оси с ограниченным выпуклым многогранником и некоторые ее приложения. Рубинштейн Г. Ш. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1955

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

4719. Кодирование в системах передачи данных с постоянной скоростью. Часть I. Новый код, исправляющий ошибку. Силверман, Болсер (Coding for constant-data-rate systems. Part I. A new error-correcting code. Silverman R. A., Balser Martin), Proc. I. R. E., 1954, 42, № 9, 1428—1433 (англ.)

4720. Пространственные точечные процессы с применениями к экологии. Томпсон (Spatial point processes with applications to ecology. Thompson H. R.), Biometrika, 1955, 42, № 1—2, 102—115 (англ.)

4721. Математическая статистика и контроль промышленной продукции. Севастьянов Б. А., Сираждинов С. Х., Природа, 1955, № 8, 28—34

4722. Применение статистики в инженерном деле. Хигли (La estadistica y su aplicación a la ingenieria. Higley Henry G.), Ingenieria civil (México), 1955, 7, № 67, 11—15 (исп.)

См. также: 4256, 4261, 4262, 4662, 4928

ГЕОМЕТРИЯ

4723. Основания геометрической достоверности. Келлер (Die Gründe geometrischer Gewißheit. Keller Ott-Heinrich), Wiss. Z. Martin-Luther. Univ. Halle-Wittenberg, 1953/1954, 3, Math.-naturwiss. Reihe, № 2, 475—481 (нем.)

Ставится вопрос: на чем основана достоверность геометрических предложений. Так как геометрические предложения строго логически выводятся из основных понятий и аксиом, то ответ на поставленный вопрос сводится к вопросу об образовании основных понятий и о достоверности аксиом. Кратко рассматриваются следующие способы обоснования геометрии: 1) физический, сводящий геометрию к опыту (Эйнштейн); 2) аналитический, сводящий геометрию к вычислению (Декарт); 3) евклидов, принимающий аксиомы как само собой разумеющееся; 4) аксиоматический, оставляющий вопрос о действительности аксиом лишенным смысла; 5) утилитарный, для которого аксиомы не имеют никакого истинного значения, являясь только целесообразными (Пуанкаре); 6) чисто наглядный по

Канту; 7) геометрия как принцип исследования по Динглеру.

Из этого рассмотрения делается вывод о том, что ни один из этих способов, взятый сам по себе, не является достаточным для обоснования геометрии: при выборе системы аксиом и основных понятий все эти способы взаимно переплетаются. Следует отметить, что, несмотря на ряд оговорок, автор в основном стоит на позициях Канта. В. Ф. Рогаченко

4724. Существование и однозначность в многомерной дифференциальной геометрии. Лейхтвейсс (Existenz und Eindeutigkeit in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. Leichtweiss Kurt), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 238—239 (нем.)

Приводятся без доказательств краткие формулировки некоторых результатов: через каждую заданную аналитическую полосу в евклидовом пространстве E_k проходит всегда одна и только одна (аналитическая) минимальная поверхность M_n $(n < k)$; аналитическая n-мерная поверхность в E_k вполне определяется начальной полосой и системой некоторых (точнее не расшифрованных) $k - n$ инвариантов, заданных на этой поверхности как произвольные аналитические функции координат в геодезически-параллельной (повидимому, по отношению к начальной полосе) системе координат; в частности, при $n = 2$, $k = 4$ инвариантами, о которых идет речь, служат длина вектора средней кривизны и гауссова кривизна поверхности; аналогичные результаты формулируются для пары гиперповерхностей в аффинном пространстве, связанных соответствием по параллелизму касательных гиперплоскостей.

П. К. Рашевский

4725. Дифференциальная эквивалентность. Хаммер (Differential equivalence. Hammer Preston C.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 226—227 (англ.)

Краткое сообщение о разрабатываемой автором теории «дифференциальной эквивалентности». Точные формулировки определений и результатов не приводятся. А. Н. Балуев

4726. Твердое тело и евклидов измерительный аппарат. Бопп (Starrer Körper und euklidische Geräte. Bopp Erich), Philos. natur., 1955, **3**, № 3, 383—391 (нем.)

Евклид и Герон ставили в основу всех понятий геометрии понятие точки, Лобачевский и Лежандр — понятие тела. Гуго Динглер за основное понятие принимает понятие плоскости. Показывается, что динглерово понятие плоскости и все другие основные понятия геометрии могут быть выведены из понятия твердого тела. И. Я. Депман

4727. Добавления к теории относительности. Рёло (Compléments à la théorie de la relativité. Reulos René), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 17, 1107 (франц.)

4728. К истории вопроса о введении пропедевтического курса геометрии в учебный план средней школы. Харченко К. Я., Уч. зап. Свердлов. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 10, 99—116

4729. Наглядное пособие по теме «Окружность». Морозов В. Н., Пурехов Н. М., Петрова Н. Г., Старков Н. Г., Фишер А. М., Уч. зап. Свердлов. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 10, 94—98

4730. Представление интегральных формул Ньютона — Лейбница, Грина, Стокса, Гаусса и Остроградского единой формулой. Кропотов Л. Л., Тр. ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, № 13, 135—151

Автор выводит элементарными средствами формулу преобразования интеграла по k-мерной области в n-мерном пространстве к интегралу по $k-1$-мерной границе этой области. Корректность вывода вызывает сомнения: не сформулированы условия, наложенные на интегрируемые функции, на область и ее границу; неясно, какое отношение к области имеют координаты $z_1, z_2, \ldots, z_k$ (§ 4); неясно, можно ли любые две функции P и Q записать в форме $z_1 \frac{\partial z_2}{\partial x_1}$ и $z_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_2}$ (§ 5). По мнению референта, даже если бы при более аккуратном изложении все построения автора оказались корректными, вывод формулы все равно не имел бы преимущества по сравнению с соответствующими выводами теории дифференциальных форм. Г. Е. Шилов

4731. Закон взаимности в геометрии треугольника. Макарова Н. М., Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1955, **1**, 135—142

Показывается, что при изменении знака у длины одной из сторон треугольника при сохранении его у двух других его сторон каждая метрическая зависимость между элементами переходит в новую зависимость, что дает способ получения новых метрических зависимостей в треугольнике. Б. А. Розенфельд

4732. Об эллипсе Лемуана. Тоскано (Sur l'ellipse de Lemoine. Toscano L.), Bull. Soc. roy. sci., Liége, 1954, **23**, № 6—7—8, 221—299 (франц.)

В плоскости треугольника ABC отыскивается такая точка P, что $P_aB : P_aC = m_b^2 : m_c^2$ и т. д., где m_a, m_b, m_c — медианы треугольника, P_a, P_b, P_c — точки пересечения сторон BC, CA, AB соответственно с прямыми AP, BP, CP. Определяются расстояния точки P от центра тяжести треугольника, центра описанного круга и точки Лемуана. Оказывается, что в точках P_a, P_b и P_c эллипс Лемуана касается сторон треугольника. Выводится уравнение эллипса Лемуана в некоторых прямоугольных осях координат и соотношение между радиусами кривизны его в этих точках. Наконец, определяются точки пересечения эллипса Лемуана с прямыми AP_a, BP_b, CP_c и выводится соотношение между радиусами кривизны его в этих точках. А. И. Сирота

4733. Представление элементов треугольника в виде суммы ряда. Попов (Претставувањ елементите на един триаголник како сума на редови. Попов Благој С.), Билтен. друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1954, 5, 19—21 (макед.; рез. англ.)

Доказываются теоремы: Если a, b $(a > b)$ — стороны треугольника, заключающего угол γ, то: 1) угол β (против стороны b) равен сумме ряда

$$\beta = \lambda \sin\gamma + \frac{\lambda^2}{2}\sin 2\gamma + \ldots, \quad \lambda = b/a,$$

2) Сторона c (против угла γ) равна сумме ряда

$$c = \frac{a}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k \sum_{r,s=0,\, r+s=k}^{k} \frac{\Gamma\left(r-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{r!s!}\cos(r-s)\gamma$$

или

$$\lg c = \lg a - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k \frac{\cos k\gamma}{k}.$$

Из резюме автора

4734. К геометрии евклидова треугольника. Лауффер (Zur Geometrie eines Euklidischen Dreiecks. Lauffer R.), Simon Stevin, 1954, **30**, № 3, 176—177 (нем.)

Диаметр описанного около треугольника круга, лежащий на прямой Эйлера, делится ортоцентром на два

отрезка, обозначенных $(-x_1)$ и $(-x_2)$. Отрезки определяются системой уравнений:

$$x_1 + x_2 + d = 0, \qquad \text{где} \quad d — \text{диаметр};$$

$$x_1 x_2 d = 2\prod_{i=1}^{3} A_i H, \qquad \text{где } A_i H — \text{отрезок}$$

от вершины до ортоцентра.

Примечание референта. Отрезки x_1 (Не $- x_1$) и x_2 (Не $- x_2$) могут быть найдены проще

$$x_1 = R + \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)},$$

$$x_2 = R - \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)},$$

где $\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)} = \text{OH}$. С. И. Зетель

4735. О сферах, подерных относительно тетраэдра. Мармион (Sur les sphères podaires par rapport à un tétraèdre. Marmion A.), Mathesis, 1954, 63, № 6—8, 222—236 (франц.)

Сфера, проходящая через проекции произвольной точки M на грани тетраэдра (подерная сфера точки M), одновременно является подерной сферой изогональной точки M_1. Сферы, подерные относительно точек, лежащих на трех софокусных пространственных кривых второго порядка, обладают рядом свойств. Рассматриваются подерные сферы точек, лежащих на кривых третьего порядка и четвертого порядка. Геометрическим местом точек, подерные сферы которых ортогональны данной сфере, является поверхность «π» четвертого порядка. С. И. Зетель

4736. О сферах, подерных относительно тетраэдра. Мармион (Sur les sphères podaires par rapport à un tétraèdre. Marmion A.), Mathesis, 1954, 63, № 9-10, 339—349 (франц.)

Изучаются поверхности π (реф. 4735) и их свойства, например: 1) поверхности π, соответствующие концентрическим сферам, имеют общую кривую пересечения бесконечной плоскости с поверхностью Сартио; 2) всякая поверхность π, проходящая через две точки, содержит прямую, их соединяющую. В заключение рассматриваются сферы, подерные относительно 5, 6, 7 плоскостей. С. И. Зетель

4737. Об учении Птолемея и о теореме Менелая. Шмидт (Om den Ptolemaeiske laeresaetning og Menelaos saetning. Schmidt Olaf), Nord. mat. tidskr., 1955, 3, № 3, 81—95 (норв.)

4738. Об окружностях, которые отображаются данной линейной функцией на концентрические окружности. Якобсталь (Über die Kreise, die durch eine gegebene lineare Funktion auf einen konzentrischen Kreis abgebildet werden. Jacobsthal Ernst), Kgl. norske videnskab selskabs skr., 1954, № 3, 5—22 (нем.)

Дано дробно-линейное преобразование

$$w = (az + b)/(cz + d), \qquad (1)$$

где $D = ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. Доказывается, что 1) центры μ всех окружностей $|z - \mu| = r$ плоскости z, каждая из которых преобразованием (1) отображается на концентрическую ей окружность, находятся на равнобочной гиперболе, вполне определяемой величинами a, b, c, d; 2) для всякого данного достаточно большого r на гиперболе существует точно пять таких точек μ, что изображением каждой из окружностей $|z - \mu| = r$ будет окружность с тем же центром μ (в одном частном случае вырождения гиперболы существует бесконечно много таких окружностей); 3) если из гиперболы вырезать определенные конечные куски, то из каждой точки оставшейся части гиперболы можно описать только одну окружность, которая преобразованием (1) отобразится на концентричную ей окружность. Полученные результаты позволяют новым способом решить задачу о неподвижных окружностях преобразования (1).

П. П. Касьянков

4739. Двенадцать точек округления эллипсоида. Лохер-Эрнст (Die zwölf Nabelpunkte des Ellipsoides. Zum 70. Geburstag von Andreas Speiser, am 10. Juni 1955. Locher-Ernst L.), Elem. Math. 1955, 10, № 3, 49—57 (нем.)

Мнимая точка $(\xi + i\xi', \eta + i\eta')$ плоскости изображается стрелкой, координаты начала и конца (ξ, η) и $(\xi + \xi', \eta + \eta')$. Точка $P(\xi + i\xi', 0)$, при вращении ее вокруг начала координат на угол $i\tau$, переходит в P_1. При изменении τ от $-\infty$ до $+\infty$ начало и конец стрелки, соответствующей P_1, перемещаются по гиперболам γ_1 и γ_2, имеющим общий центр и общие главные направления. Каждая из этих стрелок лежит на соответствующей нормали гиперболы γ_1, а длина стрелки равна половине отрезка касательной к γ_1, заключенного между ее асимптотами. Значение τ пропорционально площади соответствующего гиперболического сектора.

Множество стрелок, возникающее из стрелок x-оси при вращении ее вокруг начала координат на угол $i\tau$, автор называет плоским вихрем. Показывается, что образом мнимой прямой с собственной действительной точкой является плоский вихрь. В частности, изотропные прямые, проходящие через действительную точку Q, представляются круговыми вихрями с центрами в Q и имеющими противоположные направления вращения.

Рассматривая точки округления эллипсоида как точки, через которые проходят изотропные прямолинейные образующие его, изображающиеся в соответственных касательных плоскостях круговыми вихрями, автор показывает, что эллипсоид имеет двенадцать точек округления (вещественных только четыре), которые по три располагаются на восьми изотропных образующих. Дается наглядное представление о конфигурации, образованной этими образующими и точками округления. К. К. Мокрищев

4740. Два замечательных элементарных геометрических места. Поццоло-Феррарис (Due notevoli luoghi geometrici elementari. Pozzolo Ferraris Giulia), Archimede, 1955, 7, № 3, 126—127 (итал.)

Обозначим через d_1, d_2 отрезки, отсекаемые на оси oy касательными, проведенными из точки M к окружности $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. Доказывается, что геометрическим местом точек M, для которых 1) $d_1 + d_2 = \text{const}$, 2) $d_1 d_2 = \text{const}$, являются прямые. Аналогичный результат справедлив для конических сечений.

Г. Я. Поплавская

4741. Замечание об уравнениях кривых с двумя фокусами на поверхности. Полищук Е. М., Уч. зап. (Высш. аркт. мор. училище им. адм. Макарова), 1954, 5, 270—271

Кривой с двумя фокусами называется линия, обладающая следующим свойством: существует функция $f(s, \sigma)$ от двух переменных такая, что $f(s, \sigma) \equiv 0$, если $s = AM$, $\sigma = BM$ — геодезические расстояния от переменной точки M до фиксированных точек A и B (фокусов на поверхности). В заметке приводится простой вывод уравнений кривых с двумя фокусами на произвольной поверхности. С. И. Зетель

4742 К. Пифагоровы треугольники. Серпинский (Trójkąty pitagorejskie. Sierpiński Wacław, Warszawa, PWN, 1954, 94 str., 7.50 zł) (польск.)

Книга является интересной монографией о проблемах, связанных с пифагоровыми треугольниками, т. е. прямоугольными треугольниками, в которых длина каждой из трех сторон — положительное целое число. Книга совершенно элементарна, во всех доказатель-

ствах используются простейшие математические средства. Однако автор приводит также собственные результаты. Он дает свое упрощенное доказательство теоремы Куммера (стр. 35 и 36), утверждающей, что в четырехугольнике с рациональными диагоналями и сторонами диагонали делятся точкой их пересечения на рациональные отрезки.

Из великой теоремы Ферма для показателя $n=4$ следует, что не существует пифагорова треугольника, каждая сторона которого — квадрат. В 1643 г. Ферма поставил задачу: найти пифагоров треугольник, у которого гипотенуза и сумма катетов были бы квадратами. В письме к Мерсенну Ферма утверждал, что наименьшим таким треугольником является треугольник со сторонами 4565486027761, 1061652293520, 4687298610289, не объясняя, однако, каким методом он получил этот результат. Автор дает собственный элементарный метод получения решения Ферма и доказывает, кроме того, что полученный треугольник действительно наименьший.

Книга — богатый источник элементарных сведений и различных проблем, связанных с треугольниками Пифагора. K. Zarankiewicz

4743 К. Аналитическая геометрия. Бляшке (Analytische Geometrie. Blaschke Wilhelm, 2-te Aufl., Verlag Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1954, 190 pp., 19.60 DM) (нем.)

Первая глава содержит много интересных исторических деталей таких, как вывод внутреннего и внешнего произведений векторов из грассманова исчисления протяженностей и применение кватернионов в кинематике. Во второй главе рассматривается конфигурация Рейе, образованная центрами подобия четырех сфер, которая связывается с «десмической» фигурой Стефаноса. Третья глава представляет собой векторное изложение понятий ротора или скользящего вектора, пары, системы сил, линейного комплекса и нулевой системы. Клиффордовы «дуальные числа» $(a+\varepsilon b$, где $\varepsilon^2=0)$ употребляются для доказательства теоремы Хьельмслева (иначе Петерсона) и Морлея: В любом прямоугольном косом четырехугольнике три общих перпендикуляра пар противоположных сторон имеют общий перпендикуляр. Автор отмечает, что десять прямых этой фигуры имеют формальное сходство с десятью точками конфигурации Дезарга. Действительно, здесь имеется прямая связь: конфигурация Дезарга (на бесконечно удаленной плоскости) образована бесконечно удаленными точками десяти прямых и бесконечно удаленными прямыми соответствующих перпендикулярных плоскостей.

Следующие две главы — о моментах инерции и квадриках — сопровождаются рассмотрением конфокальных квадрик, геодезических на квадриках, циклид Дюпена и тетраэдрального комплекса, образованного прямыми, которые перпендикулярны своим полярно-сопряженным прямым. Заключительная глава представляет собою удобную сводку наиболее важных формул элементарной алгебры и геометрии, включающую многое из того, что не охвачено предыдущими главами; она будет очень полезна и для преподавателей и для студентов. Книга хорошо напечатана и имеет хороший указатель. H. S. M. Coxeter

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 63.

4744 К. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Цубербиллер (Задачі і вправи з аналітичної геометрії. Навчальний посібник для втузів. Цуберbіллер О. М. Переклад з рос. 18-го стереотип. вид., 1954 р., Київ, Держтехвидав УРСР, 1955, 290 стр., илл., 8 крб. 55 к.) (укр.)

4745 К. Аналитическая геометрия (Учеб. пособие). **Глаголев А. А.** Изд. 4-е (Всес. заоч. ин-т сов. торговли), М., 1955, 108 стр. Б. ц

4746 К. Геометрия в пространстве четырех измерений. Баумгартнер (Geometrie im Raum von vier Dimensionen. Baumgartner Ludwig), München — Düsseldorf, Verlag von R. Oldenbourg, 1954, III + 112 p. Kart. 6. 20 DM) (нем.)

Учебник написанный элементарно в предположении, что читатель знает лишь обычную геометрию, синтетическую и аналитическую. Чтобы показать, какие вопросы рассматриваются в книге, приведем названия некоторых глав: Соединение и пересечение; Параллелизм; Ортогональность; Вращение и угол; Основы аналитической геометрии; Общие свойства политопов; Три простейших типа политопов; Формула Эйлера; Регулярные политопы; Кривые пространства.

Положительной чертой является наличие большого числа упражнений с ответами в конце книги. Имеется библиография (от «Линейного учения о протяженности...» Грассмана (Wigand, Leipzig, 1844) до «Наглядного введения в многомерную геометрию» Лицмана (Oldenbourg, München, 1952), но автору следовало включить в нее «Геометрию n измерений» Коммервилля (Methuen, London, 1929) и «Регулярные политопы» референта (Pitman, New York, 1949). Зная об основной работе Шлефли (Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd 1, Birkhäuser, Basel, 1950, p. 214), автор не употребляет символа Шлефли $\{m, n, p\}$. H. S. M. Coxeter

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 63.

4747 К. Основы тензорного исчисления в аналитическом представлении. Т. 1. Часть 3. Тензорная алгебра, Издание 3. Душек, Хохрайнер (Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung in 3 Tln. T. I. Tensoralgebra. 3. Aufl. Duschek Adalbert, Hochrainer August, Wien, Springer, 1954, IV, 129 S. 12-DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 23, 1259 (нем.)

4748 К. Геометрия поверхности. Вычисления, построения, положение центра тяжести. Херман (Geometrie der Flächen, Berechnung, Konstruktion, Schwerpunktlage. Herrmann Ludwig, Wien, Verl. d. Österr. Gewerkschaftsbundes, 1954, 49 S., ill. 12. S), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, № 6, 272 (нем.)

4749 Д. Изотопия параболоидов. Захаров Д. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

4750. Элементарное геометрическое доказательство «опасного» цилиндра вращения в пространственном обратном сечении. Крамес (Elementargeometrischer Nachweis des «gefährlichen» Drehzylinders beim räumlichen Rückwärtseinschnitt. Krames J.), Elem. Math., 1955, **10**, № 5, 106—108 (нем.)

В задаче о проведении через данный ΔABC трехгранника abc заданного вида делается сечение этого триэдра такой плоскостью, чтобы получился треугольник, конгруэнтный данному; такое построение называется пространственным обратным сечением. Как известно, имеется только четыре решения этой задачи, но возможно совпадение двух различных решений, а именно тогда, когда вершина триэдра S лежит на так называемом «опасном цилиндре», нормальным сечением которого является круг, описанный около ABC. Дается элементарное изложение этого частного случая, опирающееся на свойства перспективных конгруэнтных треугольников. В. С. Люкшин

4751. Приложение теории плоских огибающих к механической обработке одного класса профилей лопастей водяного колеса. Пахарес-Диас (Aplicación de la teoria de las curvas planas envolventes

al mecanizado de una clase de perfiles de levas (P a j a r e s D i a z E m i l i o), Rev.cienc. apl., 1954, 8, № 4, 338—343 (исп.)

Приводятся общие положения относительно вычерчивания и отыскания уравнения огибающей семейства окружностей постоянного радиуса с заданной линией центров. Приведены многочисленные примеры.

С. И. Зетель

4752. Об одном упрощении основных уравнений теории упругой устойчивости. Н е й б е р (Über eine Vereinfachung der Grundgleichungen der elastischen Stabilität. N e u b e r H.), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952,/1953, 2, № 3, 401—404 (нем.)

В работе автора (Z. angew. Math. und Mech., 1943, 23, № 6, 321—330) уравнения равновесия упругого тела в метрике деформированной среды представлены при отсутствии объемных сил в форме

$$K^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot,\lambda} + V^{\lambda}_{\cdot,\lambda\nu} K^{\nu\mu} + V^{\mu}_{\cdot\cdot,\lambda\nu} K^{\lambda\nu} = 0, \qquad (1)$$

где $K^{\lambda\mu}$ и V^{λ} — контравариантные компоненты соответственно тензора напряжений деформированного тела и вектора упругого перемещения; запятой показана операция ковариантного дифференцирования. Тензор $K^{\lambda\mu}$ является суммой тензора $\overline{T}^{\lambda\mu}$, зависящего только от тензора начальных напряжений $T^{\lambda\mu}$, и тензора добавочных напряжений $t^{\lambda\mu}$, связанного обобщенным законом Гука с деформацией, соответствующей перемещению V^{λ}:

$$t^{\lambda\mu} = G\,[V^{\lambda}_{\cdot\cdot,\mu} + V^{\mu}_{\cdot\cdot,\lambda} + 2g^{\lambda\mu} V^{\nu}_{\cdot\cdot,\nu}/(m-2)]. \qquad (2)$$

Указывается, что выбор того или иного предположения о характере связи тензоров $\overline{T}^{\lambda\mu}$ и $T^{\lambda\mu}$ не должен существенно повлиять на величину искомой критической нагрузки; принимаются соотношения

$$\overline{T}^{\lambda\mu} = T^{\lambda\mu} - V^{\lambda}_{\cdot\cdot,\nu} T^{\mu\nu} - V^{\mu}_{\cdot\cdot,\nu} T^{\lambda\nu} + V^{\nu} T^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot\cdot,\nu}. \qquad (3)$$

Учитывая, что тензор начальных напряжений $T^{\lambda\mu}$ удовлетворяет уравнениям равновесия $T^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot\cdot,\lambda} = 0$, можно непосредственным вычислением проверить, что уравнения (1) удовлетворяются при замене $K^{\lambda\mu}$ тензором $\overline{T}^{\lambda\mu}$, взятым в форме (3). Но тогда этим же уравнениям должен удовлетворять и тензор $t^{\lambda\mu}$; в рамках линейной теории устойчивости должны быть отброшены слагаемые, пропорциональные членам второй степени относительно V^{λ}; поэтому

$$t^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot\cdot,\lambda} = 0. \qquad (4)$$

Таким образом оказывается, что тензор добавочных напряжений определяется классическими уравнениями равновесия в перемещениях теории упругости. Для нахождения его можно, в частности, использовать известное представление Папковича — Нейбера с помощью гармонических функций. Наличие тензора начальных напряжений учитывается в записи краевых условий.

Даны приложения к задачам об устойчивости сжатого призматического стержня и устойчивости плоского напряжения состояния плиты.

А. И. Лурье

4753. Связи Аппеля; пространства *L* и принцип наименьшей кривизны. К л е й н (Liaisons d'Appell; espaces *L* et principe de moindre courbure. K l e i n J o s e p h), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 23, 2208—2210 (франц.)

Автор называет связью Аппеля, наложенной на динамическую систему, зависимость $a(x^i, x'^i, t) = 0$ между координатами x^i, скоростями x'^i $(i = 1,2,\ldots,n)$ и временем t, в силу которой реакции определяются формулой $F_i = \mu \dfrac{\partial a}{\partial x'^i}$. Время рассматривается как $n+1$ координата, а в качестве независимого переменного вводится вспомогательный параметр. Тогда оказывается возможным интерпретировать уравнения движения рассматриваемой системы как уравнения, определяющие геодезические в финслеровом пространстве. Эти же уравнения совпадают с ранее полученными автором (РЖМат, 1955, 3328). Отсюда делается вывод о существовании обобщенного принципа наименьшей кривизны, аналогично принципу Гаусса — Аппеля. В заключение отмечается возможность распространения полученных результатов на случай нескольких связей.

Примечание референта. Принцип наименьшей кривизны принято называть принципом Гаусса — Герца.

И. С. Аржаных

4754 К. Геометрическая механика и волны де-Бройля. С и н д ж (Geometrical mechanics and Broglie waves. S y n g e J. L. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge, University Press, 1954, vi + 166 p., 4.75 doll.) (англ.)

В оптике существуют две математические теории: теория Гамильтона, исходящая из вариационного принципа, и теория Максвелла. В этой книге автор развивает теорию релятивистской геометрической механики, применяя метод Гамильтона в пространстве (мире) Минковского. Математически теория обосновывается с помощью функции среды $f(\eta^i, \alpha^i)$, являющейся однородной функцией первой степени относительно компонент α^i вектора, подобного обычному времени. Лучами являются кривые пространства, удовлетворяющие вариационному принципу $\delta \int f\,ds = 0$ $(\alpha^i = dn^i/ds)$. Ковариантный вектор η_i в точке определяет луч, направление α^i которого дается соотношениями: $\partial f/\partial\alpha^i = \theta n_i$. Касательные пространства трехмерного пространства Σ_0 поэтому определяют систему лучей. Если отмерять постоянное значение действия $v = \int f\,ds$ вдоль этих лучей, то получится трехмерное пространство Σ. Σ представляет прошлое двумерной движущейся поверхности и является по существу волной де-Бройля. Групповая скорость волн есть лучевая скорость. Известная формула для групповой скорости получается без какого-либо использования длины волны или частоты. В главе III автор рассматривает некоторые функции среды, которые, видимо, имеют физический интерес. Для свободной частицы: $f = mc\,(-\alpha_i\alpha_i)^{1/2}$. Конструируются возможные фокусирующие зеркала. Функция $f = mc\,(-\alpha_i\alpha_i)^{1/2} - iU\alpha_4 c^{-1}$ с разрывом в U дает базу для изучения преломления в точке, где потенциал делает скачок. Для частицы в потенциальном поле с четырехмерным потенциалом A_2 берется функция $f = mc\,(-\alpha_2\alpha_2)^{1/2} - A_2\alpha_2$. В главе IV вводится понятие фазы и с помощью этого определяется первичное квантование. Оно состоит в присоединении в области, занятой системой волн де-Бройля (определяемой начальной волной Σ_0), фазового множителя $\cos(v/\hbar + \eta)$, где v есть характеристическая функция системы и η — постоянная. Расстояние между соседними событиями равной фазы на луче называется абсолютной длиной волны де-Бройля. Относительная длина волны и частота могут быть вычислены с помощью этой абсолютной длины. Рассмотрение квантования атома водорода приводит к обычной формуле тонкой структуры и к эффекту Зеемана. Последняя глава содержит обобщение на пространства без метрики. В этом случае функция среды определяет геометрию Финслера. Эта теория применяется к проблемам с двумя частицами.

J. Haantjes

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 566.

4755 Д. Эллипс погрешностей и новая геометрия треугольника. Мулерт (Fehlerellipse und neuere Dreiecksgeometrie. Mulert Günter. Diss., Landw. F., Bonn, 1953, 70 Bl., Abb., Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B, № 19, 1596 (нем.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4756. О различных геометрических преобразованиях. Шаррюо (Sur diverses transformations géométriques. Charrueau André), Bull. sci. math., 1954, 78, mai-juin, 97—128 (франц.)

В предыдущих работах автора (РЖМат, 1953, 410, 1393 и др.) изучались свойства: 1) системы поляритетов, отвечающих пучку линейных комплексов, 2) пучка инверсий. В реферируемой работе рассматривается еще одна система преобразования (трехмерного пространства), имеющая свойства, аналогичные указанным двум. Эта система состоит из поляритетов, соответствующих пучку квадрик, касающихся друг друга по одному и тому же коническому сечению. Уравнение пучка имеет вид

$$y_1^2 + \mu f(y_1, y_2, \ldots) = 0, \qquad (1)$$

где f — квадратичная форма от однородных координат y_1, y_2, y_3, y_4; μ — параметр пучка.

Пусть H — определитель формы f, c_{11} — алгебраическое дополнение соответствующего элемента матрицы этой формы, $\lambda_2 = -\frac{c_{11}}{H}$, $\alpha = \frac{\mu}{\mu - \lambda_2}$ (при $\lambda_2 \neq 0$). Автор получает выражения для параметра произведения $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_n$ нескольких поляритетов рассматриваемой системы. Например, при n нечетном, если $\lambda_2 \neq 0$, то $\alpha = \frac{\alpha_1\alpha_3 \cdots \alpha_n}{\alpha_2\alpha_4 \cdots \alpha_{n-1}}$, если же $\lambda_2 = 0$, то

$$1/\mu = 1/\mu_1 + 1/\mu_3 + \cdots + 1/\mu_n - (1/\mu_2 + 1/\mu_4 + \cdots + 1/\mu_{n-1}).$$

Пусть $\mathfrak{T}_0$ и $\mathfrak{T}_1$ — некоторые два поляритета системы, $H\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_1$. Рассмотрим последовательность s:

$$\ldots, \mathfrak{T}_0\mathscr{H}^{-j}, \ldots, \mathfrak{T}_0\mathscr{H}^{-1}, \mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_0\mathscr{H}, \ldots, \mathfrak{T}_0\mathscr{H}^{k}, \ldots$$

Если $\lambda_2 \neq 0$, то соответствующие значения α образуют геометрическую прогрессию. При $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^p = 1$ в последовательности s найдется цикл из p элементов. Если же $\alpha_2 = 0$, то значения $1/\mu$ образуют арифметическую прогрессию, и циклов (при $\mu_0 = \mu_1$) нет.

Эти результаты легко распространяются на случай большего числа измерений (уравнение (1) выражает тогда систему гиперквадрик). И. З. Розенкноп

4757. О геометрии Галилея — Ньютона. Макарова Н. М., Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1955, 1, 83—95

Изучается плоскость с проективной метрикой, абсолют которой вырожден в пару слившихся прямых и пару слившихся точек на них. Эта плоскость является двумерным аналогом 4-мерного пространства, в котором интерпретируется пространство — время механики Галилея — Ньютона (это пространство получается из пространства Минковского, в котором интерпретируется пространство — время специальной теории относительности, предельным переходом при стремлении скорости света к бесконечности). До сих пор рассматривалась только аналитическая геометрия этой плоскости (Котельников А. П., Сб. «In memoriam Lobatschevskii, т. 2, Казань, 1927, 37—66; Глаголев Н. А., Проективная геометрия, М.—Л., 1936, 280). В работе строится элементарная геометрия, тригонометрия и основы дифференциальной геометрии этой плоскости и находятся кривые постоянной кривизны и их основные свойства. Б. А. Розенфельд

4758. Распространение аксиомы о конгруэнтности треугольников на плоскости. Некульча М., Ж. матем. и физ. Акад. РНР, 1954, 3, 142—146

Предлагается «сокращенная» аксиома III_5. Пусть на плоскости фиксирован один треугольник ABC. Постулируется, что для любых двух треугольников $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$, отличных от ABC, из конгруэнтностей $\alpha\beta \equiv \alpha'\beta'$, $\alpha\gamma \equiv \alpha'\gamma'$ и $\widehat{\beta\alpha\gamma} \equiv \widehat{\beta'\alpha'\gamma'}$ вытекают конгруэнтности $\widehat{\alpha\beta\gamma} \equiv \widehat{\alpha'\beta'\gamma'}$ и $\widehat{\alpha\gamma\beta} \equiv \widehat{\alpha'\gamma'\beta'}$. Доказывается, что это свойство сохраняет силу и в том случае, когда один из двух треугольников есть ABC. Можно изъять из аксиомы III_5 несколько фиксированных треугольников. Н. М. Бескин

4759. Проективные и аффинные плоскости со смежными элементами. Клингенберг (Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Klingenberg Wilhelm), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 235—236 (нем.)

Кратко излагается содержание одноименной статьи автора (РЖМат, 1955, 5297). Л. А. Скорняков

4760. Проективно-синтетическое доказательство предложения Н. М. Бескина. Джапаридзе И. С., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1954, № 30, 163—168 (рез. груз.)

Н. М. Бескин дал аналитическое доказательство (ДАН СССР, 1945, 50, 41—44; Матем. сб. 1946, 19 (61), № 1, 57—72) теоремы: Если даны пространственная дезаргова конфигурация $\mathfrak{D}'$ (оригинал) и плоская дезаргова конфигурация $\mathfrak{D}_0$ (образец), то можно определить проектирующий аппарат (т. е. указать центр проекций S и плоскость проекций π) так, что проекцией $\mathfrak{D}'$ окажется дезаргова конфигурация $\mathfrak{D}$ (изображение), унимодулярно-аффинная $\mathfrak{D}_0$. Здесь автор дает простое синтетическое доказательство упомянутой теоремы. Н. Ф. Четверухин

4761. Оптическое преобразование произвольного четырехугольника в параллелограмм. Ханке (Optische Umwandlung des allgemeinen Vierecks zum Parallelogramm. Hanke W.), Optik, 1955, 12, № 7, 316—321 (нем.)

Рассматривается решение задачи оптического преобразования произвольного четырехугольника в параллелограмм и в прямоугольник. Предлагается общее решение задачи по преобразованию произвольного четырехугольника в параллелограмм при помощи системы уравнений и даются уравнения, относящиеся специально к решению задачи по преобразованию четырехугольника в прямоугольник. Статья может представить интерес в топографии и картографии при трансформировании аэрофотоснимка в фотоплан. М. Д. Соловьев

4762. Геометрическое место точек, гармонически связанных с теоремой Фрежье. Специя (Harmonic points and loci connected with the Frégier theorem. Spezia Clotilda, Sister), Math. Mag., 1954, 28, № 1, 13—19 (англ.)

P — фиксированная точка данного конического сечения, F — точка Фрежье, соответствующая P, C — центр кривизны в точке P конического сечения. Находится геометрическое место точек, гармонически сопряженных относительно P, F, C. Задача отдельно решается для эллипса, гиперболы и параболы. С. И. Зетель

4763. Элементарное геометрическое представление сферической модели Клейна — Гильберта для гиперболического пространства. Сас (Elementargeometrische Herstellung des Klein — Hilbertschen Kugelmodells des hyperbolischen Raumes. Szász Paul), Acta scient. math., 1955, 16, № 1—2, 1—8 (нем.)

В модели Клейна для пространства Лобачевского непосредственно из понятий элементарной геометрии вводятся отношения конгруэнтности отрезков и углов. После чего средствами элементарной геометрии доказывается выполнение аксиом абсолютной геометрии. Справедливость остальных аксиом геометрии Лобачевского в этой модели, как известно, следует из очевидных соображений. И. Я. Бакельман

4764. **Элементарно-геометрическое доказательство непротиворечивости гиперболической пространственной геометрии посредством полупространства Пуанкаре.** Сас (Elementargeometrischer Beweis der Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie mit Hilfe des Poincaréschen Halbraumes. Szász Paul), Acta math., 1954, 5, № 3—4, 255—261 (нем.; рез. русс.)

4765. **Различные элементарные способы вывода гиперболической тригонометрии.** Сас (A hiperbolikus trigonometria különbözo elemi elöállitásai. Szász Pál), A magyar tudoman. akad. mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, 3, № 2, 209—218 (венг.)

Доклад на торжественном заседании 17 декабря 1952 г., посвященном 150-летию со дня рождения Яноша Бойаи. Излагаются три способа вывода тригонометрии плоскости Лобачевского: классический способ, опирающийся на геометрию пространства, другой классический способ, опирающийся только на геометрию плоскости, и третий способ, основанный на теореме Я. Бойаи: $\sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu = K(a) : K(b) : K(c)$, где λ, μ, ν — углы треугольника, a, b, c — противолежащие стороны, а $K(r)$ — предел отношения длины хорды окружности радиуса r к опирающемуся на эту хорду центральному углу при стремлении длины хорды к нулю. Kárteszi Ferenc

4766. **О некоторых классах кривых пространства Лобачевского.** Мокрищев К. К., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 1, 9—11

1. В трехмерном пространстве Лобачевского рассматривается пара кривых с общими главными нормалями в соответственных точках. Обнаруживается, что для них имеют место свойства, аналогичные свойствам кривых Бертрана евклидова пространства. В частности, выполняются соотношения

$$(C\overline{C}C_1\overline{C}_1) = 1/\cos^2\alpha,\quad \tau\overline{\tau} = ((\sin\alpha)\,k\,\mathrm{sh}\,a/k)^2$$

(аналог теорем Маннгейма и Шелля), где C_1, $\overline{C}_1$ — центры кривизны кривых (C), $(\overline{C})$; τ, $\overline{\tau}$ — их кручения; k — параметр пространства Лобачевского.

2. Если нормали кривой (C), образующие с ее главными нормалями постоянный угол ω, суть бинормали кривой $(\overline{C})$ то: а) расстояние a между соответственными точками (C), $(\overline{C})$ постоянно; б) кривизна $\varkappa$ и кручение τ кривой (C) связаны соотношением

$$\cos^2\omega\cdot\varkappa^2 + \tau^2 - 2k^{-1}\cos\omega\,\mathrm{cth}\,2ak^{-1}\cdot\varkappa + k^{-2} = 0.$$

При $\omega = 0$ и $k \to \infty$ получаем уравнение кривых Маннгейма евклидова пространства; при $\omega = \pi/2$ $\tau^2 + k^{-2} = 0$.

3. Присоединим неизменно к реперу кривой (C) прямую d. Тогда: а) если прямая d не проходит через вершину репера кривой (C) и не ортогональна ее касательной и главной нормали и существует на d фиксированная точка, перемещающаяся ортогонально d, то кривизна и кручение (C) связаны линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

б) если d образует развертывающую поверхность, то для кривой (C) получим

$$A\varkappa^2 + B\varkappa\tau + C\tau^2 + D\varkappa + E\tau + F = 0,$$

где коэффициенты — постоянные, зависящие определенным образом от параметров, характеризующих положение d относительно репера (C) и величины k. Эти кривые являются аналогом кривых Чезаро в евклидовом пространстве. Н. Г. Туганов

4767. **Гиперболическая аналитическая геометрия.** Джексон, Гринспан (Hyperbolic analytic geometry. Jackson Stanley B., Greenspan Donald), Math. Mag., 1955, **28**, № 5, 251—269 (англ.)

Изложение аналитической геометрии на плоскости Лобачевского (см., например, Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., ГТТИ, 1949, стр. 327 и сл.). Б. А. Розенфельд

4768. **О разрешимости ограниченными средствами конструктивных задач второй степени в плоскости Лобачевского.** Мокрищев К. К., Уч. зап. Ростовск. н/Д ун-та, 1955, **32**, № 4, 15—27

Доказывается, что всякая конструктивная задача второй степени в плоскости Лобачевского может быть решена с помощью: 1) одной линейки с параллельными в смысле Лобачевского краями с фиксированной на одном из них точкой, 2) любой пары циркулей (циркуль, орициркуль, гиперциркуль) плоскости Лобачевского, 3) одного гиперциркуля. Доказательство проводится при помощи непосредственного решения указанными средствами элементарных штейнеровских задач, главных задач и выполнения основных построений в плоскости Лобачевского. Полученные выводы усиливают результаты Несторовича Н. М. (1949), Смогоржевского А. С. (1948), Хоменко Н. П. (1948) (см., например, Н. М. Несторович, Геометрические построения в плоскости Лобачевского, Москва, 1951), В. Ф. Рогаченко (РЖМат, 1953, 406; 1954; 5744). Г. С. Бархин

4769. **Метод Е. С. Федорова и его применение к построению химических диаграмм.** Крунчак Т. Б. В сб.: Методы начертательной геометрии и ее приложения, М., Гостехтеоретиздат, 1955, 253—288

4770 К. **Основания геометрии.** Смогоржевский (Основи геометрії. Смогоржевський О. С., Київ, «Радянська школа», 1954, 344 стр. 8 крб. 50 коп.) (укр.)

Второе, переработанное и дополненное издание учебника по курсу «Основания геометрии» для студентов физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов (1-е изд. вышло в 1947 г.).

Содержание книги таково: Введение (краткий очерк развития геометрии, особенно исследований по основаниям геометрии); аксиоматическое построение геометрии (гл. 1); гиперболическая геометрия (гл. 2); интерпретация гиперболической геометрии в евклидовом пространстве (гл. 3); важнейшие построения гиперболической геометрии (гл. 4); аналитическая и дифференциальная геометрия гиперболической плоскости (гл. 5); эллиптическая геометрия (гл. 6); интерпретация эллиптической плоскости в евклидовом пространстве и евклидовой плоскости в эллиптическом пространстве (гл. 7); проективная геометрия как источник метрических геометрий (гл. 8); о теории инвариантов и ее значении для обоснования геометрии (добавл. 1); о применении геометрии Лобачевского к вычислению некоторых определенных интегралов (добавл. 2); некоторые вопросы дифференциальной геометрии евклидова и неевклидова пространств (добавл. 3).

Кроме изложения материала, входящего в программу обязательного университетского курса оснований геометрии, значительная часть книги (почти половина) содержит материал, который может быть использован на семинарских занятиях, для курсовых и дипломных работ студентов, специализирующихся по геометрии. Сюда относятся: частично гл. 3, 6, 7, 8 и полностью гл. 4, 5, а также добавления 2 и 3. В некоторых из указанных глав дается изложение результатов, полученных советскими исследователями за последние годы. В особенности это относится к гл. 4, в которой впер-

вые в учебную литературу вводится изложение вопросов теории геометрических построений в плоскости Лобачевского. В. Ф. Рогаченко

4771 К. Проективная геометрия. Бляшке (Projektive geometrie. Blaschke Wilhelm. 3-te Aufl. Verlag Birkhäuser, Basel — Stuttgart, 1954, 197 pp., 19.60 DM) (нем.)

Автор исправил несколько небольших ошибок, имевшихся в предыдущих изданиях (Math. Revs, 1949, **10**, № 1, 58), и добавил еще одну главу о сетях, где дается сводка результатов таких статей, как статья Р. Бэра (Trans. Amer. Math. Soc., 1939, **46**, 110—141; Math. Revs, 1940, **1**, № 1, 6). Автор обращает внимание на замечательную аналогию между проективной геометрией и теорией сетей. Конфигурация Паппа, которая существует, когда поле геометрии коммутативно, соответствует фигуре Томсена, которая замыкается, если группа сети — абелева. Подобно тому как для доказательства теоремы Дезарга нужны три применения теоремы Паппа, также три применения замкнутости фигуры Томсена нужны для установления замкнутости другой важной фигуры — так называемой фигуры Рейдемейстера. Книга оформлена лучше, чем в первых двух изданиях, но, к сожалению, отсутствует портрет Штаудта на фронтисписе. H. S. M. Coxeter

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 63

4772 К. Начертательная геометрия. I Важнейшие методы. Горизонтальная и вертикальная проекции многогранника. Хак Вольфганг (Darstellende Geometrie. I. Die wichtigsten Darstellungsmethoden. Grund- und Aufriss ebenflächiger Körper. Haack Wolfgang. Sammlung Göschen Bd. 142. Waster de Gruyter and Co. Berlin, 1954, 110 pp. 2.40 DM) (нем.)

Этот том I работы, запланированной в трех томах, начинается с краткого исторического введения, после которого излагаются важнейшие методы проектирования. Основное внимание уделяется ортографической проекции, которая разобрана вплоть до пересечения многогранников. Последняя часть труда имеет дело с аффинитетами и главным образом касается проектирования окружности в эллипс. D. J. Struik

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 980

4773 К. Элементы начертательной геометрии. Джонсон, Владавер (Elements of descriptive geometry. Part I. Text. Johnson Lewis Olof, Wladaver Irwin. New York, Prentice Hall, London, Bailey and Swinfen, 1953, v, 74 p., ill., 21 sh), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 282, 12 (англ.)

4774 К. Задачи по начертательной геометрии. Петрич (Ábrázoló geometriai példatár. Bányamérnök hallgatok számára. Egyetemi segedkönyv. Petrich Géza, Budapest, Tankönyvkiado, 1954 (1955), 267 str., 36.50 Ft), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 1, 9 (венг.)

4775 К. Проблемы начертательной геометрии. Байенси-Филью (Problemas de geometria descritiva. Bahiense Filho Norbertino, 1953, 154 p., il., 120.00 Cr.), Bol. bibliogr. brasileiro, 1955, **1**, № 3, 31 (порт.)

4776 К. Лекции по начертательной геометрии. (С метод. указаниями и контр. заданиями для студентов-заочников). Пшеничный Н. Н., Марченко Л. П., Репина М. И., Всес. заочн. энерг. ин-т, М., 1955, 242 стр., илл. Беспл.

4777 Д. Ниточные конструкции гиперповерхности второго порядка в евклидовом и неевклидовом пространствах. Бём (Die Fadenkonstruktionen der Hyperflächen zweiter Ordnung in euklidischen und nichteuklidischen Räumen. Böhm Wolfgang. Diss. Techn. Univ. Berlin, 1953, 49 Bl., Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, **B**, № 21, 1773 (нем.)

4778 Д. Некоторые конструктивные задачи геометрии Лобачевского. Мозговая Л. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Киевск. политехн. ин-т, Киев, 1955

4779 Д. Опыт исследования вопроса о проектировании пучками плоскостей. Обухова В. С. Автореф. дисс. канд. техн. н., Киевск. инж.-строит. ин-т, Киев, 1955

4780 Д. Обоснование гиперболической геометрии на основе зеркального отображения. Бергау (Begrindung der hyperbolischen Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Bergau Peter.— Diss., Phil F., Kiel, 1953, 21 Bl., Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, **B**, № 5, 367 (нем.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4781. Замечания относительно темы недавнего конкурса. (Osservazioni relative al tema di un recente concorso. G. A.), Matematiche, 1954, **9**, № 1, 82—91 (итал.)

Дается обзор различных подходов к исследованию семейства кривых, определяемых уравнением $(y-x^2)^2 - \kappa(1-x^2) = 0$. С. И. Залгаллер

4782. Общий обзор двойных точек плоской алгебраической кривой. Бурненго (Una visione panoramica dei punti doppi di una curva piana algebrica. Burnengo Giuseppe), Archimede, 1955, **7**, № 1, 30—35 (итал.)

Дается обычное аналитическое определение двойной точки плоской алгебраической кривой и рассматривается двенадцать различных случаев двойных точек. Классификация проводится в зависимости от характера касательных в двойной точке (действительная, мнимая) и в зависимости от характера соприкасающейся параболы в двойной точке. С. И. Зетель

4783. Класс и точки перегиба плоских уникурсальных кривых. Бертран (Classe ep points d'inflexion des courbes unicursales planes. Bertrand Paul), Rev. math. spéc., 1955, **65**, № 9, 509—511 (франц.)

Используя известный факт, что уравнения всякой плоской уникурсальной кривой (C) порядка m могут быть представлены в виде

$$x = P(t)/R(t),\ y = Q(t)/R(t),$$

где $P(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$ — многочлены степени m относительно параметра t, автор доказывает четыре вспомогательные теоремы, устанавливающие ранг некоторых матриц, составленных из этих многочленов и их производных. Отсюда он показывает, как можно определить класс плоской уникурсальной кривой и найти ее точки перегиба. М. П. Черняев

4784. Исключительные точки кривой третьего порядка, симметричной в однородных координатах. Сельмер (The exceptional points of a cubic curve which is symmetric in the homogeneous variables. Selmer Ernst S.), Math. scand., 1954, **2**, № 2, 227—236 (англ.)

Если C — эллиптическая кривая 3-го порядка над полем рациональных чисел, то эллиптические аргументы точек C, имеющих рациональные координаты, образуют абелеву группу G. Точки C соответствующие элементам конечной подгруппы G, называются исключительными точками C. Каждой точке P на C можно отнести ее тангенциал — точку пересечения касательной в P к кривой C с самой C. Если уравнение C рассматривается в однородных координатах, то координаты рациональной точки можно считать взаимно простыми целыми; тогда $|xyz|$ называется весом точки. Если точка исключительная, то вес ее тангенциала не больше, чем вес самой точки. Исследование исключи-

тельных точек было предпринято Гурвицем (Hurwitz, Vierteljahrsschr. naturforsch. Ges. Zürich, 1917, 62, 207—229) и продолжено Нагелем (Nagell T., Skr. Norske Videnskab. Acad. Oslo Mat.-Naturv. Kl., 1935, № 1, 1—25; Nova Acta Soc. Sci. Upsaliensis, 1952, 15, № 6, 1—66) и его учениками. В работе изучается случай кривой, заданной уравнением симметричным относительно однородных координат. Если исключить эквиангармонический случай, когда касательные в трех (рациональных) точках перегиба пересекаются в одной точке, то уравнение такой кривой приводится к виду $a(x+y+z)^3+cxyz=0$.

Дается критерий, необходимый и достаточный для того, чтобы точка (x, y, z) имела собственный (не совпадающий с точкой перегиба) тангенциал того же веса: существование трех взаимно простых целых d_1, d_2, d_3, удовлетворяющих соотношениям $d_1+d_2+d_3=0$, $d_1^2 d_2^2 d_3^2/a$, $d_1x+d_2y+d_3z=0$, $(d_1, x)=(d_2, y)=(d_3z)=1$. Если точек, удовлетворяющих этим условиям, не существует (что всегда имеет место, если a не делится на 8), то число исключительных точек равно 3, 6 или 12. При помощи этих результатов проводится исследование исключительных подгрупп следующих структур: циклической подгруппы порядка 9, подгруппы порядка 6 и подгруппы порядка 12 как циклической, так и нециклической. Даются выражения координат исключительных точек через подходящим образом выбранные параметры и соответствующие виды уравнений кривой, отличающиеся от известных их представлений большей простотой.

В. В. Морозов

4785. Свойства кривой четвертого порядка с двумя точками возврата и одним узлом (C_4). Примроз (A property of quartic curves with two cusps and one node. Primrose E. J. F.), Edinburgh Math. Notes, 1954, № 39, 1—3 (англ.)

Обозначив узел через A, точки возврата B и C, берут за координатный треугольник ABC и за единичную точку — пересечение касательных в точках возврата. Кривая имеет одну двойную касательную и две точки перегиба. Кривая рациональная; взяв ее параметрические уравнения, доказывают (новые результаты): 1. Существуют две кривые второго порядка, относительно каждой из которых C_4 автополярна. 2. Указанные кривые второго порядка дважды касаются друг друга. 3. Треугольник ABC и треугольник, образованный двойной касательной и касательными в точках перегиба, перспективны с двумя центрами перспективы.

Аналогичная проблема для C_5 с пятью точками возврата решена ранее (Apéry R., C. r. Acad. sci., 1941, 213, 674—675).

Д. А. Гудков

4786. Об одном обобщении понятия линейной эквивалентности на алгебраической кривой. Бенедикти (Sur une généralisation de la notion d'équivalence linéaire sur une courbe algébrique. Benedicty Mario), Bull. cl sci., Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 5, 551—555 (франц).

Понятие линейной эквивалентности обобщается следующим образом. Пусть K — поле алгебраических функций одной переменной, k — основное поле и k' — его алгебраическое замыкание в K, $\nu_{\mathfrak{p}}(x)$ $(x \in K)$ — валюация в K, $R_{\mathfrak{p}}$ — соответствующее кольцо валюаций, $\mathfrak{A}=\Pi_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})}$ (где $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})$ — целочисленная функция, равная нулю всюду, кроме конечного числа мест $\mathfrak{p}$) — дивизор, $\mathfrak{D}(x)=\Pi_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(x)}$ — дивизор, соответствующий x, $d(\mathfrak{p})$ — степень места $\mathfrak{p}$ и $d(\mathfrak{A})=\Sigma_{\mathfrak{p}} d(\mathfrak{p})\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})$ — степень дивизора $\mathfrak{A}$. Пусть затем $\mathfrak{o}$ — подкольцо в K, содержащее k и не содержащееся в k'. Дивизор $\mathfrak{A}$ называется $\mathfrak{o}$-эквивалентным дивизору $\mathfrak{B}$ $(\mathfrak{A} \overset{\mathfrak{o}}{\to} \mathfrak{B})$, если в $\mathfrak{o}$ существует такой элемент x, что $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{D}(x)$. Отношение это рефлексивно и транзитивно (но вообще не симметрично); при частных выборах k и $\mathfrak{o}$ из него получаются известные определения линейной эквивалентности — классическое, Севери, Шевалле и обобщающее их определение Розенлихта (Rosenlicht, Ann. Math., 1952, 56, 169), последнее в том случае, когда поле k произвольно, а кольцо $\mathfrak{o}$ полулокальное, т. е. содержится лишь в конечном числе колец валюаций $R_{\mathfrak{p}}$. Если через $r_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{A})$ обозначить размерность пространства тех x из $\mathfrak{o}$, для которых $\nu_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant -\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})$, то во всех указанных случаях имеет место теорема Римана в следующей форме: Если $\mathfrak{A}$ пробегает множество тех дивизоров, для которых $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})=0$ при $\mathfrak{o}<R_{\mathfrak{p}}$, то множество $\{d(\mathfrak{A})-r_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{A})\}$ ограничено сверху. Увеличенная на 1 верхняя грань этого множества называется $\mathfrak{o}$-жанром K. Приводятся некоторые видоизменения этой теоремы, дающие возможность введения новых понятий жанра. Строится пример, показывающий, что кольцо $\mathfrak{o}$ можно выбрать более общим образом, чем это делается для определения эквивалентности в смысле Розенлихта, сохраняя понятия размерности и линейности и справедливость теоремы Римана в указанном выше виде. Именно, в K выбирается бесконечная последовательность мест $\mathfrak{p}_t$ и бесконечная последовательность функций f_u таких, что $\nu_{\mathfrak{p}_t}(f_u)=\delta_{tu}$, и за $\mathfrak{o}$ берется совокупность тех элементов x, для которых $\nu_{\mathfrak{p}_t}(x) \geqslant 0$. Полученное таким образом кольцо не является полулокальным.

В. В. Морозов

4787. О кривых ветвления вещественных тройных плоскостей. Галафасси (Sulle curve di diramazione dei piani tripli reali. Galafassi Vittorio Emanuele), Rend. mat. e. applic., 1954, 14, № 1—2, 192—199 (итал.)

Исследуются вещественные кривые F_{6m}, задаваемые в однородных координатах уравнениями типа $p_{2m}^3+q_{3m}^2=0$, где p_{2m} и q_{3m} — формы степеней $2m$ и $3m$ соответственно (к такому виду, с некоторыми оговорками, приводится уравнение кривой ветвления тройной плоскости (Pompilj G., Rend. mat. e applic., 1939, 3, 109—132). Рассматривая вещественную кривую $\lambda p_{2m}^3+q_{3m}^2=0$ и используя метод малых вариаций, автор выводит ряд заключений о некоторых возможных формах таких кривых, например: для любого m найдутся вещественные F_{6m}, имеющие максимальное возможное число замкнутых ветвей $12m^2-9m+2$ и максимальное возможное число $6m^2$ вещественных точек возврата, расположенных попарно на $3m^2$ замкнутых ветвях; для любого m найдется вещественная F_{6m}, не имеющая вещественных точек. Рассматриваются также вопросы, связанные с числом замкнутых ветвей F_{6m}, например вопрос о замкнутых ветвях, которые могут появиться в сравнении с замкнутыми ветвями кривой $q_{3m}=0$.

В. В. Морозов

4788. О пространстве коэффициентов плоских алгебраических кривых n-го порядка. Гудков Д. А., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 3, 337—340

Рассматривается N-мерное проективное пространство R_N $(N=n(n+3)/2)$, однородными координатами точки служат коэффициенты алгебраической кривой n-го порядка $C_n \equiv \Sigma_{\alpha+\beta+\gamma=n} A_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma=0$ действительной проективной плоскости; это пространство метризуется естественным образом. Изучается строение многообразий пространства R_N, отвечающих, скажем, всем

кривым, имеющим в некоторой окрестности фиксированной точки проективной плоскости точно одну простую двойную точку. О характере полученных результатов может дать представление.

Теорема 8. Пусть $C_n \in R_N$ и является нормальной уникурсальной кривой, все особые точки которой действительны. Тогда при $p < (3n-1)/2$ любые p из особых точек кривой C_n варьируемы (кривая называется нормальной, если все ее особые точки — простые двойные; p двойных точек нормальной кривой C_n с $p+q$ двойными точками варьируемы, если каждому достаточно малому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$ что в ε — окрестности кривой C_n в пространстве R_N можно найти кривую, имеющую $p+q$ двойных точек в δ-окрестностях двойных точек кривой C_n, причем p из них совпадают с заранее фиксированными точками δ-окрестностей p двойных точек C_n). • И. М. Яглом

4789. Точечные преобразования и кремоновы преобразования. Вилла (Transformations ponctuelles et transformations crémoniennes. Villa M.), Colloque de topologie et géométrie différentielle, Strasbourg, 1952, № 8, 6 pp., La Bibliothéque Nationale et Universitaire de Strasbourg, 1953 (франц.)

Эта статья содержит только библиографию. Автор пишет: «Излагаются главнейшие результаты, полученные в Италии различными авторами за последние десять лет относительно точечных преобразований, которые более интересуют алгебраическую геометрию». Перевод из Math. Revs. 1954, **15**, № 5, 466

4790. Кремоновы преобразования в геометрии матриц. Годдар (Cremona transformations in the geometry of matrices. Goddard L. S.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, 2, № 3, 393—413 (англ.)

Рассматриваются два способа получения кремоновых преобразований T и T^* с помощью матриц. Пусть $X(x_{ij})$ и $Y(y_{ij})$ — матрицы типа $n \times n$, элементы которых — неизвестные над основным полем (алгебраически замкнутым, характеристики нуль). Считая x_{ij}, y_{ij} однородными координатами проективных пространств Σ_1 и Σ_2, можно легко установить преобразование T между Σ_1 и Σ_2: $Y = X^*$, где X^* — матрица, присоединенная к X.

Пользуясь тождеством $(X^*)^* = |X|^{n-2}X$, автор получает обратное преобразование T^{-1}: $\alpha X = Y^*$, где $\alpha = |X|^{n-2}$.

Второе преобразование T^* и ему обратное T^{*-1} между неизвестными x_{ij}, λ и y_{ij}, μ определяются формулами:

$$T^*: \mu = |\lambda E + X|,\ Y = (\lambda E - X)(\lambda E + X)^*,$$
$$T^{*-1}: \rho\lambda = |\mu E + Y|,\ \rho X = (\mu E - Y)(\mu E + Y)^*,$$

где E — единичная матрица и $\rho = \alpha^n (\lambda\mu)^{n-1}$.

Дается характеристика фундаментальных образов преобразований при любом n, для чего используется новый метод. Свойства фундаментальных образов преобразования T, порожденного матрицей X, рассматриваются и для тех случаев, когда X есть симметрическая и кососимметрическая матрица. Преобразование T^* рассмотрено сначала для произвольных и дополнительно для симметрических матриц X. З. А. Скопец

4791. Примеры поверхностей Брауэра. Шатле (Exemples de surfaces de Brauer. Chatelet François), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 23, 1578—1579 (франц.)

Сообщение, непосредственно связанное с предыдущим (РЖМат, 1953, 412), в отличие от которого рассматриваются рациональные поверхности третьего порядка с тремя коническими двойными точками. Их бирациональное преобразование в плоскость может иметь не рациональные коэффициенты, а принадлежащие нормальному расширению поля рациональных чисел с помощью корней некоторого уравнения третьей степени (с рациональными коэффициентами). Приводится пример поверхности для случая, когда соответствующее уравнение нециклическое. В. В. Рыжков

4792. Об алгебраической поверхности, касающейся плоскости вдоль прямой. Годо (Sur les surfaces algébriques touchant un plan le long d'une droite. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 11, 1194—1198 (франц.)

Показывается: если алгебраическая, нелинейчатая, поверхность F порядка n имеет касательную плоскость α вдоль одной из ее прямых a, то она имеет на этой прямой $n-1$ двойных точек, некоторые из этих точек могут быть бесконечно близкими и образовать последовательность двойных бипланарных точек, кроме одной, которая будет двойной конической. Обратно, если алгебраическая поверхность на одной из своих прямых имеет двойные точки указанного типа, то поверхность имеет одну и ту же касательную плоскость вдоль этой прямой. HCl предложения доказываются синтетически на основе рассмотрения пересечения как прямой a, так и поверхности F с полярою относительно F какой-либо точки P на плоскости α; вторая половина прямого предложения проверяется также и аналитически.

Отмечается, что приведенные рассуждения можно обобщить следующим образом: пусть алгебраическая поверхность F касается вдоль алгебраической кривой C некоторой поверхности F', причем C не имеет особых точек; тогда точки пересечения кривой C с полярою точки P относительно F являются двойными точками F, а точки пересечения C с полярою точки P относительно F' будут двойными точками для этой поверхности; эти двойные точки на F или F' могут группироваться в последовательности бесконечно близких точек на C, каждая группа образована тогда двойными бипланарными точками, кроме последней, которая будет двойной конической. С. С. Бюшгенс

4793. Об алгебраических поверхностях, почленно инвариантных относительно циклической коллинеации. Морлок, Перри (On algebraic surfaces termwise invariant under cyclic collineations. Morelock J. C., Perry N. C.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 2, 204—207 (англ.)

Устанавливаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы моном $x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d$ степени mp переходил в себя при коллинеации $T: (x_1', x_2', x_3', x_4') = (x_1, Ex_2, E^3x_3, E^3x_4)$, где $E^p = 1$ и p — простое. Эти условия состоят в том, чтобы показатели a, b, c, d принадлежали mod p к классам вычетов (n), $(r-2n)$, $(n-2r)$, (r) соответственно. В случае, когда $m = 1$ и $p > 3$, эти условия выписываются в более подробном и удобном для приложений виде (устанавливаются неравенства, которым должны удовлетворять r и n). Число различных таких мономов подсчитывается: при $p > 3$ оно равно $\frac{1}{6}(p^2 + 6p + 17)$. (См. также РЖМат, 1955, 1926).

В. В. Морозов

4794. Поверхности третьего порядка с четырьмя особыми точками. Пальман (Die Flächen 3. Ordnung mit vier Doppelpunkten. Palman Dominik), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1954, **9**, № 2, 129—150 (нем.; рез. хорв.)

Как известно, кубической инверсией называется преобразование трехмерного пространства, при котором каждой точке ставится в соответствие точка, полярно сопряженная с ней относительно данной поверх-

ности Ψ второго порядка и принадлежащая прямой, которая проходит через данную точку и пересекает две данные скрещивающиеся прямые p_1 и p_2. При этом преобразовании прямые и плоскости в общем случае переходят в кривые и поверхности третьего порядка. Если прямые p_1 и p_2 полярно-сопряженные относительно поверхности Ψ то произвольная плоскость Φ преобразуется в общую поверхность третьего порядка с четырьмя особыми точками, которые являются точками пересечения прямых p_1 и p_2 с поверхностью Ψ. В зависимости от того, являются ли эти точки действительными, мнимыми или совпадающими, получается семь проективных типов поверхностей третьего порядка. В трех из них содержатся поверхности, содержащие абсолютное коническое сечение (поверхность Ψ — сфера действительного, мнимого или нулевого радиуса, плоскость Φ — несобственная). Если одна из прямых p_i проходит через центр поверхности Ψ, то две особые точки принадлежат абсолютному коническому сечению. Определяется положение всех 27 прямых на каждой из рассмотренных поверхностей, а также круговых сечений на поверхностях, характеризованных при помощи абсолютного конического сечения. Доказательства синтетические. Р. Н. Щербаков

4795. О построении a priori алгебраических кос. Кизини (Sulla costruzione a priori delle trecce algebriche. Chisini Oscar), Atti IV Congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 304—308 (итал.)

Краткое изложение работы, опубликованной в Ann. mat. pura ed appl. Ser. IV, 1952, **33**, 353—366.

В. В. Рыжков

4796. О существовании кратных поверхностей с точками дирамации заданной структуры. Годо (Sur l'existence de surfaces multiples possédant des points de diramation de structure donnée. Godeaux Lucien), Rend. mat. e appl., 1954, **14**, № 1—2, 42—47 (франц.)

Показывается, что установленные автором ранее различные возможные структуры точек дирамации могут иметь место в действительности. Определение см. РЖМат, 1953, 1367; 1955, 4645 и 5257. Построение проводится для точек дирамации второго рода. Такая точка характеризуется двумя целыми положительными числами α и β, не превышающими p и удовлетворяющими соотношению $\alpha\beta \equiv 1 \pmod p$. Полагая $p = 2\nu + 1$, рассматриваем решения сравнения $\lambda + \mu\alpha \equiv 0 \pmod p$ $(\lambda + \mu \leqslant p)$, число которых $\nu + 2$. Если λ_i, $\mu_i (i = 1, \ldots, \nu+2)$ — эти решения (причем $\lambda_{\nu+1} = \mu_{\nu+2} = p$) и φ_i — достаточно общего вида форма степени $\lambda_i + \mu_i$ от переменных $x_1, \ldots, x_{\nu+2}$, то поверхность F, заданная уравнениями $x_{\nu+3}^{\lambda_i} x_{\nu+4}^{\mu_i} = \varphi_i$, в $S_{\nu+4}$ допускает циклическую инволюцию порядка p $H : x_1' : \ldots : x_{\nu+4}' = x_1 : \ldots : x_{\nu+2} : \varepsilon x_{\nu+3} : \varepsilon^\alpha x_{\nu+4}$. $(\varepsilon^p = 1)$.

Конструкция, аналогичная описанной в РЖМат, 1955, 5257, позволяет построить нормальную проективную модель Φ образа инволюции, точки дирамации которой и будут иметь заданную структуру.

В. В. Морозов

4797. О структуре некоторых точек дирамации кратной поверхности 37-го порядка. Годо (Sur la structure de certains points de diramation d'une surface multiple d'ordre 37. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci., Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 3, 329—342 (франц.)

Применение общей теории исследования структуры точек дирамации к кратным поверхностям порядка 37 в двух случаях: $\alpha = 24$, $\beta = 19$ и $\alpha = 21$, $\beta = 30$ $(\alpha\beta \equiv 1 \pmod{37})$, (см. реф. 4796). В этих случаях исследование представляет некоторые особенности. Оказывается, что в первом случае точка дирамации — 4-го порядка и бирационально эквивалентна семи рациональным кривым, а во втором случае она — 5-го порядка и эквивалентна шести таким кривым. Оба вида точек могут встретиться на одной и той же поверхности (представляющей инволюцию, порожденную циклической гомографией 37-го порядка в плоскости). Исследование проведено весьма подробно. В. В. Морозов

4798. Эллиптические поверхности, содержащие эллиптический пучок кривых жанра 3. Конфорто, Герарделли (Le superficie ellittiche con un fascio ellittico di curve di genere tre. Conforto Fabio, Gherardelli Francesco), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 309—312 (итал.)

Сообщение о проведенной авторами классификации названных в заглавии поверхностей. Подробное содержание работы см. Ann. mat. pura ed appl., 1952, **33**, 273—351. В. В. Морозов

4799. Построение полюсов и поляр в пространстве n измерений. Демпстер, Шустер (Constructions for poles and polars in n-dimensions. Dempster A. P., Schuster S.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 2, 197—199 (англ.)

Рассматривается введенное Штаудтом понятие симметрического полярности относительно автополярного симплекса и дополнительной пары соответствующих элементов (Staudt C. G. C. von, Geometrie der Lage, Nuremberg, 1847). Штаудтом и его последователями не был решен вопрос об эффективном построении полярного элемента к произвольно заданному элементу. Такое построение для плоскости было дано Кокстером (Coxeter H. S. M., The real projective plane, New York, 1949). В реферируемой работе дается обобщение этого построения для пространства n измерений. М. А. Акивис

4800. Замечание о теореме Римана — Роха. Ходж (A note on the Riemann - Roch theorem. Hodge W. V. D.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 3, 291—296 (англ.)

В работе Спенсера (РЖМат, 1956, 3734; терминология и обозначения см. РЖМат, 1954, 3272—3274; 1955, 3393, 3400) установлена формула для размерности полной линейной системы $|D|$ на неособенном алгебраическом многообразии V_m в терминах некоторых характеров $|D|$, вычисленных для ассоциированного с $|D|$ пучка. Автор выражает эти характеры через более привычные для алгебраических геометров.

В дальнейшем D — дивизор, K — канонический дивизор на V_m, $\Omega^r(D)$ — пучок источников мероморфных r-форм, являющихся кратностями — D, $\chi(V_m, F) = \Sigma_{i=0}^m (-1)^i \dim H^i(V_m, F)$, где F — пучок на V_m, удовлетворяющий условиям (выполняющимся для всех рассматриваемых автором пучков): а) $\dim H^r(V_m, F)$ конечна и б) $H^r(V_m, F) = 0$ при $r > m$. Система $|D|$ называется широкой, если существует многообразие V_m', находящееся с V_m в регулярном бирациональном соответствии и такое, что простые его сечения соответствуют дивизорам $|D|$.

Тогда арифметический жанр V_m равен $\chi(V_m, \Omega^m) - (-1)^m$; величина $\chi(V_m, \Omega^m(D)) - \chi(V_m, \Omega^m) + (-1)^m$ является виртуальным арифметическим жанром D. Если система $|D - K|$ широкая, то из формул Кодайры следует, что $\dim |D| = \chi(V_m, \Omega^\circ(D)) - 1$. Для произвольного D эта величина обозначается через $v_{V_m}(D)$ и называется виртуальной размерностью D. Показывается, что это определение совпадает с опре-

делением виртуальной размерности Севери (Severi F., Ann. mat., 1951, **32**, 1—81). Если $\sigma^r_{V_m}(D) = \dim H^r \times \times (V_m, \Omega^0(D))$ (r-й индекс иррегулярности $|D|$ на V_m) то формула для размерности $|D|$ принимает вид $\dim |D| = v_{V_m}(D) - \Sigma_1^m (-1)^{r-1}\sigma^r_{V_m}(D)$, причем геометрическая интерпретация σ дается следующей теоремой: Если $|X_1|, \ldots, |X_r| - r$ широких систем, и системы $|X_i + D - K|$ также широкие то $\sigma^r_{V_m}$ равен дефекту системы, высекаемой $|D + X_1 + \ldots + X_r|$ на $X_1 \cap \ldots \cap X_r$. В. В. Морозов

4801. О гомалоидных сетях. Легрен-Писсар (Sur les réseaux homaloïdaux de courbes. — L e g r a i n - P i s s a r d), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1954, **23**, № 12, 426—434 (франц.)

Пусть гомалоидная сеть $|A|$ образована кривыми n-го порядка и имеет базисные точки $0, 0_1, \ldots, 0_\nu$ кратности $k, s_1, \ldots, s_\nu$, $k \geqslant s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_\nu$. Классом сети в точке называется разность между порядком кривых сети и их кратностью в этой точке. Сеть $|A|$ имеет наименьший класс $h = n - k$ в точке O. Пусть T_α — преобразование Жонкьера, в котором прямым соответствуют кривые C_α порядка $\alpha + 1$, с α-кратной точкой в O и простыми точками $O_1, \ldots, O_{2\alpha}$. Преобразование T_α переводит сеть $|A|$ в сеть $|A_\alpha|$, состоящую из кривых порядка $n_\alpha = n + \alpha h - \Sigma_{j=1}^{2\alpha} s_j$, причем в силу того, что $h < s_{2\alpha-1} + s_{2\alpha}$ для α меньшего некоторого числа m, $n \geqslant n_1 > \ldots > n_{\alpha-1} > n_\alpha$. Существует только одно значение α равное m такое, что $s_{2m+1} + s_{2m+2} \leqslant h < s_{2m-1} + s_{2m}$. Преобразование T_m переводит сеть $|A|$ в сеть $|B|$.

Теорема. Сети $|A|$ минимального класса h представляют собою преобразования Жонкьера сетей $|B|$, обладающих по крайней мере тремя базисными точками класса ниже h и одной точкой класса h, служащей кратной фундаментальной точкой преобразования. Сумма кратностей двух базисных точек сети $|B|$ не больше h; она меньше h, если они служат фундаментальными точками T_α-преобразования.

Этот результат позволяет автору указать прием построения гомалоидных сетей наименьшего класса h. Приведены примеры построения таких сетей.

Я. П. Бланк

4802. 4-сети и алгебраические тела. Клингенберг (4-Gewebe und Körper. K l i n g e n b e r g W.), Istanbul Üniv. fen fak. mec., 1954, **A19**, № 2, 86—97 (нем.; рез. турец.)

3-сеть — множество точек, в котором выделены подмножества, называемые прямыми, причем выполняются следующие аксиомы: 1) через две различные точки проходит не более одной прямой, 2) через данную точку проходит в точности одна прямая, параллельная данной прямой (две прямые параллельны, если они или совпадают или не имеют общих точек); 3) существуют три прямые g_A, g_B, g_C, попарно имеющие общие точки, но не имеющие общей точки; 4) каждая прямая параллельна в точности одной из прямых g_A, g_B, g_C. 4-сеть содержит 3-сеть $\mathfrak{U}$ и точку P со следующим свойством: если удалить A- и B-прямые (т. е. прямые, параллельные g_A и g_B) 3-сети $\mathfrak{U}$, проходящие через P, вместе с лежащими на них точками, а также все C-прямые 3-сети $\mathfrak{U}'$, не проходящие через P, сохранив лежащие на них точки, то оставшиеся точки и прямые образуют 3-сеть $\mathfrak{U}'$, в которой A'- и B'-прямые совпадают соответственно с A- и B-прямыми, а C'-прямые содержат C-прямую, проходящую через P. Если дано тело K, то точки (a, b) и прямые $x = a$, $y = b$, $y = x + a$, $y = xc$, $c \neq 0$, где a, b, c пробегают все K, образуют 4-сеть. Приводятся конфигурационные предложения, необходимые и достаточные для того, чтобы 4-сеть могла быть получена таким способом. В общем случае с 3-сетью и 4-сетью связаны луппы (Albert, Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 54, 507—519). Л. А. Скорняков

4803. О характеризации полей квазиабелевых функций Севери (Sulla caratterizzazione dei corpi di funzioni quasi abeliane. S e v e r i F r a n c e s c o), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, ed. Cremonese, 1954, 21—26 (итал.)

Дается новое доказательство эквивалентности двух определений полей квазиабелевых функций от n переменных над полем комплексных чисел: а) поле рациональных функций точки неприводимого алгебраического многообразия V_n, допускающего непрерывную абелеву n-параметрическую транзитивную группу бирациональных преобразований в себя и б) поле рациональных функций точки прямого произведения абелева пикарова многообразия V_m ($m \leqslant n$) и линейного пространства S_q ($q = n - m$). Это доказательство было дано автором ранее (Sci. varia della Pontificia Acc. delle Sci., 1947, № 4, 125) при некоторых ограничительных предположениях. В. В. Морозов

4804. Замечание о теореме принадлежности. Везентини (Un'osservazione sul teorema dell'appartenenza. V e s e n t i n i E d o a r d o), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, **18**, № 1, 38—43 (итал.)

Дается новое доказательство «теоремы принадлежности» Сегре $\{P_V\} = (\{P_M\} \cdot \{M_V\})$ (РЖМат, 1955, 2369), независимое от гипотезы о существовании между многообразием V и его подмногообразием P алгебраического виртуально неособенного многообразия N, примененной Сегре в его доказательстве. В. В. Морозов

4805. Теорема дуальности для абелевых многообразий и другие результаты. Барсотти (Il teorema di dualità per le varietà abeliane ed altri risultati. B a r s o t t i I a c o p o), Rend. mat. e applic, 1954, **14**, № 1—2, 98—114 (итал.)

Еще один шаг в деле изгнания из алгебраической геометрии трансцендентных методов. Пусть A — абелево многообразие над полем k характеристики p, $Z_r(A)$ — группа r-мерных циклов на A и $W(A)$ — группа циклов $\chi \equiv 0$ (в смысле А. Вейля). Доказываются следующие теоремы: 1) (Теорема дуальности для случая нулевой характеристики). Если $p = 0$, B — многообразие Пикара для A и C — многообразие Пикара для B, то $C \cong A$ (в случае $p \neq 0$ из доказательства следует лишь, что C является гомоморфным образом A); 2) Существует целое q, равное 1 при $p = 0$ и степени p при $p \neq 0$ такое, что $\chi \equiv 0$ на A тогда и только тогда, когда $q\chi \approx 0$ на A. Отсюда следует, что кручение σ для A при $p = 0$ равно 1. Эти результаты были доказаны ранее лишь трансцендентными методами (например, Igusa J., Amer. J. Math., 1952, **74**, 1; Lefschetz, Trans. Amer. Math. Soc., 1921, **22**, 327). Кроме того, дается доказательство теоремы о базисе: Если n — размерность A и R — кольцо целых рациональных чисел, то $Z_{n-1}(A)/W(A)$ является свободным R-модулем с конечным базисом. В. В. Морозов

4806. О линейном жанре алгебраических поверхностей. Бюрниа (Sul genere lineare delle superficie algebriche. B u r n i a t P o l), Rend. mat. e applic., 1954, **14**, № 1—2, 23—29 (итал.)

Замечая, что из неравенства Севери $p^{(1)} \leqslant 8p_a + 2p_g + 11 - s$ (s — базисное число поверхности), следует, что максимальное возможное значение $p^{(1)}$ при по-

строении канонических поверхностей далеко не достигнуто (РЖМат, 1955, 1931), дается два новых результата в этой области. Пусть задано число $p_g = rs$, $r \geqslant s \geqslant 2$. Тогда: а) существует регулярная каноническая алгебраическая поверхность с жанрами p_g, $p_a = p_g$, $P^{(1)} = 8p_a + 1$; б) существует иррегулярная каноническая алгебраическая поверхность с жанрами p_g, $p_a = p_g - r + 1$, $P^{(1)} = 8p_a + 9$. Построение этих поверхностей проводится исходя из четырехкратной плоскости, соответствующей области рациональности $\{x, y, \sqrt{\varphi_1\varphi_3}, \sqrt{\varphi_2\varphi_3}\}$, где φ_i — полиномы. Кривые ветвления этой плоскости будут кривыми $E_i + E_j$, где E_i — кривая $\varphi_i = 0$. Если $C_n(A_i^{r_i})$ — плоская кривая порядка n с базисными точками A_i заданных кратностей r_i, то а) получается при $E_1 = C_4$, $(A^2 + B^2)\,E_2 = C_{2r+2}\,(A^{2r+2})$, $E_3 = C_{2s+2}(B^{2s+2})$, а б) при $E_1 = C_2\,(A^2)$, $E_2 = C_{2r+2}\,(A^{2r+2})$, $E_3 = C_{2s+2}\,(B^{2s+2})$. В. В. Морозов

4807. О некоторых обобщениях теоремы Нетера. Серре (Intorno ad alcune generalizzazioni di un teorema di Noether. Segre Beniamino), Rend. mat. e appl., 1954, **14**, № 1—2, 75—84 (итал.)

Исследуется вопрос существования односекущей для системы алгебраических многообразий (м.); таким образом, работа связана с теоремой Нетера о бирациональности алгебраической поверхности, содержащей линейный пучок бирациональных кривых. Основным результатом является общая теорема: Пусть Σ — неприводимая алгебраическая ∞^d-система алгебраических м. V над полем K и производящее V погружено в S_r, именно представляется пересечением k гиперповерхностей, заданных однородными уравнениями степеней $n_i\,(i = 1, \ldots, k;\ n_i \geqslant 2)$. Тогда, если $r \geqslant \Sigma n_i^{\alpha}$, то в некотором расширении K' поля K Σ допускает односекущую; иначе говоря, существует такое алгебраическое м. W, являющееся рациональным образом Σ, что производящее V содержит соответствующую ему точку Σ. Для доказательства координаты производящего V представляются в виде линейной комбинации (с неопределенными коэффициентами) специально подобранных форм m-й степени от параметров системы Σ; условие, чтобы они удовлетворяли уравнениям V, приводит к системе уравнений для коэффициентов, которая при достаточно большом m разрешима, если $r \geqslant \Sigma n_i^{\alpha}$. С помощью этой теоремы показывается, что если r достаточно велико по сравнению с α, k, n_i и заданным целым s, то на всяком V из Σ можно найти (в подходящем расширении K) рациональное S_s; в частности, при $n_i = 2\,(i = 1, \ldots, k)$ для этого достаточно, чтобы было $r \geqslant (s + 2^{\alpha})\,k + s$. Приложения этих результатов дают некоторые условия бирациональности м. Так, если $r \geqslant 2^{\alpha}k + k^2 - 1$ и м. W размерности $d + r - k$ содержит ∞^d-систему индекса 1 многообразий V_{r-k}^{2k}, причем производящее V несингулярно и является пересечением k квадрик в S_r, то W — бирационально. Далее, бирационально W_3, содержащее пучок кубических поверхностей, производящая которых имеет в качестве особенностей только три двойных точки. Указывается большое число известных результатов, вытекающих как следствия из теорем автора. В. В. Морозов

4808. Абелевы многообразия над конечными полями. Ланг (Abelian varieties over finite fields. Lang Serge), Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 1955, **41**, № 3,174—176 (англ.)

На абелевы многообразия над конечными полями обобщается свойство существования рациональной точки у эллиптической кривой над конечным полем. Показывается, что если K/k — функциональное поле над конечным полем k и $K/\bar{k}$ — абелево функциональное поле над $\bar{k}$, то K — абелево функциональное поле над k; в частности, K содержит рациональный элемент. Геометрическое следствие этой теоремы: если многообразие U/k оказывается бирационально эквивалентным абелеву многообразию над некоторым расширением k, то U бирационально эквивалентно абелеву многообразию над k.

Подготовительный материал содержит некоторые общие результаты о функциональных полях.

В. В. Морозов

4809. Касание поверхностей в алгебраическом четырехмернике. Баркер (Contact of surfaces on an algebraic fourfold. Barker C. C. H.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 3, 343—350 (англ.)

В алгебраическом неприводимом неособенном четырехмернике V_4 рассматриваются две алгебраические поверхности S и T, имеющие касание в точке π или вдоль кривой C, и исследуется набор γ остальных точек их пересечения. Устанавливается, что в первом случае $\gamma \equiv (ST) - 4\pi$. Во втором случае, если касание S и T вдоль C k-й кратности, а σ и τ — наборы узлов S и T на C, то $(C^2)_S + \sigma \equiv (C^2)_T + \tau$. Обозначив этот набор через δ и полагая $\chi \equiv \xi_C - (CX)$, где ξ и X — канонические многообразия V_4 размерностей 0 и 1 соответственно, находится, что $\gamma \equiv (ST) - k\chi + k\,(k+1)\,\delta - k\,(\sigma + \tau)$. Применительно к случаю, когда $V_4 = S_4$, C — неособенная кривая порядка n и жанра p, $S\,(T)$ — поверхность порядка $n_1\,(n_2)$ с $d_1\,(d_2)$ узлами на C, m — число точек в δ, а c — в γ, эту формулу можно переписать в виде: $c = n_1n_2 - k(2p-2) - 5kn + k(k+1)m - k\,(d_1 + d_2)$. Ранее (J. London Math. Soc., 1951, **26**, 125—131) автор провел аналогичное исследование для трехмерников. В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

4810. Элементарно-геометрические модели для дифференциальной геометрии. Зауэр (Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie. Sauer R.), Elem. Math. 1955, **10**, № 1, 4—11; № 2, 25—32 (нем.)

Продолжение работы Зауэра (РЖМат, 1956, 673). Рассматривается частный случай решеток из плоских четырехугольников, когда попарно равны между собой примыкающие к одной вершине противоположные грани и противоположные углы. Таким решеткам соответствуют поверхности (Фосса), на которых линии сопряженных сетей суть геодезические. Определяются «плосковершинные» четырехугольные решетки, когда ребра, сходящиеся в одной вершине, лежат в одной плоскости (компланарны). Посредством таких решеток интерпретируются поверхности отрицательной кривизны с сетью асимптотических линий на них. Если в плосковершинной решетке сходящиеся в одной вершине противоположные ребра попарно равны между собой, то такая решетка соответствует поверхности константной отрицательной кривизны и удобна для наглядной интерпретации теоремы Эннепера и др.

Рассматриваются модели из изгибаемых плоских полос, посредством которых интерпретируются поверхности вращения и винтовые поверхности, геодезические

линии на них, изгибание поверхностей вращения на винтовые; как частный случай рассматривается изгибание псевдосферы на себя.

Во всех случаях указаны предельные переходы, переводящие определяемые в статьях факты или объекты в соответствующие факты или объекты дифференциальной геометрии. А. А. Гаршнек

4811. О гармоническом полюсе. Казанова (La notion de pôle harmonique. Casanova G.), Rev. math. spéc., 1955, **65**, № 6, 437—440 (франц.)

На плоскости, заданной в изотропных координатах $z = x + iy$, $z' = x - iy$, определяется гармонический полюс M точки M_0 относительно произвольной системы n точек M_i, $i = 1, 2 \ldots n$, при помощи соотношения:

$$\frac{n}{z - z_0} = \frac{1}{z_1 - z_0} + \cdots + \frac{1}{z_n - z_0},$$

где z, z_0, z_i — соответственно изотропные координаты точек M, M_0, M_i. Если $n = 2$, то четыре M, M_0, M_1, M_2 образуют гармонический четырехсторонник или разделяются гармонически, если они лежат на прямой. При $n > 2$ симметрия в расположении точек M_0 и M относительно точек M_i, имеющая место при $n = 2$, отсутствует.

В общем случае оказывается, что гармонический полюс точки M_0 относительно точек M_i остается инвариантным при произвольной инверсии плоскости. Полюсом бесконечно удаленной точки плоскости относительно системы точек M_i является центр этой системы точек. Отсюда становится ясным построение полюса и в общем случае. Отмечается, в частности, что, если точки M_0 и M_i лежат на одной прямой или окружности, то точка M также лежит, на этой прямой или окружности.

Затем на плоскости рассматривается алгебраическая кривая C_n порядка n и произвольная точка M_0. Переменная прямая, проходящая через M_0, пересекает кривую в n точках M_i. Пусть M — гармонический полюс точки M_0 относительно этих точек. Оказывается, что, геометрическим местом точек M будет прямая — поляра порядка n точки M_0 относительно кривой C_n. Если M_0 — бесконечно удаленная точка, то получается диаметр порядка n кривой C_n.

Понятия гармонического полюса и поляры порядка n относительно алгебраической кривой C_n позволяют доказать ряд предложений, относящихся к теории алгебраических кривых. М. А. Акивис

4812. Об одном классе уравнений в частных производных первого порядка. Булиган (Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Bouligand G.), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 297—299 (франц.)

Шесть ребер двух прямоугольных трехгранников с общей вершиной лежат на общем конусе второго порядка. Поэтому две триортогональные системы определяют в каждой точке пространства конус второго порядка, а все шесть семейств поверхностей удовлетворяют одному уравнению в частных производных второго порядка

$$\alpha(p^2 - 1) + \beta(q^2 - 1) + 2(\gamma pq + Ap + Bq) = 0. \quad (1)$$

Если одна система состоит из плоскостей $x = \lambda$, $y = \mu$, $z = \nu$, уравнение сводится к следующему

$$pq + Ap + Bq = 0. \quad (2)$$

Отправляясь от данной триортогональной системы, легко составить соответствующее ему уравнение (2), но труднее установить для данного уравнения (2), порождается ли оно триортогональной системой, и восстановить систему по уравнению (2). Эту последнюю задачу автор решает лишь в отдельных частных случаях (Gaz. mat., 1950, **11**, № 7, 1—6). Я. П. Бланк

4813. Специальные конические поверхности. Нюстрём (Speciella koniska ytor. Nyström E. J.), Nord. mat. tidskr., 1955, **3**, № 1—2, 27—32 (швед.)

Цель статьи — показать, что коническая поверхность $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ является не только предельным случаем более общих поверхностей, но обладает рядом самостоятельных свойств. Некоторые из них формулируются геометрически (например, наличие трех взаимно перпендикулярных образующих) и потом даются соответствующие аналитические условия ($1/a^2 + 1/b^2 - 1/c^2 = 0$). Новых результатов статья не содержит. Г. К. Энгелис

4814. О сверхсоприкасающихся конических сечениях. Шкорпик (O hyperoskulačních kuželosečkách. Škorpik Vladimír), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 2, 232—241 (чеш.)

4815. Обобщение формул Френе и изоморфизм некоторых частей дифференциальной геометрии пространственных кривых. Билинский (Eine Verallgemeinerung der Formeln von Frenet und eine somorphie Gewisser Teile der Differentialgeometrie der Raumkurven. Bilinski Stanko), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 200—201 (нем.)

Для кривой C трехмерного евклидова пространства можно записать две бесконечные последовательности скалярных функций

$\varkappa_1(s), \varkappa_2(s), \ldots, \varkappa_i(s), \ldots; \quad \tau_1(s), \tau_2(s), \ldots, \tau_i(s), \ldots,$

где $\varkappa_i = \varkappa_i(s)$ и $\tau_i = \tau_i(s)$ называются i-й кривизной и i-м кручением C, $\varkappa_{i+1} = \sqrt{\varkappa_i^2 + \tau_i^2}$, $\tau_{i+1} = (\varkappa_i \dot{\tau}_i - \dot{\varkappa}_i \tau_i)/(\varkappa_i^2 + \tau_i^2)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Затем каждой точке придаются две бесконечные последовательности векторов: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i, \ldots$, где ξ_1 — вектор касательной, ξ_2 — главной нормали, η_1 — бинормали, и

$$\xi_{i+1} = \eta_i \times \xi_i, \quad \eta_{i+1} = (\tau_i \xi_i + \varkappa_i \eta_i)/\sqrt{\varkappa_i^2 + \tau_i^2}.$$
$$(i = 1, 2, \ldots).$$

Все векторы ξ_i, η_i единичные, и каждая тройка векторов $D_i \equiv \{\xi_i \xi_{i+1} \eta_i\}$ образует правый прямоугольный трехгранник. Для единичных векторов D_i справедливы формулы:

$d\xi_i/ds = \varkappa_i \xi_{i+1}$, $d\xi_{i+1}/ds = -\varkappa_i \xi_i + \tau_i \eta_i$, $d\eta_i / ds = -\tau_i \xi_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, которые при $i = 1$ совпадают с формулами Френе. Поэтому каждая теорема о пространственной кривой, для доказательства которой достаточны формулы Френе, остается справедливой, если элементы трехгранника D_1 заменить соответствующими элементами трехгранника $D_i (i = 2, 3, 4, \ldots)$. Так, некоторая часть дифференциальной геометрии пространственных кривых изоморфно отображается на другую ее часть. Благодаря этому из известных теорем получаются новые теоремы о пространственных кривых или обобщения известных теорем. Г. Г. Бикматова

4816. О геодезической кривизне. Баккес (Sur la courbure géodésique. Backes F.), Bull. cl. sci. Acad. Belgique, 1954, **40**, № 11, 1080—1089 (франц.)

Прибегая к кинематическим соотношениям, автор дает относительно простое доказательство известной формулы Бонне, выражающей интеграл геодезической кривизны вдоль замкнутой кривой, и выводит формулу геодезической кривизны. Дается вывод условия равновесия жидкой пленки под действием сил поверхностного натяжения ($H = 0$). Л. Л. Вербицкий

4817. Об одном частном случае конфигурации двенадцати поверхностей Дарбу. Баккес (Sur une configuration particulière des douze surfaces de Darboux. Backes F.), Bull. cl. sci., Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 3, 370—372 (франц.)

Если $\mathbf{r}$ есть радиус-вектор точки P поверхности $P(\mathbf{r})$ с постоянной полной кривизной $K = H^2$, то поверхности $P_1(\mathbf{r}_1)$, $P_2(\mathbf{r}_2)$, $Q_1(\rho_1)$, $Q_2(\rho_2)$, определяемые соотношениями (n-орт нормали): $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{n}/H$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{n}/H$, $Hd\rho_1/2 = (\mathbf{n} + H\mathbf{r}_1/2) \wedge d\mathbf{r}_1$, $-Hd\rho_2/2 = (\mathbf{n} - H\mathbf{r}_2/2) \wedge d\mathbf{r}_2$, являются первой четверкой поверхностей известной конфигурации двенадцати поверхностей Дарбу (Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. IV, Paris, Gauthier-Villars, 1896, 59), так как конгруэнции Q_1Q_2 и P_1P_2 являются конгруэнциями W, а поверхности P_i и $Q_i (i = 1, 2)$ соответствуют ортогональностью элементов. При соответствующем выборе постоянной интегрирования отрезки Q_1Q_2, перпендикулярные плоскостям OP_1P_2, имеют длины, пропорциональные расстояниям от начала координат до прямой P_1P_2. Развертывающиеся поверхности конгруэнции Q_1Q_2 соответствуют линиям на поверхностях P_1 и P_2, перпендикулярным плоскости OP_1P_2. Р. Н. Щербаков

4818. Об одном свойстве линейных комплексов в инволюции. Годо (Sur une propriété de certains complexes linéaires en involution. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 2, 78—82 (франц.)

Рассматривается однопараметрическое семейство линейных комплексов X. Каждому комплексу X ставится в соответствие линейный комплекс Y, находящийся в инволюции с X и с четырьмя линейными комплексами, уравнения которых получаются из уравнения комплекса X дифференцированием по параметру. Тогда комплекс X будет в инволюции с Y и четырьмя комплексами, получающимися из Y таким же способом. Характеристические демиквадрики комплексов X и Y являются двумя семействами прямолинейных образующих одной и той же квадрики. Огибающая этих квадрик является геометрическим местом директрис характеристических линейных конгруэнций комплексов X и Y. Р. Н. Щербаков

4819. Квадрики и коники Мутара. Годо (Quadriques et coniques de Moutard. Godeaux Lucien), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 152—161 (франц.)

Совокупность квадрик, имеющих с нелинейчатой поверхностью (x) в данной ее точке касание 2-го порядка, в локальной системе координат может быть представлена уравнением

$$\lambda_1 (z_1z_4 - z_2z_3) + \lambda_2z_2z_4 + \lambda_3z_3z_4 + \lambda_4z_4^2 = 0.$$

Применяя бирациональное преобразование

$$z_1' / (z_1z_4 - z_2z_3) = z_2' / z_2z_4 = z_3' / z_3z_4 = z_4' / (-z_4^2),$$

автор доказывает два из трех предложений, сформулированных Мутаром в его письме к Понселе (Poncelet, Applications d'analyse et de géométrie, Paris, 1864):

1. Коники (кривые 2-го порядка), имеющие касание 4-го порядка в обыкновенной точке поверхности с линией пересечения последней плоскостями, проходящими через одну касательную к поверхности, принадлежат одной квадрике (квадрика Мутара).

2. Среди этих коник имеется две, имеющих с поверхностью касание 5-го порядка. Эти два предложения, а также и третье сформулированное ниже, были после Мутара вновь найдены и доказаны Дарбу, а позднее Чехом было найдено и уравнение квадрики Мутара. Новым является применение метода кремоновых преобразований к решению рассматриваемого вопроса. Автор показывает, что этим методом не может быть доказано третье предложение Мутара, гласящее:

3. Существует 27 коник, имеющих касание 6-го порядка с поверхностью в обыкновенной ее точке. Н. И. Кованцов

4820. О некоторых проективных инвариантах поверхности. Вычихло (O některých projektivních invariantech plohy. Vyčichlo F.), Mat.-fys. časop., 1953, **3**, № 1—2, 41—47 (словац.; рез. русс.)

Для поверхности, заданной в окрестности начала координат уравнением $z = P_n(x, y) + R_n$, где P_n — полином степени $n \geqslant 4$, а R_n — бесконечно малое $(n+1)$-го порядка, методами элементарной алгебраической геометрии выводятся уравнения касательных Дарбу, поверхностей второго порядка Дарбу, кривых третьего порядка Страццери и ребер Грина. E. Čech

4821. Поверхностные элементы третьего порядка, имеющие общий центр в точке уплощения и общую касательную плоскость. Салини (Calotte superficiali del terzo ordine inflessionali con lo stesso centro e lo stesso piano tangente. Salini Ugo), Univ. Roma Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl., 1952, **11**, (5), 434—452 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

В связи с предшествующими работами Бомпьяни (Bompiani E., там же, 1941, **2**, (5), 261—291) и Лонго (Longo C., там же, 1948, **7**, 295—326) множество всех элементов третьего порядка с центром в точке уплощения, с общей для них касательной плоскостью в этой точке, изучается по отношению к проективной группе. Эти элементы рассматриваются как точки проективного четырехмерного пространства по отношению к группе коллинеаций, оставляющих инвариантными: трехмерный конус четвертого порядка; двумерный конус третьего порядка, принадлежащий предыдущему и имеющий с ним общую вершину; гиперплоскость (не проходящую через вершину).

Изучаются линейные системы таких элементов и их инварианты. E. Bompiani

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 741

4822. Репер линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции. Щербаков Р. Н., Уч. зап. Бурят-Монг. гос. пед. ин-та, 1954, № 5, 61—89

1. Строится в трехмерном евклидовом пространстве канонический репер линейчатой поверхности, принадлежащей конгруэнции (направления ребер его совпадают с направлением прямолинейной образующей, нормали к линейчатой поверхности в точке встречи луча с горловой линией и касательной к ней); устанавливаются связи его элементов и инвариантов с элементами и инвариантами канонического репера линейчатой поверхности и канонического репера конгруэнции.

Построенный репер прилагается к изучению конгруэнций со специальными свойствами развертывающихся поверхностей. Определяются конгруэнции, у которых одна из фокальных поверхностей вырождается в линию. Как частный случай сюда входят конгруэнции, оба семейства развертывающихся поверхностей которых состоят из конусов, сферическое изображение которых (по лучам) образует ортогональную сеть. Произвол их зависит от 4 постоянных, конусы прямые кру-

говые и пересекают среднюю поверхность по сопряженной чебышевской сети.

Определяются конгруэнции, у которых одно семейство развертывающихся поверхностей состоит из прямых коноидов, а также конгруэнции, у которых средняя поверхность пересекает одно семейство развертывающихся поверхностей по линиям кривизны или геодезическим.

2. Доказывается: К любой линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции, можно присоединить линейчатую поверхность, принадлежащую другой конгруэнции, при условии неизменной связи их канонических Ф-реперов. Нормали к L, L^* в точках пересечения соответствующих лучей со средней поверхностью параллельны. Только к линейчатой поверхности $\eta = \text{const}$ конгруэнции можно присоединить линейчатую поверхность при произвольном выборе неизменной связи реперов.

3. Примем однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей F данной конгруэнции K за параметрическое семейство $v = \text{const}$. Подвергнем каждую поверхность $v = \text{const}$ преобразованию движения, зависящему от параметра v; в результате этого преобразования (которое автор обозначает через E) получим новую конгруэнцию K^*.

Для определенности преобразования E в работе ставятся дополнительные условия. Показывается, что сеть цилиндроидов, сферические изображения которых по лучам ортогональны друг другу, подходящим преобразованием E отображается в сеть, сферическое изображение которой также ортогонально.

Когда преобразование E сохраняет среднюю поверхность конгруэнции, то этому условию удовлетворяет однопараметрическое семейство цилиндроидов.

Если E сохраняет нормальную конгруэнцию, то существует 6 искомых однопараметрических семейств линейчатых поверхностей, решающих эту задачу.

Поверхности $\eta = \text{const}$ входят в этот класс и суть единственные поверхности, дающие нетривиальное решение для случая, когда E состоят из параллельных переносов. Рассмотрено преобразование E-конгруэнции Гишара — Пето, при котором средняя поверхность преобразованной конгруэнции ортогональна лучам конгруэнции. Н. Г. Туганов

4823. Об одном аффинно-инвариантном классе линий на поверхности. Щербаков Р. Н., Уч. зап. Бурят.-Монг. гос. пед. ин-та, 1954, № 5, 51—60

На поверхности трехмерного эквиаффинного пространства, аналогично метрической геометрии, устанавливается при помощи присоединенной кривой характеристика линий, инварианты (аффинно-дифференциальные) которых связаны линейным соотношением с постоянными коэффициентами. Получены следующие результаты:

1. Линии L на произвольной поверхности, к каждой из которых можно присоединить кривую, точка и направление которой неизменно (в аффинно-инвариантном смысле) связаны с каноническим репером линии L в соответствующей точке, определяются тем условием, что аффинно-дифференциальные инварианты их α, μ, π, γ связаны линейным соотношением с постоянными коэффициентами. Точка M^* присоединенной линии L^* находится в плоскости, проходящей через аффинную нормаль к поверхности и направление, сопряженное в смысле Дюпена с направлением линии L; направление L^* параллельно касательной плоскости поверхности в соответствующей точке линии L. В частности, получаются характеристики линий на поверхности вида $\mu + r\pi = 0$, $a^2\alpha - a^3\pi = 0$, линий Дарбу $\alpha = 0$, цилиндрических $\gamma = 0$, аффинных линий кривизны $\pi = 0$; для линии $\gamma = \text{const}$ присоединенная кривая есть геометрическое место ее лучевых точек.

2. На произвольной поверхности существуют линии L, к каждой из которых можно присоединить линию L^* на другой поверхности так, что точка L^* неизменно (в аффинном смысле) связана с репером линии L в соответствующей точке, а векторы канонического репера L^* неизменно связаны по направлению с каноническим репером линии L. Уравнение линий L имеет вид

$$a_0^2(\alpha + a_1^2\gamma) + a_0^3(a_1^2\mu - \pi) + a_1^2 = 0,$$

где a_0^2, a_0^3, a_1^2 — произвольные постоянные. Связь между каноническими реперами линий L, L^* в соответствующих точках характеризуется следующим образом: точка L^* лежит в плоскости сопряженного нормального сечения линии L, касательная к линии L^* параллельна касательной плоскости поверхности, на которой лежит линия L; сопряженные направления L, L^* параллельны между собой. Инварианты линии L^* выражаются через инварианты L и величину $\lambda_1^3 = \varphi(s)$, определяющую отношение координат лучевых точек L, L^*.

3. На произвольной поверхности линия L вида $b\alpha - c\pi = 0$, где b, c — произвольные постоянные, помимо присоединенной кривой со связью канонических реперов, охарактеризованной в 2), имеет еще присоединенную линию L^* с другой связью реперов. Касательные в соответствующих точках M и M^* линий L, L^* параллельны, сопряженное направление L^* совпадает с направлением MM^*. Н. Г. Туганов

4824. О перенесении метрики квадрик Ли. Винченсини (Sur une traduction métrique de l'existence des quadriques de Lie d'une surface. Vincensini Paul), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 5, 481—483 (франц.)

Устанавливается: если кривые фокальных сетей (u, v) нормальной конгруэнции не являются ребрами возврата ее развертывающихся поверхностей, то в двух гомологичных точках соприкасающиеся плоскости к указанным кривым взаимно ортогональны. Кроме того, существуют два конуса (автор называет их фокальными), которые имеют с указанными кривыми соприкосновение второго порядка. Н. И. Алексеев

4825. Системы конгруэнций W. Фиников С. П. (Systèmes de congruences W. Finikoff S.), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 312—321 (франц.)

Дается обзор исследований автора и его учеников с 1941 г. К двум конгруэнциям со взаимно однозначным соответствием лучей можно присоединить два многообразия по ∞^3 плоскостных элементов Ли. Центр элемента лежит на луче одной, а его плоскость проходит через соответствующий луч другой конгруэнции. Если существуют два семейства по ∞^1 поверхностей, касающихся элементов Ли в их центрах, то два многообразия ∞^3 плоскостных элементов и исходные конгруэнции расслояемы. Точки поверхностей расслояющих семейств соединены касающимися лучами ∞^2 конгруэнций W, образующих систему Бианки. Автор обобщает это построение. Берутся два семейства по ∞^1 плоскостей и линейный комплекс, имеющий соприкосновение 2-го порядка с ребрами возврата обоих семейств. Комплекс устанавливает полярное соответствие между точками и прямыми соответствующих плоскостей двух семейств и сопоставляет каждой точке (центру), принадлежащей плоскости одного и другого семейства, плоскость, проходящую через центр, и его полярно сопряженную прямую. Возникают два многообразия ∞^3 плоскостных элементов Ли. Эти многообразия расслаиваются двумя семействами ∞^1 линейчатых поверхностей M и P, образующие которых лежат на плоскостях первоначальных двух семейств плоскостей. Пересекаясь, плоскости многообразий порождают систему из ∞^2 конгруэнций W, аналогичную системе Бианки.—

фокальные поверхности конгруэнций совпадают с расслаивающими линейчатыми поверхностями.

Система W, лучи которой соединяют прямолинейные образующие поверхностей M и P, обобщается путем замены прямых образующих расслояющими кривыми линиями — асимптотическими на поверхностях. Касательные соответствующих асимптотических принадлежат одному линейному комплексу. Конгруэнция W асимптотически преобразует поверхности с сохранением комплекса, соприкасающегося с соответствующими асимптотическими. Исходя из многообразия ∞^2 плоскостей, касательных к двум поверхностям со взаимно однозначным соответствием точек, Н. В Лактанова пришла к системе ∞^3 конгруэнций W с двумя семействами ∞^2 фокальных поверхностей; фокусы каждой конгруэнции лежат в соответствующих фокальных плоскостях другой. Т. Л. Козьмина построила сеть преобразований Лапласа системы трижды сопряженных поверхностей в P_3 и последовательности Лапласа, вписанные и описанные относительно трижды сопряженной системы. Р. В. Смирнов и В. Т. Базылев рассмотрели сопряженные системы в P_n. И. Н. Григорьев изучил обобщение в E_n задачи Бианки об асимптотических преобразованиях псевдосферических трижды ортогональных систем. Введя, помимо точечных и тангенциальных инвариантов Дарбу, внешние инварианты трижды сопряженной системы в P_4, В. И. Коровин дал первое частное решение задачи Бианки об определении трижды сопряженных систем R. Т. А. Шульман, поставив некоторые требования о соответствии и взаимном расположении сопряженных сетей и о свойствах их преобразований Лапласа, исследовала асимптотические преобразования систем R (с одним семейством поверхностей R) в P_3.

Автор обобщил понятие расслоения и системы W, применив в исследовании трижды сопряженных систем R комплекс прямых, переводящий одну трижды сопряженную систему R в другую. Пара комплексов расслаивается двумя семействами систем R. В. И. Коровин перенес понятие расслоения на пары многообразий («комплексов») из ∞^3 плоскостей P_2 в P_5, требуя существования двух семейств многообразий $\mathfrak{M}_3$, касательные P_3 к которым в точках пересечения с плоскостями P_2 одного «комплекса» проходят через соответствующие плоскости P_2 другого, и наоборот. Аналогом системы W оказывается то, что семейства многообразий $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_3'$ связаны между собой асимптотическими преобразованиями. Встречаются опечатки в показателях степеней. К. Н. Тихоцкий

4826. Об обратной конгруэнции Рибокура. Кришна (On the reciprocal congruence of Ribaucour. Krishna Shri), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, **39**, 5 sér, № 12, 1094—1111 (англ.)

Пусть S и S_1 — две поверхности, соответствующие ортогональностью линейных элементов. Конгруэнция, образованная лучами, проходящими через точки поверхности S_1 параллельно нормалям поверхности S, называется конгруэнцией Рибокура. Обратной конгруэнцией Рибокура называется конгруэнция, образованная лучами, проходящими через точки поверхности S параллельно нормалям поверхности S_1. Получены формулы для определения характеристической функции Бианки. Для поверхности S_1 вычислен кососимметричный фундаментальный тензор и из этого выведены некоторые геометрические свойства. Написаны различные выражения для определения параметра распределения, расстояния центральной точки и фундаментального тензора сферического представления обратной конгруэнции Рибокура. Определены необходимые и достаточные условия для того, чтобы обратная конгруэнция Рибокура была нормальной, и выведены все вышеупомянутые формулы для этого частного случая. Н. В. Лактанова

4827. О проективно-дифференциальных инвариантах однопараметрического семейства кривых на плоскости. Наденик (O projektivnich diferenciálnich invariantech rovinné vrstvy křivek. Nádenák Zbyněk), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 3, 229—258 (чеш.)

Изучается проективно-дифференциальная геометрия однопараметрического семейства кривых на проективной плоскости S_2. Теория таких семейств является частным случаем теории нулевых соответствий проективного пространства S_n, т. е. преобразований точек в проходящие через них гиперплоскости. В данном случае каждой точке S_2 соответствует касательная в этой точке к кривой семейства, проходящей через эту точку. Метод исследования — метод подвижного репера Картана. Автор определяет проективные нормали семейства в каждой точке и выясняет их геометрический смысл. Находятся также инварианты семейства. Alois Urban

4828 К. Проективно-дифференциальная геометрия. Бол (Projektive Differentialgeometrie. T. 2. Bol Gerrit, Göttingen, Vandenhoeck &Ruprecht, 1954, V, 372 S., ill., 38 DM.—), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, A, № 51, 2588 (нем.)

4829 Д. Преобразование расслояемых и сопряженных пар конгруэнций посредством преобразования Лапласа в P_5. Березман А. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1955

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

4830. Шестиугольные ткани и циклы с ассоциативными степенями. Пиккерт (Sechseckgewebe und potenzassoziatiwe Loops. Pickert Günter), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **3**, Amsterdam, 1954, 245—246 (нем.)

Краткое сообщение о возможности доказать, не обращаясь к соображениям, связанным с непрерывностью, теорему: Архимедовски упорядоченная шестиугольная ткань изоморфна (также и в смысле упорядоченности) ткани из прямых трех параллельных пучков вещественной аффинной плоскости. В. В. Рыжков

4831. Проективные изгибания однопараметрических семейств гиперповерхностей. Чех (Deformazione proiettiva di strati d'ipersuperficie. Čech E.), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, ed. Cremonese, 1954, 266—273 (итал.)

Пусть C — аналитическое соответствие между двумя линейными пространствами S_n и S_n', Σ — однопараметрическое семейство (strato) гиперповерхностей в S_n, Σ' — соответствующее ему семейство в S_n'. C называют проективным изгибанием Σ, если для каждой пары соответственных точек A, A' существует такая коллинеация $K = K(A, A')$ между S_n и S_n', которая для каждой кривой γ, проходящей через точку A, дает кривую K_γ, имеющую с кривой C_γ аналитическое касание первого порядка, а для кривой γ, расположенной на гиперповерхности Σ, — второго порядка. В работе рассматриваются свойства этого изгибания.

При $n = 2$ соответствие C есть проективное изгибание только для семейства Σ из характеристических кривых соответствия C. Если $n \geqslant 3$, то в случае, когда Σ и Σ' состоят из гиперплоскостей, — соответствие

C каждой пары этих гиперплоскостей является коллинеарным. Наоборот, если в соответствии C есть семейство гиперплоскостей Σ, коллинеарно преобразующихся в семейство Σ, то C есть проективное преобразование для Σ.

Если взять пространство $S_n \times S_n'$ всех пар точек (x, x') пространств S_n и S_n' (а не только соответствующих), то соответствиям C и K будут соответствовать в этом пространстве некоторые многообразия размерности n.

Если K есть коллинеация, касательная к соответствию C, то между этими многообразиями имеет место касание. В каждой точке (A, A') существуют в общем случае касательные коллинеации K так, что C является огибающей ∞^n касательных коллинеаций K. Рассматриваются случаи, когда это число уменьшается до ∞^r, $r < n$. В наиболее простом случае $r = 1$ имеют развертывающиеся соответствия C, для которых в S_n и S_n' существуют коллинеарно соответствующие гиперплоскости однопараметрических семейств Σ и Σ'. Обращаясь к вопросу о соответствиях C между S_n, S_n', которые были бы проективными изгибаниями для более чем одной пары семейств Σ, Σ', автор отмечает, что для $n \geqslant 3$ число таких пар Σ, Σ' не может быть больше двух. В случае $n \geqslant 4$ дается безинтегральное представление соответствия C с двумя парами семейств Σ, Σ' с помощью некоторого линейного пространства S_{n+1} и некоторой неразвертывающейся поверхности P в нем, принадлежащей S_3. В случае $n = 3$ свойства C существенным образом связаны с проективным изгибанием нелинейчатой поверхности P в S_3. Отмечается связь между преобразованием C и асимптотическим преобразованием конгруэнций, имеющих P своей фокальной поверхностью. Вводятся в рассмотрение так называемые касательные Картана как касательные к таким кривым γ на P, для которых кривые C_γ и K_γ имеют касание третьего порядка. Кривые, огибаемые касательными Картана, определяют на P некоторую сеть R.

При $n > 3$, за исключением тривиального случая, не может существовать C с неразвертывающимися поверхностями семейства Σ (развертывающимися называются огибающие однопараметрического семейства гиперплоскостей). Преобразование по принципу двойственности переводит семейство Φ касательных плоскостей к поверхностям Σ в некоторую поверхность Δ, а поверхности семейства Σ — в кривые на Δ; автор называет классом семейства Σ размерность d пространства, к которому принадлежит Δ. Рассматриваются случаи, когда d принимает те или иные значения, причем в каждом случае указывается широта решения.

Н. И. Кованцов

4832. О вложении гиперболического пространства в евклидово пространство. Б л а н у ш а (Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume. B l a n u š a D a n i l o), Monatsh. Math., 1955, 59, № 3, 217—229 (нем.)

Доказывается возможность бесконечно дифференцируемого вложения плоскости Лобачевского в шестимерное евклидово пространство R_6 (вложение — реализация метрики без самопересечений). Именно, если

$$\psi_1(u) = e^{2[(|u|+1)/2]+5}, \quad \psi_2(u) = e^{2[|u|/2]+6},$$

$$A = \int_0^1 \sin \pi\xi e^{-1/\sin^2 \pi\xi}\, d\xi,$$

$$\varphi_1(u) = \left((1/A)\int_0^{u+1} \sin \pi\xi e^{-1/\sin^2 \pi\xi}\, d\xi\right)^{1/2},$$

$$\varphi_2(u) = \left((1/A)\int_0^{u} \sin \pi\xi e^{-1/\sin^2 \pi\xi}\, d\xi\right)^{1/2},$$

$f_1(u) = (\varphi_1(u) / \psi_1(u)) \operatorname{sh} u$, $f_2(u) = (\varphi_2(u) / \psi_2(u)) \operatorname{sh} u$, то непосредственной проверкой можно убедиться, что поверхность, заданная в R_6 параметрическими уравнениями

$$x_1 = \int_0^u \sqrt{1 - [f_1'(\xi)]^2 - [f_2'(\xi)]^2}\, d\xi; \quad x_2 = v,$$

$$x_3 = f_1(u)\cos(v\psi_1(u)); \quad x_4 = f_1(u)\sin(v\psi_1(u)),$$

$$x_5 = f_2(u)\cos(v\psi_2(u)); \quad x_6 = f_2(u)\sin(v\psi_2(u)),$$

является бесконечно дифференцируемым вложением плоскости Лобачевского в R_6.

Приводится также конкретное вложение n-мерного гиперболического пространства в $(6n-5)$-мерное евклидово пространство. Э. Г. Позняк

4833. О дифференциальных инвариантах конформно-плоских трехмерных пространств Римана. П е т р о в П. И., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, 114, № 2, 109—122

Для трехмерного риманова пространства V_3 тензор кривизны может быть записан в виде: $B_{\gamma\mu\lambda\varkappa} = 4g_{[\gamma[\lambda} \times L_{\mu][\varkappa]}$, $L_{\mu\varkappa} = L_{\varkappa\mu}$, вследствие чего отыскание дифференциальных инвариантов V_3 сводится к отысканию алгебраических инвариантов тензоров $g_{\lambda\mu}$, $L_{\lambda\mu}$, $L_{\lambda\mu,\nu}\ldots$ (запятой отделяются индексы ковариантного дифференцирования).

В данной работе речь идет об инвариантах 3-го порядка, т. е. об инвариантах тензоров $g_{\lambda\mu}$, $L_{\lambda\mu}$, $L_{\lambda\mu,\nu}$. Кроме того, автор ограничивается конформно-плоскими римановыми пространствами, вследствие чего $L_{\lambda[\mu,\nu]} = 0$, и вместо $L_{\lambda\mu,\nu}$ можно рассматривать тензор $C_{ijk} = 3L_{(ij),k}$. Ставится задача отыскания 13 абсолютных инвариантов тензоров $g_{\alpha\beta}$, $L_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta\gamma}$ функционально независимых между собой (13 — максимально возможное число таких инвариантов). Для этой цели ищется 14 (в тексте ошибочно 12) целых рациональных (относительных) инвариантов тех же тензоров, функционально независимых между собой. Пользуясь символическим методом, обозначаем тернарные формы

$$g_{\alpha\beta}z^\alpha z^\beta, \qquad L_{\alpha\beta}z^\alpha z^\beta, \qquad C_{\alpha\beta\gamma}z^\alpha z^\beta z^\gamma$$

соответственно через $(gz)^2$, $(lz)^2$, $(az)^3$.

Известны следующие инварианты (в символической записи). Для форм $(gz)^2$, $(lz)^2$:

$$i_1 = {}^1/_6(gg'g'')^2, \quad i_2 = {}^1/_2(gg'l)^2, \quad i_3 = {}^1/_2(gll')^2,$$
$$i_4 = {}^1/_6(ll'l'')^2.$$

Для формы $(az)^3$:

$S = (abc)(abd)(acd)(bcd)$, $T = (abc)(abd)(ace)(bcf)(def)^2$.

Далее автор вводит два новых тензора

$$p_{\alpha\beta} = C_{\alpha\sigma\tau}C^{\sigma\tau}{}_{\cdot\cdot\beta}, \qquad q_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\tau}C^{\tau\sigma}{}_{\cdot\cdot\sigma}$$

(индексы поднимаются как обычно при помощи $g^{\alpha\beta}$) и, обозначая символически соответствующие квадратичные формы через $(pz)^2$, $(qz)^2$, составляет инварианты:

$$j_1 = {}^1/_2(gg'p)^2, \quad j_2 = (gpp'), \quad j_3 = {}^1/_2(gg'q)^2,$$
$$j_4 = {}^1/_2(gqq')^2, \quad j_5 = {}^1/_6(qq'q'')^2$$

(в тексте ошибочно стоит a, b вместо g, g'). Эти инварианты вместе с S, T образуют максимальную систему функционально независимых ортогональных инвариантов тернарной кубической формы.

К построенным 11 инвариантам присоединяются еще три: $\omega_1 = (glp)^2$, $\omega_2 = (glq)^2$, $\omega_2 = {}^1/_2\,(lqq')^2$, причем показывается функциональная независимость полученных 14 инвариантов. П. К. Рашевский

4834. О конформных римановых пространствах. Курита (On conformal Riemann spaces. Kurita Minoru), J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 1, 13—31 (англ.)

Единым методом излагаются известные (Вербицкий, Схоутен, Фиалков и др.) и некоторые новые результаты, относящиеся к теории конформного соответствия римановых пространств S и S_1: $ds_1^2 = a^2 ds^2$. Вводятся следующие обозначения

$$ds^2 = \Sigma\omega_i^2; \quad d\ln a = b_i\omega_i; \quad Db_i = b_j\omega_{ji}' - b_i d\ln a = p_{ik}\omega_k; \quad p_{ik} = p_{ki}.$$

Собственные значения $p_1, p_2, \ldots, p_n$ матрицы $\| p_{ik} \|$ автор называет характеристическими корнями конформного соответствия S_1 с S.

Доказывается: Если S_1 и S находятся в конформном соответствии, но не подобны, то для равенства $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ необходимо и достаточно, чтобы при удобном выборе координат линейные элементы были представлены в виде

$$ds_1^2 = a^2(x_1)\{dx_1^2 + c^2(x_1)\, g_{\alpha\beta}(x_2, \ldots, x_n)\, dx_\alpha dx_\beta;$$
$$\frac{1}{a(x_1)} = -\int c(x_1)\, dx; \quad (\alpha, \beta = 2, \ldots, n)$$

Для того чтобы характеристические корни конформного соответствия S_1 и S были все равны, необходимо, а в случае $b_i \neq 0$ и достаточно существование в S и S_1 $(n-1)$-параметрических семейств геодезических, которые являются соответственными в конформном соответствии S_1 с S. Если S и S_1 — конформно соответственные пространства Эйнштейна, то все характеристические корни соответствия S_1 с S равны. Для пространств постоянной кривизны доказывается теорема Лиувилля. Если S — n-мерное $(n \geqslant 4)$ конформно плоское риманово пространство класса 1, то характеристические корни конформного соответствия S с евклидовым E_n все равны, кроме одного $(p_2 = p_3 = \cdots = p_n)$ и если S вложено в E_{n+1} в качестве гиперповерхности Σ_n, то ее главные кривизны все равны, кроме одной $(k_2 = k_3 = \cdots k_n)$.

Для того чтобы Σ_n было огибающей однопараметрического семейства сфер в Σ_{n+1} $(n \geqslant 3)$, необходимо равенство всех, кроме одной главной кривизны гиперповерхности, а если $k_i \neq 0$, то это условие является достаточным.

Если у Σ_n $(n \geqslant 3)$ $k_2 = k_3 = \cdots = k_n$, то риманова метрика конформно плоская. Если же S — конформно плоское риманово пространство и характеристические корни конформного соответствия S с E_n все равны p, кроме одного, и кроме того, $p < \Sigma b_i^2/2$, то S — 1-го класса. В. И. Ведерников

4835. Об однородных компактных пространствах с положительной эйлеровой характеристикой. Герман (Sur les espaces homogènes compacts de caractéristique positive. Hermann Robert), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 12, 1303—1305 (франц.)

Рассматриваемый автором класс пространств совпадает с классом однородных пространств, для которых группа движений есть компактная группа Ли и стационарная подгруппа имеет ранг, равный рангу группы движений. Все такие пространства были перечислены Борелем и Зибенталем (Borel A., Siebenthal de, Comment math. helv., 1949, **23**, 200) и, независимо от них, другим методом, референтом (Докл. АН СССР, 1950, **73**, 877). Опираясь на эту классификацию, а также на выведенную Ж. Лерэ формулу для полиномов Пуанкаре таких пространств, автор исследует: 1) какие из этих пространств являются симметрическими, 2) какие из них обладают тем свойством, что всякая действующая на них транзитивная и эффективная группа преобразований примитивна; 3) какие из стационарных подгрупп совпадают с централизатором (в группе движений) своего центра, 4) какие из пространств допускают инвариантную квазикомплексную структуру.

Е. Б. Дынкин

4836. Группы движений и группы аффинных коллинеаций. Яно (Groups of motions and groups of affine collineations. Yano Kentaro), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 229—233 (англ.)

Статья содержит сводку известных теорем о порядках групп движений в римановых пространствах V_n и групп аффинных коллинеаций в пространствах симметрической аффинной связности. Кроме того, со ссылкой на результат Ванга формулируется без доказательства теорема: Если группа изотропии H связна и имеет порядок больший, чем $n^2 - 2n + 5$, то пространство всегда аффинно плоское, за исключением тех случаев, когда H есть L или $L \times I(b)$, где L состоит из матриц вида

$$L = [(a_{ij}); \quad a_{11} = 1, \quad a_{1\alpha} = 0, \quad |a_{ij}| = 1; \quad \alpha = 2, \ldots, n],$$

а $I(b)$ — диагональная матрица, у которой $a_{11} = e^{(1+b)t}$, $a_{22} = \cdots = a_{nn} = e^{bt}$. В этих случаях полная группа коллинеаций либо транзитивна и порядка n^2 или $n^2 - 1$, либо нетранзитивна и порядка $n^2 - 1$ или $n^2 - 2$. А. С. Солодовников

4837. Приведение к каноническому виду линейной связности в пространстве A_2. Врэнчану (Reducerea la o formă canonică a unei conexiuni lineare în spațiul A_2. Vrănceanu G.), Bul. științ. Sec. mat. și fiz., 1953, 5, № 4, 481—484 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматриваются преобразования пространства A_2 линейной связности

$$\Gamma_{jk}^i = A_{jkl}^i x^l + A_{jk}^i, \tag{1}$$

сохраняющие прямые, параллельные оси x^1. Эти преобразования задаются соотношениями:

$$x'^1 = \alpha x^1 + \beta x^2 + m, \quad x'^2 = \gamma x^2 + n. \tag{2}$$

Показано:

1) если Γ_{11}^1, Γ_{11}^2 — являются линейно независимыми формами, то, принимая за начало координат точку, в которой эти формы обращаются в 0, получаем соотношения

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = ax^1 + bx^2 \\ \Gamma_{11}^2 = cx^1 + dx^2 \end{cases} \quad (ad - bc \neq c) \tag{3}$$

а) Полагая $c \neq 0$, приводим соотношения (3) к следующему каноническому виду: $\Gamma_{11}^1 = x^2$, $\Gamma_{11}^2 = \pm x^1 + dx^2$, где $d = \text{const}$;

б) если $c = 0$, $a \neq d$, то в соотношениях (3) можно привести к нулю b;

в) если $a = d$, приводим соотношения (3) к виду

$$\Gamma_{11}^1 = \varepsilon x^1 + bx^2, \quad \Gamma_{11}^2 = \varepsilon x^2 \quad (\varepsilon = \pm 1, \ b = 0,1).$$

2) Если формы Γ_{11}^1 и Γ_{11}^2 не являются линейно независимыми, то возможно приведение к следующему каноническому виду: а) $\Gamma_{11}^1 = h$, $\Gamma_{11}^2 = x^1 + kx^2$ ($h = 0,1$; $k = 1, -1, 0$) для случая, когда Γ_{11}^2 зависит от x^1; б) $\Gamma_{11}^1 = h$, $\Gamma_{11}^2 = \varepsilon x^2$ ($h = 0,1$; $\varepsilon = \pm 1$), если Γ_{11}^2 не зависит от x^1, но зависит от x^2; в) $\Gamma_{11}^1 = mx^1 + nx^2$, $\Gamma_{11}^2 = h$, где m, n, h равны либо 0, либо 1, причем m и n обращаются в 0 одновременно.

3) Если Γ_{11}^1 и Γ_{11}^2 — постоянные, то возможна следующая канонизация $\Gamma_{11}^1 = 0$; $\Gamma_{11}^2 = \pm 1$; $\Gamma_{11}^1 = 1$, $\Gamma_{11}^2 = 0$; $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$. Н. М. Остиану

4838. Классификация пространств P_2. Петреску (Clasificarea spaţiilor P_2. Petrescu Ş t.), Studii şi cercetări mat., 1953, 4, № 3—4, 453—502 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматриваются двумерные пространства P_2 проективной связности с кручением и кривизной, отнесенные к системе трех независимых конгруэнций кривых λ^α ($\alpha = 1,2,3$), дифференциал дуги которых задается соотношениями

$$ds^\alpha = \lambda_i^\alpha dx^i; \quad ds^0 = dx^0 + \lambda_i^0 dx^i \quad (a, \ i = 1, 2),$$

где λ_i^α — функции переменных x^i.

Дана классификация этих пространств в зависимости от группы проективных преобразований конгруэнций λ^α. К пространству присоединяются две инвариантные квадратичные формы: кососимметричная форма $f = \gamma_{12}^* ds^1 ds^2$ и симметричная

$$\varphi = \gamma_{11}^* (ds^1)^2 + (\gamma_{12}^* + \gamma_{21}^*) ds^1 ds^2 + \gamma_{22}^* (ds^2)^2.$$

Классификация проводится для трех случаев:

1) Аффинное кручение, проективное кручение и кривизна отличны от нуля:

а) Пространства P_2, допускающие группу проективных преобразований $\bar{ds}^1 = ds^1$; $\bar{ds}^2 = \alpha ds^1 + \beta ds^2$; $\bar{ds}^0 = ds^0$, где α, β — произвольные функции переменных x^1, x^2, и четырехпараметрическую группу автоморфизмов; инвариантные дифференциальные формы ds^1 и ds^0 являются полными дифференциалами;

б) пространства P_2, допускающие группу преобразований конгруэнций $\bar{ds}^1 = ds$, $\bar{ds}^2 = \alpha ds^1 + ds^2$, $\bar{ds}^0 = ds^0$ и трехпараметрическую группу автоморфизмов; форма ds^1 является полным дифференциалом;

в) пространства P_3 с группой преобразований конгруэнций $\bar{ds}^\alpha = ds^\alpha$, ($\alpha = 1,2,0$). Такие пространства могут допускать двупараметрическую группу автоморфизмов.

2) Аффинное кручение равно нулю, проективное кручение и кривизна отличны от нуля:

а) пространства P_2, допускающие группы преобразований

$$\bar{ds}^1 = a ds^1 + b ds^2, \ \bar{ds}^2 = \alpha ds^1 + \beta ds^2,$$
$$\bar{ds}^0 = ds^0 \quad (\Delta = a\beta - b\alpha = 1)$$

и пятипараметрическую группу автоморфизмов;

б) пространства P_2, допускающие либо группу

$$\bar{ds}^1 = ds^1, \quad \bar{ds}^2 = \alpha ds^1 + ds^2, \quad \bar{ds}^0 = ds^0,$$

либо

$$\bar{ds}^1 = a ds^1, \quad \bar{ds}^2 = a^{-1} \bar{ds}^2, \quad \bar{ds}^0 = ds^0;$$

в) пространства P_2 с группой преобразований

$$\bar{ds}^\alpha = ds^\alpha \qquad (\alpha = 1,2,0),$$

которые могут допускать двупараметрическую группу автоморфизмов.

3) Аффинное кручение и проективное кручение равны нулю, кривизна отлична от нуля:

а) пространства P_2, допускающие группу преобразований

$$\bar{ds}^1 = ds^1, \quad \bar{ds}^2 = \alpha ds^1 + \beta ds^2, \quad \bar{ds}^0 = ds^0$$

и четырехпараметрическую группу автоморфизмов; при этом $f = 0$, а φ — вырожденная;

б) пространства P_2, допускающие группу $\bar{ds}^1 = ds^1$,

$$\bar{ds}^2 = \alpha ds^1 + ds^2, \quad \bar{ds}^0 = ds^0 + {}^1/_2 \alpha ds^1;$$

в) пространства P_2 с группой преобразований $\bar{ds}^\alpha = ds^\alpha$, ($\alpha = 1,2,0$). В частности, такие пространства получаются, если $f = \varphi \equiv 0$. Они допускают двупараметрическую группу автоморфизмов. Н. М. Остиану

4839. О неголономных вполне геодезических пространствах A_n^m. Петреску (Asupra spaţiilor neolonome A_n^m total geodezice. Petrescu Ş t.), Bul. ştiinţ. Acad. R.P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 1, 51—57 (рум.; рез. русс., франц.)

Показывается, что необходимым и достаточным условием того, что пространство аффинной связности без кручения A_n обладает неголономными вполне геодезическими пространствами A_n^m, зависящими от $n \times (n+1)(n-m)/2$ параметров, является то, что пространство A_n проективно плоское. Показывается, что A_n^m является пересечением $n-m$ неголономных вполне геодезических A_n^{n-1}, зависящих от $n(n+1)/2$ параметров. Изложенная теория применяется к случаю голономности A_n^m. Б. А. Розенфельд

4840. Методы теории аффинной связности. Фландерс (Methods in affine connection theory. Flanders Harley), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 3, 391—431 (англ.)

Рассматриваются оператор d^2 — двукратное применение оператора d, — отображающий T_q^p в T_{q+2}^p (РЖМат, 1955, 4688), линейная операция B, отображающая T_0^1 в T_1^1, и операция контрактирования C, отображающая T_{q+1}^{p+1} в T_q^p. С их помощью излагаются вопросы преобразования связностей: $d = d_1 + B$ и линейного комбинирования связностей: $d = t_1 d_1 + t_2 d_2$ ($t_1 + t_2 = 1$). Приводятся и дополняются результаты работы Чжэнь Шэн-шэня (Chern S. S., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 820—823) об инвариантах преобразования аффинных связностей. Новым способом введен тензор Вейля и показана его инвариантность при проективном преобразовании связности. В. И. Шуликовский

4841. Проблемы эквивалентности, относящиеся к почти комплексной структуре. Либерман (Problèmes d'équivalence relatifs à une structure presque complexe. Libermann P.), Atti IV congr. Unione mat., ital., 1953, 2, 366—369 (франц.)

Обзор результатов работ автора и Ш. Эресмана. Доказательств не содержит. На $2n$-мерном действительном дважды дифференцируемом многообразии V_{2n}

задана почти комплексная структура, если задана непрерывно дифференцируемая функция, сопоставляющая точке $x \in V_{2n}$ комплексную векторную структуру в касательном векторном пространстве к V_{2n} в точке x. Локально такая структура задается формами Пфаффа $\omega^1, \ldots, \omega^n$ такими, что они и их комплексно сопряженные образуют систему линейно независимых форм. $\omega^1, \ldots, \omega^n$ определены с точностью до преобразования из комплексной линейной группы.

Для случая $n = 2$ почти комплексная структура определяет поле плоских элементов P. Когда это поле не вполне интегрируемо, можно определить каноническим образом две инвариантные формы. В противном случае существует бесконечная (в смысле Картана) группа Ли, оставляющая инвариантной почти комплексную структуру.

Если на V_{2n} задать эрмитову метрику $ds^2 = \Sigma\omega^i\bar{\omega}^i$ и над формами допустить преобразования только унитарной группы, то полученная структура носит название почти эрмитовой.

В случае $n = 2$ либо можно каноническим образом определить две инвариантные формы, либо существует пятипараметрическая группа Ли, оставляющая инвариантной почти эрмитову структуру. Приводятся необходимое и для $n > 2$ достаточное условие эквивалентности почти эрмитовой структуры почти эрмитовой структуре с метрикой вида: $ds^2 = \rho(z_1, \ldots, z_n) \times \Sigma dz_i d\bar{z}_i$, где z_i — локальные координаты на V_{2n}. Библ. 5 назв. Д. В. Беклемишев

4842. Инфинитезимальные связности, определенные в расслоенном пространстве аффинных реперов дифференцируемого многообразия. Л е г р а н (Connexions infinitésimales définies sur l'espace fibré des repères affines d'une variété différentiable. L e g r a n d G i l l e s), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 6, 586—588 (франц.)

Рассматриваются главные расслоенные пространства $E(V_n)$, $\mathcal{E}(V_n)$ в смысле Эресмана (Ehresmann, Sur la théorie des espaces fibrés, Colloque Topologie algèbr. Paris, CNRS, 1947) с базисным многообразием V_n класса C^∞. $E(V_n)$ имеет в качестве структурной группы (а также и слоя) линейную однородную группу $GL(nR)$, $\mathcal{E}(V_n)$ — полную аффинную группу $\mathfrak{A}(n)$. Инфинитезимальную связность на $\mathcal{E}(V_n)$ называют аффинной связностью на V_n, а инфинитезимальную связность на $E(V_n)$ — линейной на V_n. В обычной терминологии последняя связность носит название аффинной.

Обозначим $E(V_{n+1}, \Gamma)$ главное расслоенное пространство с базой $V_{n+1} = R \times V_n$, где R — вещественная прямая, и со структурной группой Γ, подгруппой $GL(n+1, R)$, и пусть $E(V_n, \Gamma)$ — подпространство $E(V_{n+1}, \Gamma)$ — соответствующее фиксированному $r \in R$. Доказано, что $\mathcal{E}(V_n)$ гомеоморфно $E(V_n, \Gamma)$. Этот гомеоморфизм порождает изоморфизм $\mathfrak{A}(n)$ и Γ, а потому устанавливает взаимно-однозначное соответствие связностей обоих пространств. Это используется для получения формул преобразования форм ω_j^i, ω_0^i аффинной (в смысле автора) связности при замене координат на V_n. Приведены формулы кривизны связности на $\mathcal{E}(V_n)$. Д. В. Беклемишев

4843. Римановы расширения пространств аффинной связности. А ф и ф и (Riemann extensions of affine connected spaces. A f i f i Z.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 20, 312—320 (англ.)

$2n$-мерное риманово пространство R^{2n} называется римановым расширением, если оно допускает параллельные нулевые n-плоскости и если для некоторого числа $r \geqslant 1$ векторы любого базиса n-плоскости λ_α^i удовлетворяют соотношениям

$$R_{kij\,p_1, p_2, \ldots, p_r} \lambda_\alpha^k \lambda_{\alpha_1}^{p_1} \ldots \lambda_{d_r}^{p_r} = 0$$

(латинские буквы принимают значения от 1 до $2n$, греческие — от 1 до n), где R_{kijl} — тензор кривизны R^{2n}, а запятой обозначена ковариантная производная в связности R^{2n}. Риманово расширение имеет порядок r, если r — наименьшее число, для которого выполнено это условие. Доказывается, что необходимым и достаточным признаком риманова расширения является наличие такой системы координат $\{x^\alpha, \xi_\alpha\}$, где $\xi_\alpha = x^{\alpha+n}$, в которой метрика R^{2n} имеет вид:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2dx^\alpha d\xi_\alpha,$$

$g_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}(x) - 2\Gamma^{\sigma_1}_{\alpha\beta}(x)\,\xi_{\sigma_1} + T^{\sigma_1\sigma_2}_{\alpha\beta}(x)\,\xi_{\sigma_1}\xi_{\sigma_2} + \ldots + \ldots + T^{\sigma_1 \ldots \sigma_r}_{\alpha\beta}(x)\,\xi_{\sigma_1}\ldots\xi_{\sigma_r}$, причем не все $T^{\sigma_1 \ldots \sigma_r}_{\alpha\beta}$ равны нулю. Более подробно рассматриваются римановы расширения первого порядка, т. е. когда $g_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} - 2\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\xi_\sigma$. Коэффициенты $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(x)$ при любых преобразованиях $x^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^\alpha)$, $\xi_{\alpha'} = (\partial x^\alpha/\partial x^{\alpha'})(\xi_\alpha + \eta_\alpha(x))$, сохраняющих указанный вид метрики R^{2n}, преобразуются как компоненты связности пространства аффинной связности без кручения A^n. Доказывается, что

1. Риманово расширение пространства A^n является конформно евклидовым тогда и только тогда, если A^n является проективно евклидовым, т. е. в некоторой системе координат $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\beta\psi_\gamma + \delta^\alpha_\gamma\,\psi_\beta$, $\psi_\alpha = \partial\psi/\partial x^\alpha$.

2. Если риманово расширение пространства A^n симметрично (т. е. $R_{ijkl,m} = 0$), то и A^n является симметрическим пространством. Обратное верно при условии, если $c_{\alpha\beta}$ можно свести к нулю.

Рекуррентным пространством аффинной связности называется такое пространство, у которого $R^i_{jkl,m} = R^i_{jkl}k_m$, где k_m — ковектор.

3. Если риманово расширение рекуррентно, то An также рекуррентно, его тензор кривизны удовлетворяет условию $R^\alpha_{\beta\gamma\mu,\,\nu} + R^\alpha_{\nu\mu\gamma,\beta} = 0$, а ковектор k_α является градиентным. Обратное верно, если, кроме того, $c_{\alpha\beta} = 0$.

4. Риманово расширение Риччи — рекуррентно (т. е. $R_{ij,\,m} = R_{ijk_m}$) тогда и только тогда, когда A^n Риччи—рекуррентно. Библ. 9 назв. Г. И. Кручкович

4844. К теории эрмитовых кругов. П и н л ь, Ш у ф ф (Zur Theorie der Hermiteschen Kreise. P i n l M., S c h u f f K.), Monatsh. Math., 1955, 59, № 1, 22—26 (нем.)

Работа посвящена вопросу о расширении эрмитовой плоскости путем замены комплексных координат точек псевдокватернионными координатами (к единицам $e_0 = 1$, $e_3 = i$ системы комплексных чисел добавляются еще комплексные единицы e_1 и $e_2 = e_3e_1$, $e_1^2 = +1$) или вырожденными псевдокватернионными координатами (к единицам $e_0 = 1$, $e_1 = i$ системы комплексных чисел добавляются еще комплексные единицы e_2 и $e_3 = e_2e_1$,

$e_2^2 = 0$). В расширенной подобным образом эрмитовой плоскости круг определяется уравнением $x\bar{x} + y\bar{y} = r\bar{r}$; если $r\bar{r} \neq 0$, круг называется регулярным; если $r\bar{r} = 0$ ($r = 0$ или $r \neq 0$), круг называется сингулярным. Рассматривается пересечение всех регулярных кругов — аналог абсолютных круговых точек евклидовой плоскости, расширенной введением комплексных координат точек; существование соответствующих образов определяет целесообразность рассматриваемого расширения эрмитовой плоскости. Отдельно рассматриваются сингулярные круги и их связь с изотропными прямыми. И. М. Яглом

4845. Различные замечания относительно угловой гиперболической метрики. Д'Антона (Considerazioni varie sulla metrica angolare iperbolica. D'Antona Giuseppina), Matematiche, 1954, **9**, № 1, 7—22 (итал.)

Пусть

$$\Delta(x, y) = a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2 = 0 \qquad (a \geqslant b) \qquad (1)$$

— уравнение абсолюта гиперболической плоскости в прямоугольных декартовых координатах, α и β — постоянные угловые коэффициенты сторон угла с вершиной $A(\xi, \eta)$, k(—const) и h — тангенсы его евклидовой и гиперболической меры. Геометрическое место точки A есть:

$$V\overline{\Delta(\xi, \eta)}\,(1 + \alpha\beta) = \alpha\beta(a^2 - \xi^2) + \xi\eta\,(\alpha + \beta) + b^2 - \eta^2,$$

если $h = k$;

$$h^2(a^2 - \xi^2 + k\xi\eta)^2 = k^2(a^2b^2 - b^2\xi^2 - a^2\eta^2). \qquad (2)$$

если $\beta = +\infty$ и $h = \text{const}$. Линия (2) по форме сходна с овалами Кассини, но при $h = \infty$ вырождается в гиперболу. При $h = k$ она состоит из двух овалов Σ и Σ'; каждый из них имеет двойное касание с эллипсом (1) и проходит через один из его фокусов (если $a > b$). Если A — внутри Σ (Σ'), то $|h| > |k|$; если A вне и Σ, и Σ', то $|h| < |k|$. Располагая треугольник надлежащим образом относительно линии (2), автор доказывает известные теоремы гиперболической геометрии: 1) сумма углов треугольника меньше π; 2) если $\varphi + \psi < \pi/2$, то существует прямоугольный треугольник с острыми углами φ и ψ. А. С. Смогоржевский

4846. Некоторые соображения по поводу теоремы Схольса. Таучер (Alcune considerazioni sul teorema di Schols. Taucer Grazia), Boll.geod. e sci. affini, 1954, **13**, № 2, 159—162 (итал.)

См. РЖАстр, 1956, 722.

4847. Параллельностные распределения. Уилмор (Parallel distributions. Willmore Thomas James), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 265—266 (англ.)

Пусть V_n — n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^∞, M — распределение касательных m-плоскостей. Исследуется вопрос, существует ли аффинная связность Γ, определенная на V_n в целом, по отношению к которой распределение превращалось бы в поле параллельных m-плоскостей. Постановка задачи и результаты зависят от требований, предъявляемых к Γ, и от свойств V_n и M. Указывается на разрешимость задачи, если Γ — общая аффинная связность, условия разрешимости, если Γ — симметрическая связность. Указывается, что в классе римановых связностей задача не всегда имеет решение. (Краткое сообщение без доказательств и подробной постановки задач).

В. В. Рыжков

4848. О теории нелинейной связности. Кавагути (On the theory of non-linear connections. Kawaguchi Akitsugu), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 27—32 (англ.)

С каждой точкой n-мерного многообразия X_n ассоциировано N-мерное векторное пространство E_n. Нелинейная связность, устанавливающая соответствие между двумя E_N в соседних точках x и $x + dx$ в X_n, определяется при помощи $\omega_i^I(x, v)$ так, что абсолютный дифференциал контравариантного вектора v^I в E_N выражается в форме:

$$\delta v^I = dv^I + \omega_i^I(x, v)\,dx^i \quad (I = 1,2, \ldots, N;\ i = 1,2,\ldots, n),$$

где ω_i^I — однородные функции первого порядка относительно v^I. Распространив понятие ковариантного дифференциала на тензоры, автор затем показывает возможность приложения теории нелинейной связности к финслеровым пространствам. Л. Е. Евтушик

4849. К дифференциальной геометрии группы вращений в гильбертовом V_p пространстве. Инцингер (Zur Differentialgeometrie der Faltungsgruppe im Hilbertschen Raum. Inzinger Rudolf), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 300—301 (нем.)

Функция

$$a(\varphi) = 1/2\,\Sigma_{-\infty}^{\nu=+\infty}\alpha_\nu e^{i\nu\varphi}$$

представляется радиусом-вектором точки гильбертова пространства H с координатами

$$1/2\alpha_0,\ 1/2\,[\alpha_{-\nu}e^{-i\nu\varphi} + \alpha_\nu e^{i\nu\varphi}];\ \nu = 1,2\ldots,$$

а семейство функций, зависящих от параметра

$$a(\varphi, t) = 1/2\Sigma_{-\infty}^{\nu=+\infty}\alpha_\nu e^{i\tau_\nu t}e^{i\nu\varphi},$$

кривой этого же пространства. Векторы X', X'', ..., $X^{(n)}$, соответствующие системе функций

$$\partial^n a(\varphi, t)/\partial t^n; \quad n = 1,2\ldots,$$

ортогонализируются и нормируются, а полученные в результате векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ называются сопровождающими векторами кривой. Их дифференцирование по длине дуги $s = \int_0^t V\overline{X'^2\,dt}$ приводит к формулам

$$d\xi_n/ds = -K_{n-1}\xi_{n-1} + K_n\xi_{n+1},$$

аналогичным формулам Френе. Задание кривизн K_1, $K_2, \ldots, K_n, \ldots$ в функции дуги определяет кривую с точностью до положения в пространстве. Указывается на возможность определения соприкасающихся сфер любого числа измерений. Утверждается, что намеченная теория имеет значение для теории ортогональных многочленов и проблемы моментов Стилтьеса.

А. П. Норден

4850. Вариационная проблема поверхностной функции в финслеровой геометрии. Бартель (Variationsproblеme der Oberflächenfunktion in der Finslerschen Geometrie. Barthel Woldemar), Math. Z., 1955, **62**, № 1, 23—36 (нем.)

Финслерово пространство F_n определяется как n-мерное точечное многообразие $\{x^1, \ldots, x^n\}$, в котором можно измерять p-объемы любых гладких p-мерных кусков поверхности $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^p)$:

$$V^{(p)} = \int F^{(p)}(x(u), \partial x(u)/\partial u^\sigma)\,du^1 \ldots du^p,$$

где n скалярных полей $F^{(p)}$ обладают свойствами: 1) $F^{(p)}(x, X_\sigma) \geqslant 0$, причем равенство нулю осуществляется только для линейно зависимых векторов X_σ, 2) $F^{(p)}(x, u^\sigma_{\sigma'} X_\sigma) = |\det|u^\sigma_{\sigma'}|| F^{(p)}(x, X_\sigma)$, 3) $F^{(p)}$—трижды непрерывно дифференцируемы. Отсюда следует, что функции $F^{(p)}$ положительно однородны первого порядка относительно каждого вектора. Для объемной функции получается выражение $F^{(n)} = \mathfrak{F}(x)|\det|X^j_i||$, где $\mathfrak{F}(x)$ — скалярная плотность веса $+1$. Кроме того, относительно функций $F^{(1)}$ и $F^{(n-1)}$, определяющих соответственно длину дуги и площадь гиперповерхности, предполагается, что формы $F^{(1)}(x, X) = g_{ik}(x, X) X^i X^k$ и $F^{(n-1)}(x, X) \equiv f(x, p) = G^{ik} p_i p_k$ положительно определенные. Здесь $p_i = \det|\delta^k_i X^k_1 \ldots X^k_{n-1}|$ — ковариантная вектор-плотность веса — 1, определяющая гиперплоскость в данной точке.

Вводится понятие ковариантного дифференцирования тензорной плотности веса — 1 вдоль поля гиперплоскостных элементов (x, p) по формуле

$$DT_i(x, p) = dT_i - T_k(\Gamma^k_{ih}(x, p)dx^h + A^{kh}_i(x,p)dp_h)/f),$$

где Γ^k_{ih}, A^{kh}_i однородны нулевого порядка по p, и $A^{kh}_i p_h = 0$, $A^{kh}_i p_k = 0$, так что $Dp_i = dp_i - p_k\Gamma^k_{ih}dx^h$, т. е. введенное дифференцирование является метрическим относительно функции $f(x, p)$. Постулируется: 1) $DG^{ik} = 0$, что означает инвариантность площади гиперповерхности при параллельном перенесении. 2) $A^{[ik]h} = 0$. Этими постулатами A^{kh}_i полностью определяются: $A^{ikh} = -(f/4)\partial^3 f^2/\partial p_i \partial p_k \partial p_h$, $A^{kh}_i = G_{im}A^{mkh}$, а коэффициенты Γ^k_{ih} будут известны с точностью до произвольного кососимметрического тензора Σ^k_{ih}. Геодезические гиперповерхности определяются равенством $DN_i = 0$ вдоль любого перемещения по гиперповерхности, где $N_i = p_i/f$. Это дает возможность определить понятие нормальной кривизны гиперполосы $(x_i(s), (N_i)(s))$. Главные кривизны и главные направления гиперповерхности получаются из уравнения $\det|B_{\alpha\beta} - K\mathfrak{F}G_{\beta\alpha}| = 0$, где $G_{\alpha\beta} = G_{ik}(\partial x^i/\partial u^\alpha)(\partial x^k/\partial u^\beta)$, $B_{\beta\alpha} = -D_\alpha N_i \partial x^i/\partial u^\beta$. В случае симметрического тензора $B_{\alpha\beta}$ имеют место формулы Родрига вдоль главных направлений: $D_\alpha N^i = -k_\alpha F dx^i/\partial u^\alpha$.

Решением изопериметрической задачи являются гиперповерхности, удовлетворяющие условию $H \equiv B^\sigma_\sigma - N^i\Sigma^k_{ik} = C\mathfrak{F}$, $C = \text{const}$. При $C = 0$ получатся минимальные гиперповерхности. В случае симметрического $B_{\alpha\beta}$ H есть средняя кривизна: $H = (k_1 + \ldots + k_{n-1})/(n-1)$. Вводится понятие дуальной длины вдоль кривой $x^i(t)$: $S^* = \int_{t_0}^{t_1} f(x, p)\,dt$, где $p^i = \mathfrak{F}(x)\,dx^i/dt$. ds^* обозначает расстояние точки $x + dx$ до гиперплоскости $(x, dx^i/dt)$. Дуально-геодезическими называются кривые, для которых соответствующие гиперплоскостные элементы переходят друг в друга при их параллельном перенесении вдоль кривой, т. е. $DN_i/dt = 0$. Чтобы полностью установить параллельное перенесение, требуется: 3) геодезические гиперповерхности должны быть минимальными, а дуально-геодезические линии — экстремалями дуальной длины. Тем самым Σ^k_{ih}, а значит и Γ^k_{ih} однозначно определяются. Г. И. Кручкович.

4851. Системы внешних дифференциальных уравнений. Дедекер (Les systèmes d'équations extérieures. Dedecker Paul. Colloque de topologie et géométrie différentielle, Strasbourg, 1952, № 2, 13 pp.), La Bibliothèque Nationale et Universitaire de Strasbourg, 1953

Задачей статьи является изучение интегральных многообразий системы S внешних дифференциальных форм на вещественном аналитическом многообразии V_n, т. е. подмногообразий, на которых формы сводятся к нулю. Основная теорема дает условия, налагаемые на идеал I алгебры дифференциальных форм, при которых p-мерное интегральное многообразие I может быть продолжено (по крайней мере локально) в интегральное многообразие размерности $p + 1$. В первой части работы рассматриваются необходимые предварительные сведения из алгебры: грассманова алгебра над векторным пространством V; двойственная ей грассманова алгебра форм; идеалы в ней, понятие нуля множества S форм — подпространства V, на котором формы S все обращаются в нуль. Даны теоремы Лепажа (Lepage) и Картана (Cartan) об идеалах форм. Введены некоторые более тонкие понятия, необходимые для изучения дифференциальных форм: полярный элемент p-подпространства E из V, состоящий из всех векторов, которые вместе с E определяют $p + 1$-мерные нули I; обычные и регулярные p-нули, характеристические числа и род идеала форм и т. д. Книги Келера (Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Teubner, Leipzig — Berlin, 1934) и Схоутена и Кюлка (Schouten and Kulk v. d., Pfaff's problem and its Generalizations, Oxford, 1949) содержат сходный материал.

H. Samelson

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 7, 649.

4852. Построение экстремальной поверхности гиперболического типа по ее характеристикам (при помощи евклидовой связности пространства Картана. Хёльдер (Aufbau einer Extremalfläche hyperbolischen Typs aus ihren Charakteristiken (mittels des euklidischen Zusammenhanges des Cartanschen Raumes. Hölder Ernst), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 510—521 (нем.)

Метод характеристик для квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка с искомой функцией $z = \Psi(x, y)$ был впервые применен в газовой динамике плоских стационарных сверхзвуковых течений газа Прандтлем и Буземаном. Эти задачи газовой динамики могут быть получены из двумерной вариационной задачи. В настоящей статье рассматривается вопрос о построении экстремальной поверхности вариационной задачи:

$$\delta J = 0;\ J = \int\int f\,dx\,dy,\ f = f(x, y, z, p, q),\ p = \Psi_x, q = \Psi_y.$$

Если, следуя Картану, построить для этой задачи метрику, линейный элемент, евклидову связность, то линейный элемент не будет знакоопределенным. Нулевые линии на экстремальной поверхности образуют сопряженную сеть. Это позволяет провести построение поверхностного элемента, близкого к исходному.

Линейный элемент Картана строится следующим образом. Пусть

$$p = -u/w,\ q = -v/w,\ L(x, y, z; u, v, w) = f(x, y, z, -u/w, -v/w).$$

Тогда $J = \int\int L(x, y, z; dy, dz; dz\,dx; dx\,dy)$. Контравариантные компоненты g^{ij} метрического тензора опре-

деляются соотношениями: $g^{ij} = (1/\Delta^{1/3})\, a^{ij}$, где $\Delta = |\det(a^{ij})|$, $a^{ij} = (L^2)_{u_i u_j}/2$; $(u, v, w) = (u_i)$. Линейный элемент Картана будет

$$g_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j,\ \xi^i = Lu_i.$$

Характеристические направления совпадают с нулевыми направлениями метрики Картана. Если $L_{x^i} = 0$, $(x, y, z) = (x)$, то линейный элемент Бервальда только лишь множителем отличается от линейного элемента Картана. Экстремальная поверхность в этом частном случае является диаграммой вращений некоторого бесконечно малого изгибания поверхности ξ^i.

Э. Г. Позняк

4853. Фундаментальное неравенство теории пикаровых многообразий. Игуса (A fundamental inequality in the theory of Picard varieties. Igusa Jun-ichi), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 5, 317—320 (англ.)

Если f — функция на многообразии (м.) V со значениями на м. U и область ее значений W не содержится в месте особенностей U, то можно определить отображение δf пространства дифференциальных форм (д. ф.) на U, регулярных вдоль W, в пространство всех д. ф. на V (Koizumi, J. Math. Soc. Japan, 1949, 1, 273—280; 1951, 2, 267—269). В работе доказывается следующая теорема: Если (A, f) — м. Албанезе для V, то δf задает изоморфизм пространства линейных д. ф. первого рода на A в соответствующее пространство для V (обладает «свойством изоморфизма»). Отсюда вытекает соотношение между двумя родами иррегулярности V: размерность A (равная размерности q пикарова м. для V) не превышает размерности $h^{1,0}$ пространства линейных д. ф. первого рода на V.

В. В. Морозов

4854. Келеровы пространства, являющиеся римановыми расширениями. Паттерсон (Kähler spaces which are Riemann extensions. Patterson Edward McWilliam), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 244—245 (англ.)

Метрика $2n$-мерного риманова пространства, допускающего поле π изотропных параллельных n-площадок, в канонических координатах x^i, ξ_k имеет вид

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k + 2\, dx^i d\xi_i.$$

Если g_{ik} — многочлены 2-й степени относительно ξ_l, пространство называется римановым расширением (Riemann extension) по отношению к π. Пространство является келеровым тогда и только тогда, когда оно допускает два поля непересекающихся параллельных n-площадок. Если оно является римановым расширением по отношению к одному из них, то в канонических координатах

$$g_{ik} = X^{pq}_{ik}\, \xi_p \xi_q,\ X^{(rs}_{p[i} X^{q)\,p}_{k]\,l} = 0,\ \partial_l X^{rs}_{ik} = \partial_k X^{rs}_{il}.$$

Келерово пространство является симметрическим в смысле Картана тогда и только тогда, когда оно является римановым расширением по отношению к обеим площадкам π. В этом случае X^{pq}_{ik} — постоянные, удовлетворяющие ряду соотношений. Доказательств не приведено.

А. М. Васильев

4855. Теорема Римана — Роха для присоединенных систем на келеровых многообразиях. Кодаира (The theorem of Riemann — Roch for adjoint systems on Kählerian varieties. Kodaira Kunihiko), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton N. Y., 1953, 247—264 (англ.)

Дивизорами на компактном келеровом многообразии M_n комплексной размерности n называются конечные комбинации вида $\Sigma m_\nu S_\nu$, где m_ν — целые числа, а S_ν — неприводимые аналитические подмногообразия M_n комплексной размерности $n-1$. Дивизор называется эффективным, если все $m_\nu \geqslant 0$.

Мероморфная на M_n функция определяет дивизор, для которого S_ν — множества нулей и полюсов функции, а m_ν — их кратности с соответствующими знаками. Аналогично задается дивизор мероморфной аналитической внешней формой W порядка n. Такая форма называется кратной дивизора D, если дивизор $D(W) - D$ — эффективный.

Пусть S — неприводимое аналитическое $n-1$-мерное подмногообразие M_n без особенностей. Тогда размерность линейного пространства n-форм, кратных — S, равна

$$\omega(s) = r_n(M_n) - r_{n-1}(M_n) + r_{n-1}(S) + l,$$

где $r_\lambda(P)$ — размерность пространства аналитических дифференциальных форм порядка λ и «первого рода», т. е. всюду голоморфных на пространстве P, а l — размерность пространства $n-1$-форм первого рода на M_n, обращающихся в нуль на S. Для доказательства используется соответствие, однозначно сопоставляющее с каждой n-формой W на M_n, кратной — S, $n-1$-форму w первого рода на S, удовлетворяющую условию

$$(-1)^{n+1} \int_{M_n} W\, d\varphi = 2\pi i \int_S w \varphi_S$$

для всех $n-1$-форм первого рода φ на M_n (φ_S — форма, индуцированная φ на S).

При $n = 3$ удается вычислить размерность $\omega(S)$ для любых аналитических подмногообразий S, особые точки которых исчерпываются тремя типами: двойными, тройными и точками заострения (cuspoidal points). В окрестности таких точек уравнение S может быть задано, в соответствующей параметризации M_3, соответственно уравнениями $Z_1 Z_2 = 0$, $Z_1 Z_2 Z_3 = 0$ или $(Z_3)^2 - (Z_1)^2 Z_3 = 0$. Размерность выражается через арифметические роды неприводимых составляющих S, роды неприводимых составляющих кривой особенностей S, число тройных точек, число точек заострения и еще два более сложно определяемых числовых инварианта, характеризующих расположение S и его особенностей. Арифметическим родом келерова многообразия называется число $\Sigma(-1)^\lambda r_\lambda$.

А. М. Васильев

4856. Связность в расслоенном многообразии. II. Кобаяси (La connexion des variétés fibrées. II. Kobayashi Shôshichi), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 4, 443—444 (франц.)

Пусть (E, B, π, F, G) — дифференцируемое расслоенное многообразие с инфинитезимальной связностью Γ (РЖМат, 1954, 5764). Пусть далее Ω_x — пространство (Серр) кусочно-дифференцируемых путей базы B (замкнутых), выходящих из точки $x \in B$. В Ω_x вводится естественным образом соотношение эквивалентности так, что эквивалентным путям отвечают одинаковые преобразования группы голономии. По отношению к обычному умножению путей пространство классов $\tilde{\Omega}_x$ является топологической группой. Инфинитезимальная связность в E определяет класс эквивалентных

представлений $\widetilde{\Omega}_x$ в структурную группу G. Формулируются теоремы:

1. Для эквивалентности двух расслоенных многообразий (E, B, π, F, G) и (E', B, π', F, G) необходимо и достаточно существование связностей Γ в E и Γ' в E', дающих один и тот же класс эквивалентных представлений $\widetilde{\Omega}_x$ в G.

2. Если заданы многообразия B и F и класс χ эквивалентных представлений $\widetilde{\Omega}_x$ в группу G, действующую на F, то существует расслоенное многообразие (E, B, π, F) и связность в E, которой соответствует χ.

И. З. Розенкноп

4857. Келеровы компактные косые произведения. Бланшар (Espaces fibrés Kählériens compacts. Blanchard André), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 24, 2281—2283 (франц.)

Для того чтобы косое произведение, являющееся компактным комплексным аналитическим многообразием, слой которого F — келерово пространство, само было келеровым, необходимо и достаточно, чтобы 1) базисное пространство B также было келеровым; 2) фундаментальная группа пространства B сохраняла класс вещественных ∇-гомологий слоя F, определенный основной внешней квадратичной формой келеровой метрики F; 3) отображение групп вещественных ∇-гомологий $H^1(F)$ в $H^2(B)$ было бы отображением в нуль.

А. М. Васильев

4858. Распространение исчисления струй на неголономные струи. Эресман (Extension du calcul des jets aux jets non holonomes. Ehresmann Charles), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 25, 1762—1764 (франц.)

Вводится понятие неголономных струй. Пусть V_n и V_m — два многообразия класса $\geqslant r$ (РЖМат, 1956, 736). Голономная r-струя с началом $x \in V_n$ и целью $y \in V_m$ определяется как совокупность r раз дифференцируемых наложений окрестностей точки x на окрестности точки y, налагающих x на y и таких, что функции, определяющие наложение, имеют b x для всех наложений равные частные производные каждого вида до порядка r. Струя, определенная наложением f, обозначается $j^r_x f$. Совокупность $I^k(V_n, V_m)$ k-струй из V_n в V_m $(k < r)$ допускает структуру многообразия класса $\geqslant l$ $(l = r - k)$. Пусть σ — локальное восстановление класса l из V_n в $I^k(V_n, V_m)$, т. е. такое l раз дифференцируемое наложение области $U \subset V_n$ в $I^k(V_n, V_m)$, что $\alpha\sigma$ есть тождественное наложение U. $(\alpha(X)$ — начало струи X, α — наложение $X \to \alpha(X))$. Струя $j^l_x(j^k f)$ (где $j^k f$ — локальное восстановление $x \to j^k_x f$ и f — наложение области V_n в V_m) отождествляется со струей $j^r_x f$ из V_n в V_m. Струя $j^l_x \sigma$, определенная произвольным локальным восстановлением, называется неголономной струей из V_n в V_m. Совокупность этих неголономных струй $\pi^l I^k(V_n, V_m)$ содержится в $I^l(V_n, I^k(V_n, V_m))$ и содержит в себе $I^r(V_n, V_m)$.

Определив $\pi^1 I^1(V_n, V_m) = \widetilde{I}^1(V_n, V_m)$, с помощью локальных восстановлений из V_n в $\widetilde{I}^1(V_n, V_m)$ получают пространство $\pi^1 \widetilde{I}^1(V_n, V_m) = \widetilde{I}^2(V_n, V_m)$. Затем получают струи, определенные локальными восстановлениями из V_n в $\widetilde{I}^2(V_n, V_m)$, и т. д. Через r шагов получают пространство $\widetilde{I}^r(V_n, V_m$ струй, называемых неголономными струями порядка r из V_n в V_m. $I^r(V_n, V_m)$ отождествляется с подпространством $\widetilde{I}^r(V_n, V_m)$.

Указанным способом можно определить пространство $\overline{I}^r(V_n, V_m)$ полуголономных струй порядка r из V_n в V_m, если на каждом этапе ограничиться такими локальными восстановлениями σ, что $j^1_x(j \cdot \sigma) = \sigma(x)$, где j есть проекция пространства, полученного на данном этапе (так что σ есть локальное восстановление из V_n в это пространство), на пространство, полученное на предыдущем этапе, $\sigma(x)$ — струя, в которую переводится x наложением σ. Определяется закон композиции для неголономных струй, который в применении к голономным струям дает для них обычный закон композиции.

Пусть $\overline{L}^r_n$ — группа, составленная обратимыми струями $\overline{I}^r(R^n, R^n)$ с началом и целью $O \in R^n$ (начало и цель струи из $\widetilde{I}^r(V_n V_m)$ или $\overline{I}^r(V_n, V_m)$ есть проекция струи соответственно в V_n и V_m, R_n — числовое пространство). $\overline{H}^r(V_n)$ совокупность обратимых струй $\overline{I}^r(R^n, V_n)$ с началом O — есть продолжение порядка rV_n, т. е. $\overline{H}^r(V_n)$ ассоциировано с $H^r(V_n)$. Но $\overline{H}^r(V_n)$ есть также главное расслоенное пространство со слоями, изоморфными $\overline{L}^r_n$. Вводится понятие совершенного (parfait) продолжения, это есть расслоенное пространство, ассоциированное с $\overline{H}^r(V_n)$. Устанавливается связь между обычными и совершенными продолжениями.

Н. Б. Шенфельд

4859. Замечание о числах Бетти римановых многообразий. III. Томонага (Note on Betti numbers of Riemannian manifolds. III. Tomonaga Yasuro), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 1, 37—39 (англ.)

Продолжение предыдущих исследований (РЖМат, 1954, 5252, 5253). Обозначения те же.

Для $B_1 = 0$ $(B_1 \leqslant n)$ достаточно, чтобы, для некоторого постоянного c, $D = c^2\Delta R^2/2(1 + c^2R^2)$ было меньше (не больше), чем $R/n - \sqrt{R_{ab}R^{ab} - R^2/n}$. Для $B_p = 0$ $\left(B_p \leqslant \binom{n}{p}\right)$ достаточно, чтобы D было меньше (не больше), чем pT. Если $D + R/n + \sqrt{R_{ab}R^{ab} - R^2/n} \leqslant 0$, то размерность пространства полей векторов Киллинга на многообразии не превышает n. При строгом неравенстве таких полей не существует. А. М. Васильев

4860. Параабелевы многообразия. Рот (Para-abelian varieties. Roth Leonard), Rend. mat. e applic., 1954, 14, № 1-2, 30—37 (англ.)

Обобщая понятие псевдоабелева многообразия (м.) (РЖМат, 1955, 3377), автор вводит понятие параабелева м. Ясно сформулированное определение этого понятия в статье отсутствует; из рассуждений автора можно заключить, что параабелево м. W_p типа q — это м., которое можно отобразить на d-кратное м. $W^*_p = W^*_q V^*_{p-q}$, где V^*_q — пикарово м.; таким образом, в W_p существует конгруэнция $\{V_q\}$ бирационально эквивалентных неприводимых пикаровых м. и вторая конгруэнция $\{V_{p-q}\}$ бирационально эквивалентных м., причем требуется, чтобы совпадающие элементы соответствия W_p и d-кратного W^*_p состояли только из некоторых членов этих конгруэнций, считаемых каждый с определенной кратностью. В отличие от псевдоабелевых м., может не существовать непрерывной группы автоморфизмов W_p, однако, как и ранее, здесь многообразия V_{p-q} пересекают производящее V_q во мно-

жествах инволюций i_d, причем инволюции эти абелевы. Для случая, когда инволюции i_d — циклические, показывается, как можно построить аналитическое представление W_p: если V_q^* и V_{p-q}^* имеют лишь обыкновенные особенности и заданы — первое в S_{q+1} уравнением $F(x_1, \ldots, x_{q+1}) = 0$, а второе — в S_{p-q+1} уравнением $f(y_1, \ldots, y_{p-q+1}) = 0$, то V_q задается уравнениями $v^d = G(x_1, \ldots, x_{q+1})$, $F = 0$, где G — полином, который подбирается так, чтобы V_q было неприводимым пикаровым м.; аналогично, уравнениями V_{p-q} будут $v^d = a \cdot g(y_1, \ldots, y_{p-q+1})$, $f = 0$. Тогда W_p задается уравнениями $v^d = G_g$, $F = 0$, $f = 0$. Особо изучаются канонические системы W_p. Оказывается, что $\{X_k(W_p)\}$ $(p - q \leqslant k \leqslant p - 1)$ либо принадлежит конгруэнции $\{V_q\}$, либо будет нулевого порядка (РЖМат, 1955, 3377). Здесь нижняя граница для k снижается до $i + 1$, если $p \geqslant 3$ и $\{V_q\}$ содержит лишь ∞^i приводимых членов, где $i \geqslant p - q - 2$. При $p = 2$ это снижение невозможно, так как поверхность W_2, для которой $[X_0(W_2)] = 0$, либо эллиптическая, либо гиперэллиптическая.

В. В. Морозов

4861. Однозначная определенность одного класса открытых полных поверхностей их метрикой. Гротемейер (Die eindeutige Bestimmung einer Klasse von offenen, vollständigen Flächen durch die Metrik. Grotemeyer K. P.), Math. Z., 1955, 62, № 1, 17—22 (нем.)

Доказывается теорема: Если U — открытая полная трижды непрерывно-дифференцируемая поверхность с положительной гауссовой кривизной K такая, что $\iint_U K d\sigma = 2\pi$, то всякая трижды непрерывно-дифференцируемая поверхность U^*, изометричная U, конгруэнтна или симметрична U.

Отмечается, что эта теорема отличается от аналогичной теоремы А. В. Погорелова, установленной при менее обременительных условиях, налагаемых на гладкость поверхностей, отсутствием одного дополнительного требования. Указывается на возможность распространения результата на поверхности, имеющие в конечной области края типа $\mathrm{Rem}\, b_s$, т. е. такие, в точках которых нормаль к поверхности сохраняет постоянные направления. Обсуждается возможность развития результатов С. П. Оловянишникова, относящихся к поверхностям, для которых $\iint_U K d\sigma < 2\pi$.

В. В. Рыжков

4862. О выпуклых локально проективных пространствах. Кёйпер (On convex locally-projective spaces. Kuiper N. H.), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 200—213 (англ.)

Локально проективным пространством называется пространство (проективно плоское) интегрируемой проективной связности. Автор исследует выпуклые локально проективные пространства размерности $n > 1$. Каждое такое пространство имеет универсальной накрывающей либо S, либо некоторую выпуклую область из S, где S — пространство лучей, исходящих из начала центроаффинного $n + 1$-мерного пространства. Выпуклое неодносвязное локально проективное пространство, допускающее конечную фундаментальную группу, является компактным. В заключение доказывается, что каждая выпуклая компактная локально проективная поверхность проективно эквивалентна эллиптической плоскости, либо локально евклидовой бутыли Клейна, либо локально аффинному тору.

Г. И. Кручкович

4863. О геометриях Минковского и Финслера. Бартель (Über Minkowskische und Finslersche Geometrie. Barthel Woldemar), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 71—76 (нем.)

Рассматривается финслерово n-мерное пространство Φ_n с длиной кривой $x(t)$ в виде

$$s = \int L(x, \dot{x})\, dt,$$

где $L(x, X)$ — функция, трижды непрерывно дифференцируемая, положительная, относительно X однородная 1-го порядка и определяет регулярную вариационную задачу.

Автор исходит из понятия объема V n-мерной области поверхности $x(u^1, u^2, \ldots, u^p)$, определенного для Φ_n Буземаном (Buseman, Ann. Math., 1947, 48, № 2, 755—781),

$$V = \int F^{(p)}(x, x_\rho)\, du^1\, du^2 \ldots du^p,$$

где

$$F^{(p)}(x, X_\rho) = \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2 + 1) \int_{L(x, X_\rho u^\rho)} du^1\, du^2 \ldots du^p}.$$

Функция $F^{(p)}(x, X_\rho)$ является p-мерной скалярной плотностью веса 1 относительно линейных преобразований $X_\rho = X_{\rho'} U_\rho^{\rho'}$, положительна для линейно независимых векторов и непрерывно дифференцируема. Отсюда определяется «синус Минковского» Sm между линейными векторными образами

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_a\} \text{ и } \{B_1, B_2, \ldots, B_b\}:$$

$$\mathrm{Sm}(x, A_\alpha, B_\beta) =$$

$$= \frac{F^{(d)}(x, A_1, \ldots, A_d)\, F^{(s)}(x, A_{d+1}, \ldots, A_a, B_1, \ldots, B_b)}{F^{(a)}(x, A_1, \ldots, A_a)\, F^{(b)}(x, B_1, \ldots, B_b)}.$$

векторы $A_1, \ldots, A_a$ определяют пересечение линейных образов $\{A_\alpha\}$ и $[B_\beta]$. Кривизна $\varkappa(t)$ кривой $x(t)$ вводится как предел отношения Sm между касательной к кривой и геодезической хордой между смежными точками к расстоянию между этими точками. Имеет место

$$\varkappa(t) = F^{(2)}(x, \dot{x}, D\dot{x}/dt)\, [L(x, \dot{x})]^{-3},$$

где через $D(\dot{x})$ кратко обозначена величина, которая используется автором для определения инвариантного дифференцирования. Для кривой, лежащей на гиперповерхности, определяется нормальная кривизна $\varkappa_n(t)$, $\varkappa_n(t) = b(u, \dot{u})\, [\overline{L}(u, \dot{u})]^{-2}$, где $\overline{L}(u, U)$ есть функция индуцирования на поверхности, а $b(u, U)$ — функция однородная 2-го порядка относительно U, вообще говоря,— не квадратичная форма точки, что не позволяет определить кривизну в точке поверхности как произведение главных кривизн.

Далее развивается теория гиперповерхности в Φ_n. Вводится местный репер векторами

$$x_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}; \quad n^i = \frac{\| X_1 X_2 \ldots X_n \|}{F^{(n)}(x, X_\rho)} \frac{\partial f^{(n-1)}(x, p)}{\partial p^i},$$

где $p_k = \| \delta_\kappa, X_1^i X_2^i \ldots X_{n-1}^i \|$, а $F^{(n-1)}(x, X_\rho) = f^{(n-1)}(x, p)$, и определяются «формулы Вейнгартена»

$$Dn^i / du^\alpha = -B_\alpha^\beta x_\beta^i,$$

а в специальной системе координат «формулы Родрига»:

$$\frac{Dn^i}{\partial u^\alpha} = -\frac{1}{R^{(\alpha)}} X^i_{(\alpha)}.$$

Через Dn^i кратко обозначена величина, которая используется для определения инвариантного дифференцирования векторной плотности веса — 1 и для определения геодезической гиперповерхности, имеющей $Dn^i = 0$. Статья заканчивается теорией гиперповерхностных полос. В. И. Ведерников

4864. О приближенных уравнениях теории Эйнштейна — Шредингера. Тонла (Sur les équations approchées de la théorie d'Einstein-Schrödinger. Tonnelat Marie-Antoinette), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 2, 168—170 (франц.)

Ранее автором (J. Phys. Rad., 1951, **12**, 81) были выведены точные уравнения единой теории поля Эйнштейна — Шредингера, которые записаны через коэффициенты аффинной связности и тензор Риччи. В реферируемой заметке предполагается, что метрические коэффициенты малы и выводятся приближенные уравнения с точностью до членов третьего порядка малости. С этой степенью точности уравнения поля расчленяются на две группы: 1) уравнения электродинамики, 2) уравнения гравитации. Показано, что полученные уравнения допускают формулировку в виде равенства нулю расходимостей введенных надлежащим образом тензоров, характеризующих индуцированное поле. И. С. Аржаных

4865. Приближенные уравнения единой теории Эйнштейна — Шредингера. Ленуар (Equations approximatives de la théorie unitaire d'Einstein — Schrödinger. Lenoir Marcel), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 13, 1400—1402 (франц.)

Рассматривается аффинное пространство со связностью $L^\alpha_{\beta\gamma}$ определяемой уравнениями $\partial_\lambda g^{\alpha\beta} + g^{\gamma\beta} L^\alpha_{\gamma\lambda} + g^{\alpha\gamma} L^\beta_{\lambda\gamma} = 0$, в котором, таким образом, задается поле несимметрического тензора $g^{\alpha\beta}$, как это предполагается в единой теории Эйнштейна—Шредингера. В этом пространстве вводится метрика, причем в качестве метрического тензора берется тензор $\overline{l}_{\alpha\beta}$, являющийся некоторой нормализацией тензора $g^{(\alpha\beta)}$. Записываются соотношения, связывающие $L^\alpha_{\beta\gamma}$, тензор $\overline{l}_{\alpha\beta}$ и тензор $\overline{m}^{\alpha\beta} \equiv g^{[\alpha\beta]}$. Предполагая, что $\overline{m}_{\alpha\beta}$ 1-го порядка малости относительно $\overline{l}_{\alpha\beta}$, а $\partial_\gamma \overline{m}_{\alpha\beta}$ порядка $\geqslant 1$, можно выразить связность без кручения $L^\alpha_{(\beta\gamma)}$ через символы Кристоффеля $\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right|$, соответствующие метрике $\overline{l}_{\alpha\beta}$, тензор $\overline{m}_{\alpha\beta}$ и $\overline{\nabla}_\gamma \overline{m}_{\alpha\beta}$, где $\overline{\nabla}_l$ — ковариантная производная, соответствующая $\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right|$. При этих предположениях тензор $g_{\alpha\beta}$, играющий основную роль в единой теории, определится приближенно двумя соотношениями: $g_{(\alpha\beta)} = \overline{l}_{\alpha\beta} + \overline{m}_{\gamma\beta}\overline{m}^\gamma_\alpha$ (до 2-го порядка) $g_{[\alpha\beta]} = \overline{m}_{\alpha\beta} + \overline{m}^\sigma_\alpha \overline{m}_{\sigma\tau}\overline{m}^\tau_\alpha$ (до 3-го порядка), что позволяет записать приближенные уравнения поля. А. З. Петров

4866. Классификация пространств, определяющих поля тяготения. Петров А. З., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, **114**, № 8, 55—69

Рассматривается риманово пространство V_4 с сигнатурой $---+$, удовлетворяющее условию

$$R_{ij} = \varkappa g_{ij}, \qquad (2)$$

где g_{ij} — метрический тензор, R_{ij} — тензор Риччи, $\varkappa$ — константа. Ограничиваясь алгебраическими следствиями этого условия, автор находит все возможные типы строения тензора кривизны такого пространства. В дальнейшем $i, j, k, l = 1, \ldots, 4$ — обычные тензорные индексы в V_4; греческие же индексы $\alpha, \lambda, \gamma = 1, \ldots, 6$ являются «бивекторными» и соответствуют парам (14), (24), (34), (23), (31), (12). В этих обозначениях тензор кривизны $R_{ij,\,kl} = R_{\alpha\beta}\,(= R_{\beta\alpha})$, а тензор $g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il} = g_{\alpha\beta}$.

Рассматривается матрица $\|R_{\alpha\beta} - kg_{\alpha\beta}\|$ при неопределенном K (K-матрица), причем в V_4 в рассматриваемой точке вводится ортогональный репер. Тогда матрица $R_{\alpha\beta}$ будет иметь вид $\|R_{\alpha\beta}\| = \left\|\begin{matrix} M & N \\ N & -M \end{matrix}\right\|$, где M и N — симметрические матрицы 3-го порядка со следами соответственно $\varkappa$ и 0. Основной результат: возможны лишь три типа исследуемых пространств:

1. Характеристика K-матрицы [111; $\overline{1}$, $\overline{1}$, $\overline{1}$]; ее корни $\alpha_s \pm \beta_s i$ $(s = 1, 2, 3)$, причем $\Sigma_1^3 \alpha_s = \varkappa$, $\Sigma_1^3 \beta_s = 0$. В каноническом репере тензор кривизны имеет вид

$$\|R_{\alpha\beta}\| = \left\|\begin{array}{cccccc} -\alpha_1 & & & -\beta_1 & & \\ & -\alpha_2 & & & -\beta_2 & \\ & & -\alpha_3 & & & -\beta_3 \\ -\beta_1 & & & \alpha_1 & & \\ & -\beta_2 & & & \alpha_2 & \\ & & -\beta_3 & & & \alpha_3 \end{array}\right\|$$

2. Характеристика [2 1, $\overline{2}$,$\overline{1}$]; корни $\alpha_1 \pm \beta_1 i$, $\alpha_2 \pm \beta_2 i$ (последние двойные), причем $\alpha_1 + 2\alpha_2 = \varkappa$, $\beta_1 + 2\beta_2 = 0$

$$\|R_{\alpha\beta}\| = \left\|\begin{array}{cccccc} -\alpha_1 & 0 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0, & -\alpha_2+\sigma, & 0 & 0 & -\beta_2 & \sigma \\ 0, & 0, & -\alpha_2-\sigma & 0 & \sigma & -\beta_2 \\ -\beta_1 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \sigma & 0 & \alpha_2-\sigma & 0 \\ 0 & \sigma & -\beta_2 & 0 & 0 & \alpha_2+\sigma \end{array}\right\|$$

Здесь $\sigma\,(\neq 0)$ произвольно; репер определен с точностью до вращений в двух взаимно ортогональных площадках.

3. Характеристика (3,3); корни $\pm \varkappa/3$

$$\|R_{\alpha\beta}\| = \left\|\begin{array}{cccccc} -\varkappa/3, & -\sigma, & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma, & -\varkappa/3, & 0 & 0 & 0 & -\sigma \\ 0, & 0, & -\varkappa/3 & 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varkappa/3, & \sigma, & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma & \sigma, & \varkappa/3, & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 & 0, & 0, & \varkappa/3 \end{array}\right\|$$

Произвол в выборе репера тот же. Предварительное сообщение о перечисленных результатах см. Докл. АН СССР, 1951, **31**, 149—152. П. К Рашевский

4867. Новая теория полей тяготения I. Папапетру (Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes. I. Papapetrou Achilles), Math. Nachr., 1954, **12**, № 3/4, 129—141 (нем.)

Строится теория гравитационных полей, в которой фигурируют только два потенциала, что позволяет выразить все основные факты теории тяготения в форме более простой, чем в общей теории относительности,

где имеется 6 потенциалов. Это достигается введением жесткой гипотезы: риманово многообразие с формой $ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$, определяющее поле тяготения, допускает такую систему координат, для которой $ds^2 = -e^{\varphi}(dx^2+dy^2+dz^2)+e^{\chi}dt^2$, где φ и χ — функции поля.

Для этих привилегированных систем координат функция Лангранжа имеет вид: $G \equiv \sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}) = e^{11/2(3\varphi+\chi)}(-\,{}^1/_2\,e^{-\varphi}\varphi_{1i}\varphi_{1i} - e^{-\varphi}\varphi_{1i}\chi_i + {}^3/_2\,e^{-\chi}\varphi_{10}\varphi_{10})$, $_,(i=1,2,3)$ (запятая означает обычное дифференцирование); применяя к ней вариационный принцип, автор получает уравнения поля в любой привилегированной системе координат в виде

$$R = -\varkappa T^{\alpha}_{\alpha},\quad 2R^0_0 = (\varkappa T^0_0 - T^i_i),$$

где R — скалярная кривизна, T^{α}_{β} — тензор энергии — импульса. В этих предположениях записывается теорема энергии — импульса, исследуется случай поля в пустоте. Рассматривая частный случай статического решения уравнения с шаровой симметрией, автор приходит к известному решению Шварцшильда уравнений поля общей теории относительности. А. З. Петров

4868. Новая теория полей тяготения II. Папапетру (Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes. II. Papapetrou Achilles), Math. Nachr., 1954, **12**, № 3/4, 143—154 (нем.)

Продолжение работы с тем же названием (реф. 4867). Исследуются такие преобразования координат, которые переводят привилегированные системы координат в привилегированные же. Показывается, что при этих преобразованиях уравнения поля остаются инвариантными. Исследуются бесконечно малые преобразования $\overset{*}{x}{}^{\alpha} = x^{\alpha} + \varepsilon\zeta^{\alpha}(x^{\mu})$, $\varepsilon \to 0$, при которых функции поля φ и χ переходят соответственно в $\overset{*}{\varphi} = \varphi + \varepsilon\Phi$, $\overset{*}{\chi} = \chi + \varepsilon X$. Записываются выражения для первых и вторых частных производных от ξ^{α} через функции φ, χ, Φ, X и их производные, из которых следует, что Φ — линейная функция от x^i $(i=1,2,3)$ с коэффициентами, зависящими от x_0. Вводя новую функцию $\Omega = e^{1/2(\chi-\varphi)}$, автор получает простые по форме дифференциальные уравнения для Ω.

В заключение рассматриваются некоторые частные случаи, например случай плоского пространства и некоторые другие. А. З. Петров

4869. О работе Ф. И. Франкля «Некоторые принципиальные замечания к общей теории относительности». Фок В. А., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 4, 229—236

Дается критика некоторых замечаний физического и математического характера, имеющихся в работе Ф. И. Франкля, указываемой в заглавии статьи. Рассматривая, как пример, уравнение: $\Delta\psi - c^{-2}\partial^2\psi/\partial t^2 = -4\pi\rho$, передающее существенные черты задачи, решаемой уравнениями поля Эйнштейна, автор подчеркивает, что при правильной формулировке некоторых физических задач, приводящих к гиперболическим уравнениям, не обязательно вводить в явной форме начальные условия (задача Коши), а более естественно исходить из других условий. Этим поясняется утверждение автора (Природа, 1953, **13**, № 12), что «в теории тяготения не имеет физического смысла задавать начальные условия потенциалов тяготения $g_{\mu\nu}$ и их производных». Таким образом, в астрономии, оставляя начальные условия для тяжелых масс, автор считает их несущественными для гравитационных волн. Этот вопрос связывается с возможностью введения гармонических координат, определяемых условиями: $\partial_{\alpha}(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}) = 0$ — однозначно, с точностью до преобразований Лоренца, если учесть все физические условия, соблюдение которых необходимо при определении потенциалов тяготения $g_{\alpha\beta}$. Приводится ряд соображений в пользу этого утверждения.

Далее автор указывет, что предлагаемые им дополнительные условия на систему координат $\partial_{x_0}\Gamma_{\mu,\,00} = -F_{\mu} = 0$ физически не обосновываются и что их искусственность выявляется в задачах астрономического типа, так как они приводят к выводу, что в системе движущихся масс градиент ньютонова потенциала не зависит от времени. Критикуется предложение Франкля связать преимущественные системы отсчета с гравитационным полем, приближенно обладающим сферической симметрией и приближенно не зависящим от времени. Возражая на замечания Франкля о допущении, что тензор масс стремится к нулю на бесконечности, что в космологии философски неприемлемо, автор указывает на различное понимание этого вопроса в космологических задачах и задачах о движении конечной системы масс, где такое допущение приемлемо. Основную ошибку Франкля автор видит в том, что Франкль для уравнений гиперболического типа не мыслит иной постановки задачи, кроме как задачи Коши, не рассматривая случаи, когда начальные условия несущественны. Библ. 6 назв. А. З. Петров

4870. О новой теории «финальной относительности». Фантаппье (Su una nuova teoria di «relatività finale». Fantappié Luigi), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci fis. mat. e natur., 1954, **17**, № 5, 158—165 (итал.)

Группа преобразований, определяющая равенство двух физических событий (феноменов), лежит в основе общей систематизации физики. Для классической физики это группа Галилея Gl^{10}_{3+1}, в частной теории относительности — группа Лоренца Lz^{10}_{3+1}. Группа Галилея является предельным случаем группы Лоренца при $c \to \infty$. Автор показывает, что и группу Лоренца можно получить путем предельного перехода из другой, тоже 10 параметрической группы, которую он назвал финальной (окончательной) группой Fn^{10}_{3+1}, так как последнюю уже нельзя получить как предельный случай какой-то новой группы.

Отыскание финальной группы основывается на следующих положениях: а) пространство — время допускает непрерывную группу движений, зависящую от 10 параметров; в) пространство — время имеет 4 измерения; с) пространство — время имеет неопределенную метрику той же сигнатуры $(3+1)$, что и в частной теории относительности (т. е. существуют вещественные прямые нулевой длины — световые лучи — и трехмерные подпространства, $t = \text{const}$, не содержащие прямых нулевой длины). Из а) и в) следует, что кривизна пространства — времени постоянна. Из с) вытекает, что в проективной реализации Кэли абсолют является вещественной овальной квадрикой, а пространство — время занимает внешнюю часть проективного пространства. Отсюда следует, что кривизна пространства — времени положительна.

Переходя от однородных проективных координат, в которых абсолют представлен уравнением

$$f \equiv -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \qquad (1)$$

к неоднородным

$$t = (x_0/x_4)\,R/c,\quad x = (x_1/x_4)\,R,\quad y = (x_2/x_4)\,R,\quad z = (x_3/x_4)\,R,$$

получаем уравнение

$$\mathfrak{F} = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - R^2 = 0. \qquad (2)$$

Этот вид пространства — времени был впервые выделен Де Ситтером (Sitter W. de, Monthly Notices Roy Astron. Soc., November, 1917, 78, № 1, 3—28) при интегрировании гравитационных уравнений общей теории относительности.

Если для интервалов пространственного типа между A и B положить $\delta = (R/2i)\ln(ABPQ)$, а для интервалов временного типа — $\delta = (R/2c)\ln(ABPQ)$, где P, Q — точки пересечения абсолюта с прямой AB, то формулы частной теории относительности будут получены как предельный случай при $R \to \infty$. Итак, финальная группа Fn^{10}_{3+1} изоморфна ортогональной специальной Os^{10}_{4+1}, т. е. группе линейных однородных подстановок 5 переменных с определителем $+1$, преобразующих квадратичную форму f в себя.

Поскольку Os^{10}_{4+1} — простая группа, т. е. определенные ее структурные константы отличны от нуля, то и та группа, для которой она будет предельной, тоже должна быть простой, так как при непрерывном переходе от некоторой группы к группе с тем же числом параметров те структурные константы, которые не равны нулю в пределе, не могут быть равны нулю и в достаточной близости к пределу. Но, как следует из результатов Э. Картана (É. Cartan), простая 10-параметрическая группа может иметь только одну комплексную структуру Os^{10}_5, которой соответствуют всего 3 вещественные структуры Os^{10}_5, Os^{10}_{4+1} и Os^{10}_{3+2}, причем они являются изолированными. Таким образом, Fn^{10}_{3+1} не может являться пределом другой не изоморфной ей 10-параметрической группы.

Полученное топологическое групповое многообразие V_{10} является тем фазовым пространством, на котором будут определяться функции φ состояния в финальной теории относительности. Б. Л. Лаптев

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

4871. Дуально-дифференцируемые точки на плоских дугах. Шерк (Dually differentiable points on plane arcs. Scherk Peter), Trans. Roy. Soc. Canada, 1954, sec. 3, 48, 43—48 (англ.)

Рассматривается однопараметрическое множество A линейных элементов P_p на проективной плоскости, причем множество точек $P(t)$ является непрерывным образом интервала (для множества прямых $p(t)$ непрерывность не требуется). Множество A называется дифференцируемым справа (слева) от $t = t_0$, если все прямые $P(t_0)P(t)$ сходятся к прямой $p(t_0)$ справа (слева), когда t стремится к t_0. Оно называется дуально-дифференцируемым справа (слева) от $t = t_0$, если все точки $p(t_0) \cap p(t)$ сходятся к $P(t_0)$, когда t стремится к t_0. Эти понятия являются естественным развитием понятия двойственной непрерывности (РЖМат, 1954, 5755).

В зависимости от расположения относительно прямой $p(t_0)$ и двух произвольных прямых $g \supset P(t_0)$ и $h \not\supset P(t_0)$ определяется 6 проективно различных типов элементов P_p, существование которых подтверждается примерами. Объединением этой классификации с ранее введенной автором классификацией при помощи «характеристик» (Scherk P., Časopis pro pěst., mat. a fys., 1937, 66, 165—171) получается 144 проективно различных типа элементов рассматриваемых множеств.

Р. Н. Щербаков

4872. Замечание о топологической транзитивности. Аоки (Note on topological transitivity. Aoki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 6, 428—430 (англ.)

Рассматривается двумерное замкнутое ориентируемое риманово многообразие Σ класса C^3 рода $p > 1$, на котором ни одна геодезическая не содержит пары сопряженных точек. Геодезическая или геодезический луч транзитивны на Σ, если их замыкание в фазовом пространстве Ω (пространстве линейных элементов Σ) совпадает с Ω. Используя результаты предыдущей работы (РЖМат, 1956, 2435), автор получает один из результатов Морса и Хедлунда (Morse M., Hedlund G. A., Trans Amer. Math. Soc., 1942, 51, № 2, 362—385): На многообразии Σ существует транзитивный геодезический луч.

Примечание референта. В общем случае более глубокие результаты получил Грин (РЖМат, 1955, 5277). С. И. Альбер

4873. К вопросу о теореме Витали. Миямото (Note on covering theorem of Vitali. Miyamoto Takao), Mem. Fac. Sci., Kyusyu Univ., 1954, A8, № 2, 153—159 (англ.)

Распространяется теорема Витали о покрытии множеств на плоскости на случай множеств на выпуклой поверхности.

Последовательность множеств $\{E_n\}$ называется регулярной, если $\mu(E_n)/\mu(K_n) > a > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\mu(E_n)$ — площадь (мера) множества E_n, а $\mu(K_n)$ — площадь наименьшего геодезического круга, содержащего множество E_n. Покрытие C множества A на поверхности называется покрытием в смысле Витали, если для каждой точки p из A можно указать сходящуюся к ней регулярную последовательность F_n из C.

Доказывается теорема: Если на замкнутой выпуклой поверхности Φ с непрерывной положительной нормальной кривизной ρ такой, что $r \leqslant \rho \leqslant R$ $(0 < r^2 < R^2 < 2r^2)$, C образует покрытие A в смысле Витали, то в C существует последовательность $\{F_n\}$ непересекающихся множеств такая, что $\mu(A - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = 0$. Теорема доказывается сначала для сферы, а потом через сферическое отображение для произвольной поверхности.

Примечание референта. Теорема верна для любой выпуклой поверхности без каких-либо предположений регулярности (тем более таких жестких условий на нормальную кривизну). Для доказательства достаточно заметить, что при проектировании поверхности из внутренней точки на сферу множества нулевой площади регулярные последовательности множеств взаимно соответствуют. А. В. Погорелов

4874. О развертывающихся линейчатых поверхностях в обобщенной проблеме n тел. Григорьева И. А., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954 (1955), 16, 205—209

Рассматривается движение системы n материальных точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$, для которых во время движения сохраняются длины отрезков

$$r_1 = P_1P_3 = P_1P_4 = \ldots = P_1P_n,$$
$$r_2 = P_2P_3 = P_2P_4 = \ldots = P_2P_n$$

и прямая P_1P_2 описывает коническую поверхность. Единственно возможными при этом оказываются случаи, когда 1) поверхность вырождается в плоскость, проходящую через центр инерции всех точек системы; в этой же плоскости лежит и центр инерции G точек $P_3, \ldots, P_n$; в частности, движение может быть сим-

метрическим ($r_1 = r_2$); 2) поверхность вырождается в линию, на которой лежит точка G; 3) поверхность вырождается в цилиндр (в этом случае $r_1 = r_2$); 4) точки P_1, P_2, G располагаются на одной образующей. Применен аппарат проективно-дифференциальной геометрии. Н. И. Кованцов

4875. **Простое доказательство теоремы П. Кирхбергера. Шимрат** (Simple proof of a theorem of P. Kirchberger. Shimrat Moshe), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 3, 361—362 (англ.)

Дается простое доказательство следующей теоремы Кирхбергера: Пусть S и T — два конечных выпуклых множества в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Тогда, если любые $k+1$ точек S могут быть отделены гиперплоскостью от любых $l+1$ точек T при $k+l \leqslant n$, то S может быть отделено гиперплоскостью от T. А. В. Погорелов

4876. **Анализ теоретико-множественной аксиоматики проективной геометрии. Гонин Е. Г.,** Уч. зап. Молотовск. гос. пед. ин-та, 1954, № 13, 53—62

Задача теоретико-множественного построения проективной геометрии определяется как выделение из совокупности всех подмножеств некоторого множества, называемого пространством, такой части, которая была бы проективной геометрией. При этом среди элементов проективной геометрии, называемых линейными подпространствами, выделяются простейшие — точки и прямые; для них и формулируются аксиомы. Оригинальным автор считает начало статьи, а именно: §§ 1, 2 и отчасти 3.

В § 1 определяется подпространство—точка, подпространство — прямая, дается линейное подпространство и линейная геометрия. В § 2 дается условие для того, чтобы линейная геометрия являлась структурой в виде следующей аксиомы: 1′. Для любых двух различных точек существует прямая, проходящая через эти точки и лежащая в любой прямой, проходящей через эти же точки. При этом линейная геометрия является полной структурой.

В § 3 даются условия того, чтобы линейная геометрия являлась дедекиндовой структурой, в виде двух аксиом: 1. Для любых двух различных точек существует одна и только одна прямая, проходящая через эти точки. Эта аксиома включает в себя и аксиому 1′, указанную выше. 2. Прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника и пересекающая две его стороны, пересекает и третью сторону. Н. А. Колмогоров

4877. **Геометрия с 31 точкой. Эдж** (31-point geometry. Edge W. L.), Math. Gaz., 1955, 39, № 328, 113—121 (англ.)

Рассматривается проективная плоскость над полем Галуа из 5 элементов. Подсчитывается число различных преобразований и многоугольников. Исследуются конические сечения, связанные с ними полярные соответствия, а также теоремы Паскаля и Брианшона. Л. А. Скорняков

4878. **Система аксиом абсолютной геометрии. Карцель** (Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie. Karzel Helmut), Arch. Math., 1954, 6, № 1, 66—76 (нем.)

Объект изучения тот же, что и у Шпернера (РЖМат, 1955, 5296). Постулируются свойства 1, 2а, 2б (исследуется также случай, когда вместо 2б требуется, чтобы прямая принадлежала хотя бы двум различным точкам). Две различные прямые a и b (прямые-элементы группы) называются перпендикулярными, если $(ab)^2 = 1$. Геометрия (=группа) G называется изотропной (соответственно регулярной), если всякая (никакая) прямая (не) принадлежит пучку, определяемому ее перпендикулярами. Кроме того, G называется эллиптической, если для каких-либо трех прямых a, b, c имеет место $abc = 1$. Доказывается, что возможны следующие три типа геометрий: I. Эллиптическая и регулярная; II. Изотропная и неэллиптическая; III. Регулярная и неэллиптическая. Устанавливается, что каждое из следующих условий достаточно для погружения геометрии в проективное пространство над полем: а) для любого пучка P_{cd} и пучка P_{ab}, для которого $(ab)^2 = 1$, $P_{ab} \cap P_{cd}$ не пусто; б) для любого пучка P_{cd} и пучка P_{ab}, для которого $(ab)^2 \neq 1$, $P_{ab} \cap P_{cd}$ не пусто.

Отмечается, что если регулярная геометрия погружена в дезаргову, то тернар последней обязательно оказывается полем. Л. А. Скорняков

4879. **Об одном классе евклидовых многогранников. Венков Б. А.,** Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 250—251

Автореферат доклада на Ленингр. общегородском матем. семинаре.

Автор замечает, что из исследований Г. Минковского, референта и А. Д. Александрова следует, что необходимые условия того, чтобы n-мерный выпуклый многогранник Q был нормальным или ненормальным параллелоэдром, следующие: 1) Q имеет центр симметрии, 2) каждая n — 1-мерная грань θ имеет центр симметрии (это условие Минковского), 3) проекция Q параллельно любой его n—2-мерной грани на дополнительную к ней плоскость есть 6-угольник или 4-угольник (условие Делоне; для ненормальных параллелоэдров оно было получено А. Д. Александровым). Автор доказывает теорему, что если выпуклый n-мерный многогранник Q удовлетворяет условиям 1), 2) и 3), то он есть нормальный параллелоэдр. Отсюда вытекает, что любой ненормальный параллелоэдр есть вместе с тем и нормальный. Доказанная теорема, однако, еще не решает задачи о параллелоэдрах, так как она не дает возможности найти топологические типы сеток ребер n-мерных параллелоэдров и тем более возможные метрики этих сеток. Б. Н. Делоне

4880. **О многоугольниках. Смогоржевский А. С.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954 (1955), 16, 184—199

Автор ставит и решает задачу доказательства теорем, касающихся многоугольников, на основе аксиом сочетания и порядка Гильберта, не привлекая при этом аксиом конгруэнтности, параллельности и непрерывности. Введением в рассмотрение конфигурации Z (дзета) упрощаются доказательства теорем. Определение конфигурации Z, по автору: Пусть вершины A_{i-1} и A_{i+2} ломаной $A_1 \ldots A_n$ лежат по разные стороны прямой A_iA_{i+1}. В таком случае мы будем говорить, что стороны $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$ этой ломаной образуют конфигурацию Z. И. А. Лурье

4881. **К характеристике систем окружностей и конических сечений. Хемерт** (Zur Kennzeichnung der Systeme der Kreise und der Kegelschnitte. Heemert A. van), J. reine und angew. Math., 1955, 194, № 1—4, 183—189 (нем.)

Дается характеристика системы всех окружностей на евклидовой плоскости с неисчезающим радиусом и системы всех невырожденных линий второго порядка на проективной плоскости. Результаты работы упрощают исследования, проведенные Буккелем (Buckel W., РЖМат, 1954, 1770; 1954, 2285).

1. На двумерной евклидовой плоскости E_2 (рассматриваемой как тело комплексных чисел) дана система S точечных множеств (фигур) со следующими свойствами: а) S содержит по крайней мере две фигуры, б) каждая фигура содержит по крайней мере две точки, в) каждая фигура есть семиконтинуум, г) для любых трех различных точек E_2 существует

точно одна фигура, содержащая эти точки, д) S — инвариантна относительно движений E_2 в себя. Условиями а), б), в), г), д) характеризуется на E_2 система всех окружностей с неисчезающим радиусом (включая прямые). При этом условие в) может быть заменено условием: в') каждая фигура связна и локально компактна.

2. На проективной плоскости Π_2 дана система S точечных множеств (фигур) со следующими свойствами: а) S содержит по крайней мере две фигуры, б) каждая фигура содержит по крайней мере три различных точки, не лежащие на одной прямой, в) каждая фигура S связна, г) для пяти различных точек Π_2, из которых никакие три не лежат на одной прямой, существует точно одна фигура, содержащая эти точки; тогда как пять любых различных точек находятся не более чем на одной фигуре, д) S инвариантна относительно проективных преобразований Π_2 в себя.

Доказывается, что эти условия характеризуют систему всех невырожденных линий второго порядка на проективной плоскости. Н. Г. Туганов

4882. Классификация вещественных групп Ли с четырьмя параметрами. Добреску (Clasificarea grupurilor lui Lie reale cu patru parametri. Dobrêscu Andrei), Studii şi cercetări mat., 1953, 4, № 3-4, 395—436 (рум.; рез. русс., франц.)

Пусть G_r — r-мерная алгебра Ли над полем действительных чисел и c_{ij}^k — структурные константы G_r в некотором базисе. При изменении базиса c_{ij}^k преобразуются по тензорному закону, а в силу тождеств Якоби удовлетворяют уравнениям $c_{h\beta}^{\alpha}c_{kl}^{\beta} + c_{k\beta}^{\alpha}c_{lh}^{\beta} + c_{l\beta}^{\alpha}c_{hk}^{\beta} = 0$. При $r = 4$ решения этих уравнений тензорными преобразованиями приводятся к каноническому виду и тем самым классифицируются 4-мерные действительные алгебры Ли. При этом выписываются в явном виде структурные константы полученных алгебр. Для комплексных алгебр соответствующие результаты были получены С. Ли. Ф. И. Карпелевич

4883. Гармоническое сродство. Ч. II. Пирко (Harmonická příbuznost. Část II. Pírko Zdeněk), Časop. pěstov. mat., 1954, 79, № 3, 261—272 (чеш.)

В ч. I (Časop. pěstov. mat., 1951, 76, № 3, 201—215) автор определил соответствие между точками и прямыми проективной плоскости, названное им гармоническим родством. В реферируемой ч. II показывается, что это соответствие является произведением поляритета относительно некоторой кривой второго порядка и квадратичной инверсии относительно той же кривой и точки, не лежащей на ней (квадратичная инверсия — проективный образ обычной инверсии относительно окружности) и находится ряд свойств этого соответствия. Alois Urban

4884 К. Проективные плоскости. Скорняков (Projective planes. Skornyakov L. A.), Amer. Math. Soc. Translation № 99, 1953, 58 p. (англ.) Перевод с русского (Успехи матем. наук, 1951, 6, № 6, 112—154)

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 550.

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

4885. Синтетические методы в теории поверхностей. Александров (Synthetic methods in the theory of surfaces. Alexandrov A. D.), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 162—175 (англ.)

Обзор основных методов.

Одним из основных средств синтетического исследования поверхности является приближение ее внутренней метрики многогранной, изучение последней и перенесение путем перехода к пределу полученных результатов на исходную поверхность. Многогранная метрика, будучи устроена просто, часто допускает простое решение проблемы (например, известная проблема Вейля о реализуемости заданной на сфере регулярной метрики выпуклой поверхностью для случая многогранных метрик).

Сильным средством синтетического исследования в теории поверхностей является метод «склеивания». Сущность метода заключается в том, что из двух или нескольких многообразий ограниченной кривизны путем отождествления «склеивания» отрезков их границ строится новое многообразие ограниченной кривизны. С помощью этого метода, например, принципиально решена до конца проблема изгибания выпуклых поверхностей. Автор иллюстрирует метод «склеивания» доказательством изгибаемости куска выпуклой поверхности и решением экстремальной задачи: какая из всех выпуклых поверхностей, гомеоморфных кругу с данным периметром и кривизной, имеет наибольшую площадь? А. В. Погорелов

4886. Обобщение формул Штейнера. Оман (Eine Verallgemeinerung der Steinerschen Formel. Ohmann D.), Math. Ann., 1955, 129, № 2, 209—212 (нем.)

Пусть A — ограниченное замкнутое множество в евклидовом пространстве R_n; A_τ ($\tau > 0$) — множество точек, расстояние которых от A не больше τ; A_ξ — ортогональная проекция A на $(n-1)$-мерную плоскость с направлением нормали ξ; $\tilde{A}$ — выпуклая оболочка A. Полагая $W_p(A) = (1/nv_{n-1}) \int_{\Omega_n} W_{p-1}(A_\xi)\, d_\xi$ ($p = 1, \ldots, n-1$), $W_0(A) = M(A)$, $W_n(A) = v_n$, где v_n — объем n-мерной единичной сферы Ω_n, а $M(A)$ — лебегова мера A, автор доказывает соотношение

$$W_p(A_\tau) \geqslant \sum_{\nu=0}^{n-p} \binom{n-p}{\nu} \tau^\nu W_{p+\nu}(A).$$

Равенство имеет место в случае, когда $W_p(A) = W_0(\tilde{A})$ (в частности, для выпуклых тел, когда оно является формулой Штейнера). Работа примыкает к предыдущей статье автора (РЖМат, 1956, 1656).

Г. И. Дринфельд

4887. Краевая задача, связанная с изгибанием полусферы. II. Ниче (Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. II. Nitsche Joachim), Arch. Math., 1954, 6, № 1, 13—17 (нем.)

Если периодическая функция $\mu(\varphi)$ удовлетворяет условиям

$$\oint_{s_0} \mu\, d\varphi = 0; \quad \oint_{s_0} \mu \sin\varphi\, d\varphi = 0; \quad \oint_{s_0} \mu \cos\varphi\, d\varphi = 0 \qquad (1)$$

(s_0 — край полусферы T_0 радиуса 1, φ — длина дуги s_0; РЖМат, 1954, 4176), то может существовать не больше одной поверхности, изометричной T_0, для которой производная кривизны граничной кривой равна $\mu(\varphi)$. Доказательство опирается на теорему существования решения определенной краевой задачи для линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений.

Э. Г. Позняк

4888. Краткий вывод изопериметрического свойства шара. Хадвигер (Kurze Herleitung der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel. Hadwiger H.), Elem. Math., 1954, 9, № 5, 97—101 (нем.)

Пусть V, F, M — объем, поверхность и интеграл средней кривизны выпуклого замкнутого тела. Дается

простое доказательство основного изопериметрического неравенства $F^3 - 36\pi V^2 \geqslant 0$ и показывается, что равенство достигается только для сферы. Одновременно доказываются неравенства Минковского

$$M^2 - 4\pi F \geqslant 0, \quad M^3 - 48\pi^2 V \geqslant 0.$$

Е. А. Морозова

4889. Выпуклый многогранник как геометрическое место. Надь (Konvexes Polyeder als geometrischer Ort. Sz.-Nagy Gyula), Acta math., 1954, 5, № 3—4, 165—167 (нем.; рез. русс.)

Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — заданные плоскости в евклидовом пространстве, не все параллельные одной прямой, и пусть $A(P)$ — арифметическая сумма расстояний точки P от плоскостей $E_1, \ldots, E_n$. Геометрическим местом $G(k)$ точек P, для которых $A(P) = k > k_0 = \min A(P)$, является поверхность выпуклого многогранника, грани которого лежат в плоскостях $E_1, \ldots, E_n$. $G(k_0)$ может выродиться в многоугольник, отрезок или точку. Автор отметил, что теорему можно обобщить на случай взвешенных (с положительными весами) расстояний. Работу покойного автора подготовил к печати Тот (Tóth). Г. И. Дринфельд

4890. Геометрическое доказательство одного предложения Акселя Шура. Эглофф (Ein geometrischer Beweis eines Satzes von Axel Schur. Egloff Werner), Arch. Math., 1955, 6, № 4, 281—283 (нем.)

Приводится простое геометрическое доказательство предложения Шура (Schur A., Math. Ann., 1921, 83, 143—148): При «скручивании» (Verwindung) плоского полигона, который вместе со своей хордой образует выпуклую замкнутую ломаную без двойных точек, длина хорды увеличивается. Под «скручиванием» понимается преобразование полигона в полигон, не изменяющее порядок следования его сторон, длины сторон и углы при вершинах. Более общая теорема Шура рассмотрена в книге Бляшке (Бляшке, Дифференциальная геометрия, М.— Л., 1935, 1, 73—76).

П. М. Олоничев

4891. Пределы площадей многоугольников, вписанных в простую замкнутую кривую. Безикович (On limits of the area of a polygon inscribed in a simple closed curve. Besicovitch A. S.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 22, 135—142 (англ.)

Пусть Γ — простая замкнутая кривая. Последовательность $C_1, C_2, \ldots, C_n$ точек на Γ называется монотонной, если при обходе Γ в определенном направлении точки встречаются в порядке возрастания индексов. Многоугольник $C_1C_2 \ldots C_nC_1$ называется вписанным в Γ, если последовательность точек $C_1, C_2, \ldots, C_n$ монотонна на Γ. Вписанный многоугольник без самопересечений называется простым. В дальнейшем плоская лебегова мера множества U обозначается через $|U|$. Пусть G — внутренняя область Γ, $\overline{G}$ — замыкание G, $\Pi(\lambda)$ — вписанный в Γ простой многоугольник, длины сторон которого меньше λ. Доказываются предложения. 1. $\lim \inf_{\lambda \to 0} |\Pi(\lambda)| = |G|$, $\lim \sup_{\lambda \to 0} |\Pi(\lambda)| = |\overline{G}|$. 2. Каждое число $|G| + \alpha$ $(0 < \alpha < |\overline{G}| - |G|)$ является пределом последовательности площадей вписанных простых многоугольников. 3. Если рассматривать также и самопересекающиеся вписанные многоугольники и определить их площадь как число, равное интегралу $\frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx)$, то можно привести примеры простых замкнутых кривых, для которых пределы площадей вписанных многоугольников могут быть равны любому числу (в том числе $-\infty$ и $+\infty$). Э. Г. Позняк

4892. Одна интегральная формула для замкнутых гиперповерхностей. Сюнь Чжуань-цзи (Some integral formulas for closed hypersurfaces. Hsiung Chuan-Chih), Math. scand., 1954, 2, № 2, 286—294 (англ.)

Пусть V^n — ориентируемая гиперповерхность в евклидовом пространстве E^{n+1} $(n+1 \geqslant 3)$. Пусть $\varkappa_1\varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ — главные кривизны в точке P гиперповерхности V^n. Средней m-кривизной V^n в точке P называется m-я симметрическая функция $\varkappa_1\varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, деленная на $\binom{n}{m}$, и обозначается M_m. Доказывается, что интеграл

$$\int_{V^n} (M_{r+1}p + M_r)\,dA, \quad r = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где p — ориентированное расстояние от фиксированной точки O пространства до касательной гиперплоскости V^n, а dA — элемент объема V^n, приводится к интегралу по границе V^{n-1} гиперповерхности V^n. Отсюда получается для случая замкнутой гиперповерхности V_n формула

$$\int_{V^n} M_{r+1}p\,dA + \int_{V^n} M_r\,dA = 0, \quad r = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Для выпуклых гиперповерхностей эта формула была получена ранее Минковским для случая $n = 2$ и Кубота для любого n.

Сведение интеграла (1) к интегралу по границе V^{n-1} получается непосредственно для случая $r = 0$ $(M_0 = 1)$. Для других r оно получается применением формулы в случае $r = 0$ к гиперповерхности, параллельной V^n, находящейся на расстоянии t от нее и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях t в полученном равенстве.

Интегральная формула (2) применяется к доказательству характеристических свойств гиперсферы. Например, если существует точка O и целое s, $1 \leqslant s \leqslant n$, такие, что p сохраняет знак $M_i > 0$ для $i = 1, \ldots, s$ и M_s постоянно, то V^n — гиперсфера.

А. В. Погорелов

4893. Две экстремальные задачи геометрии Минковского. Лейхтвейсс (Zwei Extremalprobleme der Minkowski-Geometrie. Leichtweiss Kurt), Math. Z., 1955, 62, № 1, 37—49 (нем.)

Пусть M_n — n-мерное пространство Минковского и $\mathfrak{G}$ — масштабное тело, определяемое неравенством $F(x_1, \ldots, x_n) = F(\mathbf{x}) \leqslant 1$, где функция F — положительная, однородная, первой степени относительно x. Каждому вектору $\mathbf{x}$ ставится в соответствие масштабный вектор $\mathbf{e} = \mathbf{x}/F(\mathbf{x})$, соединяющий начало координат с границей $\mathfrak{G}$. Если $\mathbf{x}$ соединяет точки P и Q, то расстояние $d(P, Q)$ определяется следующим образом: $d(P, Q) = d(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|/|\mathbf{e}|$ (знак абсолютного значения означает евклидову длину). Пусть $d = \max d(P, Q)$ — диаметр выпуклого тела $\mathfrak{K}$ в M_n. Геометрическими методами доказываются теоремы:

1) Имеется точка $z \in M_n$ такая, что $d(z, P) \leqslant [n/(n+1)]\,d$ для всех $P \in \mathfrak{K}$ (ранее доказана алгебраическими методами Боненблюстом).

2) Если существует точка z, для которой $d(z, P) < [n/(n+1)]\,d$, где P — любая точка $\mathfrak{K}$, т. е. если радиус описанной вокруг $\mathfrak{K}$ сферы равен $[n/(n+1)]\,d$, то $\mathfrak{K}$ есть n-мерный симплекс $\mathfrak{S}$ и масштабное тело $\mathfrak{G}$ имеет следующее устройство: $d \cdot \mathfrak{G}$ содержится в таком в $(n+1)$ раз увеличенном гомотетичном образе $\mathfrak{S}$, центр тяжести которого совпадает с началом отсчета

в M_n. В этом случае центр сферы, описанной вокруг $\mathfrak{S}$, совпадает с центром тяжести $\mathfrak{S}$ и поэтому однозначно определен (можно привести примеры выпуклых тел, которые имеют несколько описанных сфер). Эта теорема для случая, когда $\mathfrak{V}$ есть n-мерный шар ($n>1$) не имеет места. В этом случае для радиуса описанной сферы имеет место неравенство Юнга: радиус описанной сферы не превышает $\sqrt{n/2(n+1)}\,d$. Для случая $n=2$, например, $\mathfrak{K}$ может быть любым выпуклым телом, заключенным между равносторонним треугольником и описанным вокруг него треугольником Рело.

3) Расстояние между двумя параллельными плоскостями определяется как минимум расстояний от фиксированной точки одной из них до любой точки другой. Пусть $e(\mathfrak{n})$ — расстояние между двумя опорными плоскостями к $\mathfrak{K}$, которые перпендикулярны направлению $\mathfrak{n}$, и пусть e — минимум всех $e(\mathfrak{n})$. Тогда радиус вписанного в $\mathfrak{K}$ шара не меньше $e/(n+1)$.

4) Если радиус вписанного в $\mathfrak{K}$ шара точно равен $e/(n+1)$, то $\mathfrak{K}$ есть n-мерный симплекс. Масштабное тело $\mathfrak{V}$ устроено в этом случае следующим образом: $e\cdot\mathfrak{V}$ касается всех $(n-1)$-мерных граней такого $(n+1)$-кратно увеличенного гомотетичного образа $\mathfrak{S}$, центр тяжести которого совпадает с началом M_n. Центр вписанного в $\mathfrak{S}$ шара является центром тяжести $\mathfrak{S}$ и поэтому однозначно определен.

Исключением является случай, когда $\mathfrak{V}$ есть n-мерный шар ($n\geqslant 3$). В этом случае радиус r вписанного шара удовлетворяет соответственно для четных и нечетных n неравенствам $r\geqslant\sqrt{n+2}\,e/2(n+1)$ и $r\geqslant e/2\sqrt{n}$. Э. Г. Позняк

4894. Об аддитивных функционалах k-мерных выпуклых многогранников. Хадвигер (Über additive Funktionale k-dimensionaler Eipolyeder. Hadwiger H.), Publs mathematicae, 1953, 3, № 1—2, 87—94 (нем.)

Если выпуклый многогранник k-мерного евклидова пространства R_k рассекается $(k-1)$-мерной плоскостью на два выпуклых многогранника P и Q, то данный многогранник обозначается через $P+Q$, а сечение (являющееся выпуклым многогранником) обозначается через PQ.

Функционал $\varphi(P)$, определенный на множестве всех выпуклых многогранников P из R_k, называется аддитивным, если всегда $\varphi(P)+\varphi(Q)=\varphi(P+Q)+\varphi(PQ)$, просто аддитивным, если всегда $\varphi(P)+\varphi(Q)=\varphi(P+Q)$, инвариантным относительно движения, если $\varphi(P)=\varphi(Q)$ для всяких конгруэнтных многогранников P и Q, ограниченным, если для любого куба T существует постоянная $C(T)$ такая, что $|\varphi(P)|\leqslant C(T)$ для всякого $P\subseteq T$.

Пусть P_i, $0\leqslant i\leqslant k-1$, есть i-мерная грань выпуклого многогранника P из R_k и z — внутренняя точка грани P_i. Через точку z проходит $(k-i)$-мерная плоскость R_{k-i}, ортогональная к P_i. Исходящие из z внешние нормали к P образуют $(k-i)$-мерный конус, лежащий в R_{k-i}. Отношение угловой меры этого конуса к угловой мере всей R_{k-i} называется i-й относительной кривизной i-мерной грани P_i и обозначается $\omega_i(P, P_i)$.

Последовательность функционалов $\Phi_0(P)$, $\Phi_1(P)$, ..., $\Phi_k(P)$ называется шкалой, если функционал $\Phi_i(P)$ определен для любого i-мерного выпуклого многогранника P пространства R_k, причем при $1\leqslant i\leqslant k$ $\Phi_i(P)$ является просто аддитивным функционалом в любом i-мерном подпространстве R_i.

Аддитивность функционала $\varphi(P)$ равносильна представимости $\varphi(P)$ через некоторую шкалу $\Phi_i(P)$ в виде:

$$\varphi(P)=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{P_i}\omega_i(P, P_i)\,\Phi_i(P_i)+\Phi_k(P),$$

где внутренняя сумма Σ_{P_i} распространяется на все i-мерные грани P_i многогранника P. При этом инвариантность относительно движения функционала $\varphi(P)$ равносильна инвариантности относительно движения шкалы $\Phi_i(P)$. Если в качестве инвариантной относительно движения шкалы функционалов $\Phi_i(P)$ принять $\Phi_i(P)=c_iV_i(P)$, где $i=0,\ldots,k$, $V_i(P)$ есть i-мерный объем i-мерного многогранника P и c_i — постоянные, то соответствующие инвариантные относительно движения аддитивные функционалы $\varphi(P)$ будут всевозможными линейными комбинациями поперечных мер Минковского $W_0(P)$, $W_1(P)$, ..., $W_k(P)$.

С помощью аксиомы выбора можно построить инвариантные относительно движения просто аддитивные функционалы $\Phi_i(P)$, отличающиеся от i-мерного объема многогранника P.

Поставлена проблема: доказать, что всякий ограниченный инвариантный относительно движения, аддитивный функционал $\varphi(P)$ есть линейная комбинация поперечных мер Минковского. З. Л. Лейбензон

4895. Одно обобщение теоремы Минковского. Эрхарт (Une généralisation du théoème de Minkowski. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1953, 240, № 5, 483—485 (франц.)

Пусть F — плоская выпуклая фигура площади S и G — ее центр тяжести. Проходящие через G хорды называются диаметрами, а хорды, делящиеся в G пополам, — главными диаметрами. Доказывается, что при $S>9/2$ и G, расположенном в узле единичной решетки, F содержит по меньшей мере две целые точки, отличные от G. Это обобщает теорему Минковского, утверждающую аналогичный результат для центрально-симметричных F при $S>4$. Доказательство опирается на известный результат о том, что каждый из диаметров делит F на части площадью $\geqslant 4/9\,S$ каждая, а также на существование трех главных диаметров, отсекающих от F части, которые не имеют общих точек, кроме G (речь идет о частях, лежащих по ту сторону диаметра, с которой полукасательные к контуру в концах диаметра сходятся или параллельны).

Автор высказывает предположение, что всякое выпуклое тело с объемом $>4^4/3^3$ и центром тяжести G в узле единичной трехмерной решетки содержит целую точку, отличную от G. Это известно автору для случая тел вращения. В. А. Залгаллер

4896. Об овалах и овоидах. Эрхарт (Sur les ovales et les ovoïdes. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 6, 583—585 (франц.)

Центром овала или овоида O (тело, ограниченное выпуклой поверхностью) называется центр тяжести G. Диаметральное сечение — сечение, проходящее через G. Если G находится в начале целочисленной сети, то говорят, что овал или овоид имеет центром начало сети. Доказываются следующие предложения. 1) В пространстве E_n отношение, в котором G делит диаметр выпуклого тела, заключено между $1/n$ и n, причем границы достигаются только в случае конуса. 2) Для любого овала O и произвольной прямой d можно указать такой овал Q, для которого d служит осью симметрии, причем хорды, полученные в пересечении O и Q с произвольной, перпендикулярной d прямой, равны (для овоидов справедливо аналогичное предложение, только равенство хорд заменяется либо равенством площадей соответствующих сечений, либо длинами периферий

этих сечений). Из предложения 2) сразу же следует справедливость известной теоремы Брунна о единственности сечения параллельными плоскостями с максимальной площадью или длиной периферии. Доказательства предложения 2) автор не приводит, но указывает, что оно основывается на неравенстве Минковского. 3) Отношение объема овоида к объему тела, отсеченного от него диаметральной плоскостью, не больше $(4/3)^3$, причем равенство достигается лишь для конуса. 4) Если объем овоида с центром G в начале сети больше чем $4^4/3^3$, то он заключает по крайней мере еще одну, отличную от G целочисленную точку. 5) Овал с центром G в начале сети и с площадью более $4{,}5n$ заключает по меньшей мере n отличных от G целочисленных точек. 6) Овал с центром в начале сети и с площадью более $9n$ заключает по меньшей мере две симметричные относительно G целочисленные точки. 7) Если отличный от треугольника овал с центром в начале сети не заключает внутри отличных от G целочисленных точек, то на его контуре может располагаться не больше 8 целочисленных точек, причем равенство достигается для параллелограмма. На контуре треугольника может располагаться не больше 9 точек. Доказательства сформулированных предложений опираются на результаты Минковского, Бликфельда и автора. Э. Г. Позняк

4897. Об овалах в геометрии чисел. Эрхарт (Sur les ovales en géométrie des nombres. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 9, 935—938 (франц.)

Статья является продолжением предыдущих работ автора (реф. 4895, 4896). Доказываются следующие предложения:

1) Если треугольник не содержит иных целочисленных точек, кроме центра тяжести G, то на его периферии может располагаться не больше 9 целочисленных точек.

2) Овал с центром в начале и с площадью, большей $4{,}5n$, содержит целочисленные точки, отличные от G в числе, большем или равном $3n/2$.

3) Если длины максимальных хорд овала, имеющих главное направление сети, больше чем 2, то овал заключает не меньше одной целой точки.

4) Пусть единственными целочисленными точками сети на отрезке AB ($AB \neq 1$) являются его концы и пусть O — параллелограмм, у которого A и B являются серединами противоположных сторон, направление которых совпадает с одним из главных направлений сети. Тогда для того чтобы O заключал более одной целочисленной точки, необходимо и достаточно, чтобы площадь O была больше 2. Э. Г. Позняк

4898. Арифметико-геометрические свойства овалов. Эрхарт (Propriétés arithmo-géométriques des ovales. Ehrhart), Eugène C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 3, 274—276 (франц).

Продолжение трех заметок об овалах и овалоидах в геометрии чисел (реф. 4895, 4896, 4897). Ядром называется общая часть овала и фигуры, симметричной ему по отношению к его центру тяжести. Площадь ядра не менее, чем 2/3 площади овала. Эта теорема доказывается при различного вида дополнительных условиях. В частности, она верна для четырехугольников. Высказывается предположение, что дополнительные условия излишни. Кроме того, отмечается ряд связей между площадью овала и числом целых точек в нем. Эти связи устанавливаются применением теоремы Минковского к ядру овала. С. И. Залгаллер

4899. Выпуклые центрально-симметричные области и нормированные пространства. Лаугвиц (Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume. Laugwitz Detlef), Math. Z., 1954, **61**, № 3, 235—244 (нем.)

Приводится несколько замечаний относительно пространств Минковского. Устанавливается известная оценка длины $2\pi_M$ единичной окружности на плоскости Минковского $6 \leqslant 2\pi_M \leqslant 8$ (РЖМат, 1954, 3827). Попутно дается аналитическая характеризация плоских центрально-симметричных овалов, у которых для каждого диаметра есть сопряженный (диаметры называются сопряженными, если касательные в концах одного параллельны другому).

Полная кривизна кривой в пространстве Минковского равна длине индикатрисы касательных кривой на единичной сфере пространства. Для нижней грани K полных кривизн замкнутых кривых устанавливается оценка: $4 \leqslant K \leqslant \inf \Pi_E \leqslant 8$, где Π_E — длина сечения единичной сферы двумерной плоскостью, проходящей через центр. Точное значение K неизвестно. Автор высказывает предположение, что $6 \leqslant K = \inf \Pi_E$.

В заключение рассматриваются линейные пространства, в которых единичной сферой служит произвольная звездная область, и устанавливаются два характеристических свойства евклидовых пространств в классе таких обобщенных пространств Минковского: 1) пространство евклидово, если геометрия любой его двумерной плоскости евклидова; 2) пространство евклидово, если оно изотропно во всех направлениях.

Ю. Г. Решетняк

См. также: 4259, 4265 Д, 4301, 4371, 4404, 4450, 4469, 4591 К

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

4900. Формулы типа проф. Штаермана для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Волохов А. Н., Сб. статей Всес. заоч. политехн. ин-та, 1955, вып. 11, 117—128

Дается новый вывод формул типа Штаермана (Вестн. политехн. ин-та, Киев, 1926, 20, 26—62) для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, суть которого заключается в следующем. В ряде Тейлора

$$y_{k+1} = y_k + hf_k + (h^2/2!)\, f'_k + (h^3/3!)\, f''_k + \ldots, \qquad (1)$$

представляющем разложение решения уравнения $y' = f(x, y)$ в точке $x_{k+1} = x_k + h$, второй член представляется в виде суммы $hf_k = h\alpha f_k + h\beta f_k$, $\alpha + \beta = 1$. Затем все члены, кроме первого и третьего, разлагаются в ряды Тейлора и α подбирается таким образом, чтобы исчезли члены, содержащие f'_{k-1}. Это приводит к формуле

$$y_{k+1} = y_k + (3f_k - f_{k-1})\, h/2 + R,$$

где R — остаточный член, равный сумме всех членов разложения, содержащих вторые и старшие производные функции $f(x, y)$; порядок остаточного члена определяется суммой членов, содержащих вторые производные, равной $(5/12)\, h^3 f''_{k-1}$.

Полученная формула не содержит производных функции $f(x, y)$, но дает ошибку того же порядка, что и ряд Тейлора, оборванный на члене, содержащем пер-

вую производную. Если потребовать исчезновения членов, содержащих производные все более высокого порядка, то и получаемые формулы будут с остаточным членом все более высокого порядка. Далее, разлагая в (1) не один член, а два, три или еще больше, причем каждый член разлагая на две, на три или еще большее число частей, можно получить формулы с остаточным членом все более высокого порядка.

Автор указывает на возможность применения описанного приема к уравнениям высших порядков. Наконец, показано, что из многочисленных формул рассматриваемого типа возможно подобрать группы их, удобные для начала интегрирования с желаемой степенью точности. Д. Ф. Давиденко

4901. Приближенное интегрирование дифференциального уравнения Эленбааса — Геллера. Шмиц, Шик (Näherungsweise Integration der Elenbaas — Hellerschen Differentialgleichung. Schmitz G., Schick K.), Z. Naturforsch., 1955, **10a**, № 6, 495 (нем.)

Дифференциальное уравнение Эленбааса — Геллера имеет вид: $x^{-1}(xy')' + C_1 f_1(y) + C_2 f_2(y) = 0$ при краевых условиях $y'(0) = 0$; $y(1) = y_1 = \text{const}$. Путем замены $u = C_1 x^2/4$ уравнение приводится к виду $(uy'_u)'_u + f_1(y) + k f_2(y) = 0$ $(k = C_2/C_1)$. Полагая приближенно $-f_1(y) - k f_2(y) \approx A + By$, где A и B — константы, получим на этих отрезках уравнения, решения которых можно выразить через бесселевы функции.

М. Л. Бродский

4902. О видоизменении метода Чаплыгина для дифференциальных уравнений первого порядка. Вороновская Е. В., Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 1, 121—126

Искомое решение уравнения $y' = F(x, y)$ заменяется решением линейного уравнения, для вычисления коэффициентов которого даны формулы. Приводимый способ оценки погрешности дает возможность сравнивать решение нелинейного уравнения с решением любого линейного. Рассмотрены 4 примера.

Следует отметить, что название работы не соответствует содержанию, так как методом Чаплыгина сейчас называют построение верхней и нижней границ, заключающих искомое решение. Н. В. Азбелев

4903. К вопросу о распространении метода Чаплыгина за границы применимости теоремы о дифференциальных неравенствах. Азбелев Н. В., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 3, 429—430

Рассматривается уравнение $y^{(n)} = f[y]$ $(f[y] = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}))$ с начальными условиями $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ при следующих предположениях: 1) функция $f[y]$ непрерывна в области G: $x_0 \leqslant x \leqslant X$, $a_k \leqslant y^{(k)} \leqslant b_k$, содержащей точку $(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$, 2) существуют на отрезке $[x_0, X]$ непрерывные функции $q_k(x)$ и $p_k(x)$ такие, что при данном x и любой паре систем значений $y_1^{(k)}$ и $y_2^{(k)}$, удовлетворяющих соотношениям $b_k \geqslant y_1^{(k)} > y_2^{(k)} \geqslant a_k$, выполняются неравенства $f[y_1] - f[y_2] \geqslant \sum_{k=0}^{n-1}(y_1^{(k)} - y_2^{(k)}) q_k$; $f[y_1] - f[y_2] \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(y_1^{(k)} - y_2^{(k)}) p_k$.

Пусть $\varphi = z - f[z]$, ξ — решение уравнения $\xi^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \xi^{(k)} + \Phi(\xi^{(k)}(x_0))$, где $\Phi \geqslant \varphi$, φ_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ — непрерывные в промежутке (x_0, X) функции, удовлетворяющие неравенствам $\varphi_k \geqslant 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \leqslant \varphi$. Утверждается без доказательства теорема: Если $a_k = q_k + \varphi_k/\xi^{(k)} \geqslant 0$, $x_0 < x < X$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, то $z^{(l)} \geqslant y^{(l)}$, $x_0 < x < X$ $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$. Как следствие теоремы получается обобщение теоремы Кнезера о неколеблемости решения уравнения $y'' + Q(x) y = 0$.

К. В. Задирака

4904. Численное интегрирование уравнения вихря в квазигеострофическом приближении для баротропной и простейшей бароклинной сред. Чарни, Филипс (Numerical integration of the quasi-geostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flows. Charney J. G., Philips N. A.), J. Meteorol., 1953, **10**, № 2, 71—99 (англ.)

Предлагается метод численного интегрирования нелинейного уравнения вихря скорости крупномасштабных атмосферных движений, существенных для эволюции и прогноза давления. Задача ставится в квазигеострофическом приближении, которое соответствует тому факту, что основной компонентой рассматриваемого движения является его соленоидальная часть. Уравнение имеет вид:

$$\frac{D}{Dt}\left(\eta \frac{\partial \ln \theta}{\partial p}\right) = 0. \qquad (1)$$

Здесь независимые переменные: время t, декартовы координаты x, y и давление p, отвечающее вертикальной координате. Искомая функция $\varphi(x, y, p, t)$ — высота поверхности $p = \text{const}$, связана с величинами η и θ соотношениями: $\theta = \text{const}\ (\partial\varphi/\partial p)^{\frac{1}{\varkappa}}$ ($\varkappa$ — постоянная); $\eta = (1/f)\Delta_{x,y}\varphi + f$ (f — известная функция x, y); $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v}_g \cdot \nabla$, $\mathbf{v}_g = (1/f)[\mathbf{k} \times \nabla_{x,y}\varphi]$. Для (1) по t ставится задача Коши, а по p — краевая задача. Уравнение решается в бесконечном (по x, y) слое, ограниченном координатными поверхностями $p = 0$ и $p = p_0$ (p_0 — давление на уровне моря), на которых принимается условие $(D/Dt)\ln\theta = 0$.

Рассматривая на первых порах в (1) p как некоторый параметр, авторы представляют атмосферу состоящей из n слоев и после ряда упрощений записывают (1) на каждом уровне в виде:

$$(D/Dt)_k [\eta_k + \pi_k(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - \pi_{k-1}(\varphi_k - \varphi_{k-1})] = 0 \quad (2)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n),$$

где π_k — известные параметры.

При $n = 1$ (баротропная модель) получается одно уравнение:

$$\Delta\partial\varphi/\partial t = J(\eta, \varphi), \qquad (3)$$

отнесенное к «среднему» уровню атмосферы (здесь $J(\eta, \varphi) \equiv (\partial\eta/\partial x)(\partial\varphi/\partial y) - (\partial\eta/\partial y)(\partial\varphi/\partial x)$). Это уравнение решается относительно $\partial\varphi/\partial t$ для плоской прямоугольной области в конечных разностях по x и y методом сеток; интегрирование по t — способом касательных. На краях сетки принимаются два условия: 1) $\partial\varphi/\partial t = 0$ и 2) η (или $\Delta\varphi$) равно своему начальному значению в тех точках границы, где скорость $\mathbf{v}_g$ оказывается направленной внутрь рассматриваемой области; в остальных точках η не задается, а определяется односторонними разностными производными от φ, вычисленными по ближайшим к границе внутренним точкам.

Рассматриваются две возможные схемы численного решения (3). В первой из них по значениям φ для некоторого момента t вычисляется правая часть уравнения и далее находится $\partial\varphi/\partial t$ как решение уравнения Пуассона. С помощью $\partial\varphi/\partial t$ определяются во всех точках значения φ в момент $t + \Delta t$. При этом однородные краевые условия позволяют находить решение уравнения Пуассона в форме интеграла Фурье, распространенного по точкам сетки. Вторая схема решения отличается тем, что в ней шаг по времени t совершается не

для φ, а для ξ ($\xi \equiv \Delta\varphi$), причем $\partial\xi/\partial t = J(\eta, \varphi)$. Затем по ξ определяется φ. Для φ краевые условия неоднородны, и уравнение Пуассона $\Delta\varphi = \xi$ решается методом последовательных приближений. Сопоставляя обе схемы с точки зрения продолжительности вычислений на машинах и необходимого объема памяти, авторы отдают предпочтение второй схеме.

Вычисления проводились на электронной машине Высшего исследовательского института в Принстоне (США). Исходные данные были заданы в 19×19 точках сетки с шагом 300 *км*. Машинное время для каждого шага по t составляло 15 сек., причем 5/6 этого времени заняло решение уравнения Пуассона (13 итераций).

Указан метод численного решения системы (2) эллиптического типа для произвольного n. Исследована устойчивость разностной аппроксимации по времени.

Приводятся несколько примеров прогноза давления на 12 и 24 часа, выполненных для $n = 1$ и $n = 2$. Рассмотренные случаи характерны быстрым зарождением и перемещением глубоких минимумов $\varphi(x, y)$ — циклонов. В среднем прогнозы по схеме $n = 2$ оказались успешнее, чем с $n = 1$, особенно если срок прогноза составлял 24 часа.

В заключение авторы предлагают метод численного решения уравнения (1), рассматривая p как одну из независимых переменных. С. Л. Белоусов

4905. Метод численного прогноза с помощью комбинирования одноразмерных решений и его применение в случае баротропной модели атмосферы. Гейтс (A method of numerical forecasting by juxtaposition of one-dimensional solutions and its application to the equivalent barotropic model. Gates W. Lawrence), J. Meteorol., 1953, **10**, № 2, 149—159(англ.)

Предлагается приемлемый для ручного счета метод численного интегрирования уравнения вихря для «среднего» уровня атмосферы (см. реф. 4904, уравнение (3)). Исходя из того факта, что главная часть эволюции поля атмосферного давления связана с перемещением последнего вдоль кругов широты, автор находит целесообразным построить решение указанного уравнения для одноразмерной среды. Уравнение становится линейным и приобретает вид:

$$\partial^3 h/\partial x^2 \partial t + \beta \partial h/\partial x - (\lambda^2 + m^2)\,\partial h/\partial t = 0. \qquad (1)$$

Здесь искомая функция $h(x, t)$ — высота некоторой поверхности равного давления; начальное ее значение задано. Независимые переменные: время t и расстояние x, отсчитываемое вдоль круга широты; λ, β, m — постоянные, различные для разных кругов широты.

Решение записано в виде:

$$h(x + Ut, t) = h(x, 0) + \int_0^{2\pi} h(\alpha, 0) \cdot I(x - \alpha, t)\, d\alpha, \qquad (2)$$

где U — средняя на рассматриваемой широте скорость западно-восточного потока (вычисляется по начальному полю h); I — функция влияния:

$$I(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{int(\beta + \lambda^2 U)/n + \lambda^2 + m^2} - 1)\, e^{inx}.$$

Интеграл распространен по кругу широты, проходящему через точку, для которой дается прогноз.

Приводятся таблицы функции влияния. При вычислении последних использованы известные таблицы функции $G(x, z) = \Sigma_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cdot \sin(nx + z/n)$. Даны примеры прогноза предлагаемым методом.

Примечание референта. Позднее Берковским (РЖМех, 1955, 3792) была выполнена оценка величины эффективной области влияния в данной задаче.

С. Л. Белоусов

4906. Эксперименты по решению дифференциальных уравнений методом Монте-Карло. Тодд (Experiments in the solution of differential equations by Monte Carlo methods. Todd John), J. Wash. Acad. Sci., 1954, **44**, № 12, 377—381 (англ.)

Приводятся результаты решения методом Монте-Карло уравнения Лапласа на квадратной сетке с шагом $h = 1/16$ в квадрате $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ при граничных условиях $V(x, 1) = \sin \pi x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $V \equiv 0$ на остальных трех сторонах квадрата. Эксперименты проводились на вычислительной машине СЕАК. Случайная величина, принимающая с равной вероятностью четыре значения, имитировалась следующим вычислительным процессом: $\rho_n = 2^{-42}\nu_n$; $\nu_{n+1} = 5^{17}\nu_n \pmod{2^{42}}$, $\nu_0 = 1$. Вычислялось решение уравнения Лапласа в точках P_1 ($1/2$, $1/2$), P_2 ($3/4$, $3/4$), P_3 ($3/4$, $1/4$) и P_4 ($7/8$, $1/2$).

Так, в точке P_1 точное решение равно 0,1993, решение разностного уравнения 0,2002, решение по методу Монте-Карло 0,2014.

Проверялась формула дисперсии блужданий

$$\sigma^2(P) = \sum_Q (u(Q) - u(P))^2\, p(P, Q),$$

где $p(P, Q)$ — вероятность того, что блуждание, начатое в точке P, закончится в граничной точке Q, $u(P)$ — математическое ожидание блужданий (значение решения разностного уравнения в точке P), $u(Q)$ — граничное значение решения. Для каждой группы из 64 блужданий при вычислении решения во всех рассматриваемых точках отклонения полученных значений от решения разностного уравнения лежат в пределах $3\sigma_{64}$ ($\sigma_{64} = \sigma/8$). Установлена также аналогичная согласованность экспериментальных результатов с теоретическими выводами Вазова (Wasow W., Ann. Math. Statistics, 1951, **22**, 199) для математического ожидания $\overline{N}$ продолжительности блужданий (количества шагов) и дисперсии σ. Например, для точки P_1 $\overline{N} \approx 81$, $\sigma \approx 57$.

Рассматривается следующее видоизменение обычного метода решения уравнения Лапласа (Curtiss J. H., Sem. Sci. Comp., Internat. Business Machines Corp., 1949). Пусть имеется какое-либо приближение v^* к решению уравнения Лапласа. Тогда каждый очередной шаг блуждания осуществляется по различным направлениям с вероятностями

$$P_i = v^*(R_i)/[v^*(R_1) + v^*(R_2) + v^*(R_3) + v^*(R_4)]$$
$$(i = 1,2,3,4).$$

При перемещении в точку R_i фиксируется весовой множитель $(4P_i)^{-1}$. При достижении границы граничное значение множится на произведение всех весовых множителей. Отмечается, что возможно доказать сходимость среднего арифметического граничных значений с весовыми множителями к решению разностного уравнения, аппроксимирующего уравнение Лапласа. Причем при v^*, близких к решению разностного уравнения u, дисперсия блужданий должна быть мала. В частности, если $v^* = u$, дисперсия равна нулю.

В качестве v^* была взята функция

$$v^* = 2xy,\ 0 < x \leqslant 1/2,\ 0 < y < 1,$$
$$v^* = 2(1 - x)\, y,\ 1/2 < x < 1,\ 0 < y < 1.$$

После 2688 блужданий в точке P_1 получено значение решения, равное 0,1936. При сравнении этого значения со значением для точки P_1, полученным обычным способом, обнаруживается, что модифицированный способ в проведенном эксперименте преимущества не дал. Кроме того, обычный способ для выполнения 64 блужданий требует в среднем 20 сек. машинного времени, а модифицированный — 5 мин.

Отмечается, что при вычислениях на машине СЕАК в двумерном случае метод Монте-Карло не может кон-

курировать с обычными итерационными способами решения разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение Лапласа. Однако при переходе к большему количеству измерений этот метод может дать преимущества. Е. А. Волков

4907. Уравнение ламинарного пограничного слоя. Метод решения с помощью автоматической вычислительной машины. Ли (The laminar boundary-layer equation: a method of solution by means of an automatic computer. Leigh D. C. F.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 2, 320—332 (англ.)

Вычислительные машины применяются к решению одной задачи пограничного слоя. Уравнения

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (2)$$

решаются при граничных условиях $u=v=0$ при $y=0$ и $u\to U(x)$ при $y\to\infty$. Здесь u и v — составляющие скорости в пограничном слое и $U(x)=1-x/8$ — скорость основного потока. Производные по x в уравнениях (1) и (2) заменяются разностными отношениями. Полученная нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений решается методом последовательных приближений.

Отмечая, что предложенный Хартри и Уомерсли (Hartree D. R., Womersley J. R., Proc. Roy. Soc., 1937, **A161**, 353—366) метод последовательных приближений слишком чувствителен к начальным условиям, автор предлагает итерировать по формуле

$$w''_{m+1}-\frac{w_m}{(x_2-x_1)}w_{m+1}+\frac{w'_m}{(x_2-x_1)}\int_0^y w_{m+1}dy=$$

$$=2P-\frac{1}{(x_2-x_1)}\left\{2u_1w_m-\int_0^y 2u_1dyw'_m\right\}, \qquad (3)$$

где штрих означает дифференцирование по y, $w=u_2+u_1$, w_m и w_{m+1} — m-я и $m+1$-я итерации; $2P=\{(UdU/dx)_2+(UdU/dx)_1\}$. Решение дифференциального уравнения (3) введением конечных разностей по y сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Система решается методом Холецкого. Указана схема программирования для ЭДСАК. Приводятся и обсуждаются результаты численного решения. Отмечается хорошее совпадение решения с асимптотическим решением Голдстейна (Goldstein S., Quart. J. Math., 1948, 1 43—69) вблизи особой точки.

Р. Э. Соловейчик

4908. Дискуссия по статье Мак Науна, Сюй Еньюня и И Цзя-цуня «Применение метода сеток в гидромеханике». Борели, Сарпкая (Discussion of applications of the relaxation technique in fluid mechanics. Boreli Mladen, Sarpkaya Turgut J. M.), Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1954, 80, № 396, 3—14 (англ.)

Обсуждаемую статью см. РЖМат, 1956, 2476.

Борели указывает, что погрешность в приближенном решении, полученном методом сеток, во многих случаях определяется погрешностью разностной аппроксимации в неправильных узлах, которые возникают при переходе от крупной сетки к мелкой, у границы области и в некоторых других случаях; например, в сингулярных точках для решаемого уравнения. Предлагается новая более точная разностная аппроксимация оператора Лапласа в неправильных узлах сетки в случае осесимметрической задачи. Предлагаемая формула сравнивается с аналогичной формулой, приведенной в обсуждаемой статье, путем решения методом сеток нескольких задач, имеющих аналитическое решение.

Сарпкая предлагает применять метод сеток для решения задачи о стоячих волнах в каналах. Е. А. Волков

4909. Общий вывод уравнений Трефца и Галеркина. Альбрехт (Eine einheitliche Herleitung der Gleichungen von Trefftz und Galerkin. Albrecht Julius), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 5, 193—195 (нем.)

Приближенное решение краевой задачи для самосопряженного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка с общим граничным условием ищется в виде $w=w_0+\sum_{\mu=1}^{m}c_\mu w_\mu$ при различных выборах функций w_μ. Коэффициенты c_μ определяются из условия минимума некоторого квадратичного функционала, что приводит к решению системы линейных уравнений. Указаны условия, при которых эта система совпадает с уравнениями Трефца (Trefftz E., Math. Ann., 1928, 100, 503—521), и условия, при которых она сводится к уравнениям Галеркина. Б. П. Пугачев

4910. Гармонический анализ для нелинейных характеристик. Льюис (Harmonic analysis for nonlinear characteristics. Lewis Laurel J.), Commun. and Electronics (N. Y.), 1955, № 16, 693—700 (англ.)

Решается следующая задача, встречающаяся в современной электронике. Дана нелинейная характеристика, которая может быть представлена полиномом n-й степени вида $y=f(x)=f[\sin\theta]=g(\theta)$. Коэффициенты Фурье в разложении $g(\theta)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ в ряд Фурье суть

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}f(x)\psi_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

и

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}f(x)\varphi_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

где так называемые характеристические функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ выводятся из следующих рекуррентных формул: $\varphi_{n+1}=-2x\psi_n+\varphi_{n-1}$, $\psi_{n+1}=+2x\varphi_n+\psi_{n-1}$, причем $\varphi_0(x)=1$ и $\psi_1(x)=x$. Приводится метод численного интегрирования и графики функций $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ для $n=1, 2, 3, 4$. Рассматривается также случай, когда $f(x)$ представляет собой двухзначную функцию, как, например, при наличии кривых гистерезиса.

Указывается способ решения задачи, если $x=x_0\sin\theta$, где $x_0\neq 1$, а также и для того случая, когда x не является синусоидальной функцией от θ, как, например, случай, когда $x=\sin\theta+\sin 3\theta$. Приводится пример возможности применения сделанных выводов для интегрирования некоторых частных видов нелинейных дифференциальных уравнений. Отмечается аналогия между функциями $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ и полиномами Чебышева. М. Г. Серебренников

4911. Заметка об улучшенном планиметрическом методе гармонического анализа. Крис, Таккер (A note on an improved planimetric method of harmonic analysis. Crease J., Tucker M. J.), Brit. J. Appl. Phys., 1954, 5, № 24, 143—146 (англ.)

Описывается видоизменение метода гармонического анализа периодических функций, предложенного Даниэлсом (Daniels F., Rev. Scient. Instrum., 1952, 23, 369). Для определения коэффициента Фурье a_n заданная (графически) функция $y=f(x)$ умножается на функцию $F_n(x)$, заданную графически в виде прямоугольно-зубчатой ломаной линии, расположенной по обе стороны от оси абсцисс и состоящей из прямоугольных участков, высотою 1, попеременно симметричных относительно точек пересечения кривой с осью, причем число этих участков равно $2n$. Очевидно, это

равносильно тому, что кривая $y = f(x)$ делится на $2n$ равных вертикальных полос и при последующем интегрировании ординаты нечетных полос должны быть взяты с их знаками, а ординаты четных полос — с противоположными знаками. Интегрирование может быть выполнено следующим образом: штифтом планиметра обводят первую полосу, затем участок оси абсцисс 2-й полосы, 3-ю полосу, участок оси абсцисс 2-й полосы и т. д. до конца, затем обводят, не отрывая штифта, последнюю полосу, участок оси абсцисс предпоследней полосы и т. д. до исходного начала. Результат планиметрирования будет

$$A_n = \int_0^{2\pi} f(x) F_n(x)\, dx,$$

откуда получается значение $a_n = \frac{1}{4}\left(A_n - \frac{1}{3}A_{3n} - \frac{1}{5}A_{5n} - \ldots\right)$.

Подобное же выражение получается и для b_n. Значения A_n, A_{3n}, A_{5n}... получаются планиметрированием после наложения заготовленных шаблонов на анализируемую функцию.

Приводится несколько форм ломаных прямоугольных кривых для моделирующей функции, при применении которых исключаются некоторые слагаемые различных порядков и описываются соответствующие способы планиметрирования.

Следует отметить, что метод Даниэлса, лежащий в основе рассматриваемого метода, почти совпадает со старым методом, данным Хаустоном и Кеннели (Houston, Kennelly, Electr. World, 1898, **31**, № 4, 580).

М. Г. Серебренников

4912. Равновзвешенные квадратурные формулы для полубесконечного и бесконечного интервалов. Солзер (Equally weighted quadrature formvlas over semi-infinite and infinite intervals. Salzer Herbert E.), J. Math. and Phys., 1955, **34**, № 1, 54—63 (англ.)

Рассматриваются квадратурные формулы, подобные известной формуле Чебышева:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx \approx 1/n \sum_{i=1}^{n} f(x_i), \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx \approx \sqrt{\pi}/n \sum_{i=1}^{n} f(x_i). \qquad (2)$$

Вычислены x_i для значений $n \leqslant 10$ в предположении, что формулы точны, когда $f(x)$ есть любой многочлен степени n. Оказывается, что для $2 < n \leqslant 10$ в (1) и для $3 < n \leqslant 10$ в (2) среди значений x_i имеются комплексные. Высказывается предположение, что подобное явление имеет место и для всех $n > 10$. Для отдельных небольших значений n строятся квадратурные формулы вида (1) и (2), точные для многочленов степени $m < n$ с узлами x_i, содержащимися внутри интервала интегрирования.

А. Х. Турецкий

4913. Проблема интерполяции. Натуччи (Il problema dell'interpolazione. Natucci A.), Giorn. mat. Battaglini, 1955, **83**, № 1, 89—106 (итал.)

Излагаются хорошо известные элементарные сведения из теории интерполяции функций действительного переменного многочленом. Указываются простейшие применения интерполяции.

Дается сжатый исторический очерк развития интерполяции в трудах Кардано, Ньютона, Лагранжа.

Д. Л. Берман

4914. Решение систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка с применением механографических методов (использование электронного вычислительного перфоратора). Жанен (Résolution de systèmes d'équations algébriques linéaires d'ordre élevé, à l'aide des méthodes mécanographiques (Emploi du calculateur électronique). Janin R.), Rech. aéronaut., 1955, № 44, 47—50 (франц.)

Краткое изложение применения известного метода последовательных исключений к решению систем линейных алгебраических уравнений на электронном вычислительном перфораторе. Особенностью вычислительной схемы является то, что карты с элементами матрицы, упорядочиваются в массиве не по строкам и столбцам, а «углом», т. е. сначала идут элементы 1-го столбца и 1-й строки, затем — элементы 2-го столбца и 2-й строки, не вошедшие в первую группу, и т. д., причем симметричные члены пробиваются на одной карте.

А. П. Ершов

4915. Обращение матрицы 256-го порядка. Крон (Inverting a 256 × 256 matrix. Kron Gabriel), Engineering, 1955, **179**, № 4650, 309—312 (англ.)

Матрица специального типа, 256-го порядка, получившаяся при решении уравнения диффузии в ядерном реакторе методом сеток, была обращена на вычислительной машине с программой на перфокартах (CPC) за 16 час. машинного времени методом «секций», разработанным автором (РЖМат, 1955, 1483, 4018, 5344). Статья состоит из общих рассуждений о применимости метода «секций» и описания процедуры обращения.

А. П. Ершов

4916. Об одном методе определения собственных значений матрицы. Рутисхаузер (Une méthode pour la détermination des valeurs propers d'une matrice. Rutishauser Heinz), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 1, 34—36 (франц.)

Алгоритм деления и вычитания в прогрессивной форме (РЖМат, 1955, 5316) трактуется автором с новой точки зрения. Исходя из начальной матрицы Якоби J_0, строится последовательность матриц Якоби $J_{k+1} = R_k L_k$, где $J_k = L_k R_k$, R_k (соответственно L_k) — матрица, в которой не равны нулю только элементы главной диагонали и соседней с ней сверху (соответственно снизу) наклонной строки. При некоторых условиях (РЖМат, 1955, 5316, § 7) диагональные элементы матриц J_k будут стремиться к собственным значениям матрицы J_0.

Без доказательства приведена теорема: Если матрица A вещественна и симметрична и $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n \geqslant 0$ — ее собственные значения, то $\lim A_k = [\lambda_1 \ldots \lambda_n]$, где $A_{k+1} = R_k J_k$, $A_1 = A$, причем $A_k = L_k R_k$ — разложение матрицы A_k в произведение двух треугольных матриц такое, что матрица R_k равна транспонированной для матрицы L_k. В условиях теоремы можно указать прием, улучшающий сходимость.

В. Н. Фаддеева

4917. Определение собственных векторов матрицы методом итераций с квадратичной сходимостью. Рутисхаузер, Бауэр (Détermination des vecteurs propres d'une matrice par une méthode itérative avec convergence quadratique. Rutishauser Heinz, Bauer Friedrich L.), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 17, 1680—1681 (франц.)

Добавление к статье Рутисхаузера (реф. 4916). Дается следующий алгоритм: имея Λ_k, D_k, Σ_k ($\Lambda_1 D_1 \Sigma_1 = A$), где D_k — диагональная матрица, а Λ_k и Σ_k — нормированные треугольные (с элементами главной диагонали, равными 1), раскладываем $\Sigma_k \Lambda_k = \Lambda_k^{**} D_k^{**} \Sigma_k^{**}$, где опять Λ_k^{**} и Σ_k^{**} — нормированные треугольные и D_k^{**} — диагональная матрица, и строим $\Lambda_{k+1} = \Lambda_k (D_k \Lambda_k^{**} D_k^{-1})$, $D_{k+1} = D_k^2 D_k^{**}$, $\Sigma_{k+1} = (D_k^{-1} \Sigma_k^{**} D_k) \Sigma_k$.

Предельная матрица A_∞ треугольная, так что ее собственные векторы x_s легко определяются; $\Lambda_\infty x_s$ будут собственными векторами исходной матрицы.

П. В. Стендер

4918. Собственные значения циркулянтных матриц. **Варга** (Eigenvalues of circulant matrices. Varga Richard S.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 1, 151—160 (англ.)

Матрица n-го порядка $\| a_{ik} \|$ называется циркулянтной, если $a_{i+h,\, j-h} = a_{ij}$, где h — любое целое, а суммы и разности берутся по модулю n. Если $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — координатные орты, а R_m — преобразование: $\varepsilon_k \to \varepsilon_{m-k}$, то любая циркулянтная матрица запишется в виде $\Sigma c_m R_m$. Ее собственные значения могут быть вычислены согласно алгоритму: $b_k = \Sigma_{j=0}^{n-1} c_{j+k} c_j$, $\nu_j = \Sigma_{k=0}^{n-1} b_k \cos 2\pi kj/n$, $\lambda_j^2 = \nu_j$; $\lambda_0 = +\sqrt{\nu_0}$; $\lambda_{n/2} = +\sqrt{\nu_{n/2}}$. Для случаев симметрии $c_k = c_{n-k}$ или $c_k = -c_{n-k}$ вычисление может быть сильно упрощено (дается асимптотическая формула для λ_k).

Циркулянтные матрицы возникают при численном решении интегральных уравнений теории конформных преобразований. Для специального случая, когда отображается эллипс в круг, получается асимптотическая формула для собственных значений и оценка ошибки, получаемой от замены интегрального ядра конечной матрицей.

Ю. А. Шрейдер

4919. Заключающие интервалы для собственных значений эрмитовых матриц при итерационном процессе. **Крейсиг** (Die Einschließung von Eigenwerten hermitescher Matrizen beim Iterationsverfahren. Kreyszig E.), Z. angew. Math. and Mech., 1954, 34, № 12, 459—469 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Следуя Виландту (Wielandt H., Math. Ann., 1949, 121, 234—241), автор называет последовательность вещественных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ допустимым спектром для системы векторов $x_0, x_1, \ldots, x_s$, если существует эрмитова матрица A такая, что $Ax_0 = x_1, \ldots, Ax_{s-1} = x_s$ и $|A - \lambda E| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$. Заключающим множеством называется множество вещественных чисел, содержащее по крайней мере одно число из любого допустимого спектра. Установление возможно более тесных заключающих множеств является целью этой теории. В работе подробно развивается теория построения заключающих множеств для двухшагового процесса, при использовании системы трех векторов x_0, x_1, x_2. Результаты доведены до вычислительных схем. Разобраны числовые примеры.

В. Н. Фаддеева

4920. Использование дополнительных сведений для заключения собственных значений при итерационном процессе. **Крейсиг** (Die Ausnutzung zusätzlicher Vorkenntnisse für die Einschließung von Eigenwerten beim Iterationsverfahren. Kreyszig E.), Z. angew. Math. and Mech., 1955, 35, № 3, 89—95 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Дается теория построения заключающих интервалов (см. реф. 4919) при заранее заданных дополнительных сведениях о распределении собственных значений исследуемой эрмитовой матрицы (например, положительно определенной). Устанавливается, что при наличии таких дополнительных сведений могут быть получены при использовании одной или двух итераций лучшие заключающие интервалы, чем без использования этих сведений. Приводятся числовые примеры.

В. Н. Фаддеева

4921. Введение в линейное программирование. I. **Кастаньеда** (Introducción a la programación lineal. I. — Planteamiento. Procedimientos elementales. El método de Dantzig. Castañeda José), Rev. cienc. apl., 1954, 8, № 3, 203—217 (исп.)

Задача линейного программирования состоит в разыскании неотрицательных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, удовлетворяющих условиям: $a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \ldots + a_{in}\lambda_n = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, и таких, при которых $z = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_n\lambda_n$ имеет максимальное возможное значение (a_{ij}, b_i, c_j — данные вещественные числа).

Если в $m+1$-мерном пространстве рассмотреть выпуклый конус K, натянутый на множество точек

$$\{P_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}, c_j)\}_{j=1,\,2,\ldots,\,n},$$

т. е. совокупность точек, представимых в виде $P = \Sigma_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$, где $\lambda_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, и ось L, состоящую из точек $P = (b_1, b_2, \ldots, b_m, z)$, у которых первые m координат постоянные, а последняя — переменная, то задача линейного программирования сводится к разысканию общей точки оси L и конуса K, у которой последняя координата максимальная.

Для решения последнего вопроса применяется так называемый симплекс-метод Данцига (Dantzig), суть которого заключается в следующем. Рассматриваем точки

$$P_0' = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0),\ P_j' = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}, 0)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

и ищем представление

$$P_0' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^0 P_j', \qquad (1)$$

где λ_j^0 — неотрицательные числа, из которых лишь m $\lambda_{j_1}^0, \lambda_{j_2}^0, \ldots, \lambda_{j_m}^0$ отличны от нуля. Если такого представления нет, то исходная задача не имеет решения, так как в этом случае условия, наложенные на λ_j, несовместны.

Если представление (1) получено, то находим $z^0 = \Sigma_{k=1}^{m} \lambda_{j_k}^0 c_{j_k}$ и для каждого $j \neq j_1, j_2, \ldots, j_m$

$$P_j' = \sum_{k=1}^{m} x_{kj} P_{j_k}', \quad z_j = \sum_{k=1}^{m} x_{kj} c_{j_k},$$
$$w_j = z_j - c_j.$$

1) Если все $w_j \geqslant 0$, то

$$\lambda_j = \begin{cases} \lambda_{j_k}^0 & \text{при } j = j_1, j_2, \ldots, j_m, \\ 0 & \text{при } j \neq j_1, j_2, \ldots, j_m \end{cases}$$

— решение задачи.

2) В противном случае либо задача не имеет решения, либо после конечного числа шагов имеет место случай 1).

В реферируемой работе проводятся рассуждения лишь для $m = 2$ и указывается, что они обобщаются на случай $m > 2$.

Г. Ш. Рубинштейн

4922. Метод Ньютона для нахождения комплексных корней. **Чжао Фан-сюн** (求複數根的牛頓法. 趙訪熊), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1955, 5, № 2, 137—147 (кит.; рез. англ.)

В первой части статьи изучается проблема сходимости формулы Ньютона для нахождения комплексных корней алгебраического уравнения $f(x) = 0$ с действительными коэффициентами. Для случая корня кратности m формула последовательных приближений Ньютона видоизменяется следующим образом: $x_2 = x_1 - mf(x_1)/f'(x_1)$.

Доказывается, что последовательные приближения будут сходиться, если $h < m\delta/(2n-m)$, где $h = |x_1 - z_1|$, z_1 — корень (действительный или комплексный) кратности m, $\delta = \max|z_1 - z_k|$, z_k — корни уравнения $f(z) = 0$, n — порядок уравнения.

Во второй части статьи вводится метод для нахождения квадратичного множителя полинома с помощью известного метода деления и доказывается, что в окрестности простого недействительного корня этот метод обладает таким же свойством сходимости, как и формула Ньютона, изложенная в первой части. В конце статьи приводятся два примера, показывающие быстроту сходимости метода нахождения квадратичного множителя. Л. М. Голубева

4923. Численный метод решения нелинейных уравнений. Бандьопадхьяй (A numerical method of solving nonlinear equations. Bandyopadhyay Gaganbihari), Sci. and Culture, 1955, 20, № 9, 451—452 (англ.)

Для решения системы алгебраических уравнений высших степеней с двумя неизвестными предлагается способ, аналогичный известному способу Горнера: если, например, табличным путем найдено $x \approx p$ и $y \approx q$, то заменяют сначала x на $x + p$ и y на $y + q$ (указана схема, облегчающая такую замену для уравнений второй степени), а затем — в преобразованной системе — x на $x/10$ и y на $y/10$, после чего в полученной системе табличным путем определяют $x \approx p_1$, $y \approx q_1$ и повторяют указанный процесс. А. П. Доморяд

4924. Об уравнениях четвертой степени. Д'Эвант (Su di un problema di quarto grado. D'Evant Alessandro), Riv. mecc., 1955, 6, № 113, 39—43 (итал.)

Решение уравнения четвертой степени сводится к определению абсциссы центра окружности данного радиуса; ордината центра известна. Эта окружность должна иметь общую касательную с эллипсом, имеющим заданное уравнение. Даны также координаты точки касания. Решение получается методом последовательных приближений. Р. Д. Бачелис

4925. Градиентные методы для нахождения максимума. Кроккет, Чернов (Gradient methods of maximization. Crockett Jean Bronfenbrenner, Chernoff Herman), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 1, 33—50 (англ.)

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ имеет изолированный максимум и матрица $L = -\|\partial^2 f(c)/\partial x_i \partial x_j\|$ определенно положительна. Пусть $B = \|b_{ij}\|$ — симметрическая положительно определенная матрица и $l(x) = \operatorname{grad} f(x)$. Градиентом функции f в точке x относительно B называется вектор $\delta(x) = B^{-1}l(x)$. Рассматривается метод градиента для приближенного определения точки c. Последовательные приближения по этому методу определяются формулами $x^{(m+1)} = x^{(m)} + h_m \delta(x^{(m)})$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, где h_m — некоторые положительные числа. Исследуется асимптотическая сходимость $x^{(m)}$ к c в предположении, что $x^{(0)}$ достаточно близко к c. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n > 0$ — собственные числа матрицы $B^{-1}L$. Доказывается теорема: Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность точки c, что если $x^{(0)}$ находится в этой окрестности и $|1 - h_m\lambda_i| \leqslant 1 - \varepsilon$ для всех m и i, то $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = c$. На основе этой и других теорем даются рекомендации относительно выбора чисел h_m. Выбирая в качестве B матрицу $L(x^{(m)})$, зависящую от номера шага m, авторы получают метод последовательных приближений, определяемый формулами

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} + h_m L^{-1}(x^{(m)}) l(x^{(m)}),$$

и рассматривают вопрос об асимптотической сходимости этого метода. И. П. Мысовских

4926. Применение алгоритма деления и вычитания. Рутисхаузер (Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus. Rutishauser Heinz), Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, № 6, 496—508 (нем.)

Рассматривается применение алгоритма деления и вычитания (РЖМат, 1955, 5316) к задаче построения непрерывной дроби для функции, заданной степенным рядом, к суммированию плохо сходящихся рядов и решению алгебраических уравнений.

Практические вычисления показали, что схема алгоритма деления и вычитания (РЖМат, 1955, 5316) связана со значительной потерей точности. Для случая, когда исходные коэффициенты s_ν являются коэффициентами разложения рациональной функции, рекомендуется прогрессивная форма алгоритма деления и вычитания. В таком виде для начала алгоритма требуется предварительное вычисление начальных величин $q_\sigma^{(0)}$ и $e_\sigma^{(0)}$, что может быть сделано, например, по алгоритму Евклида в случае решения алгебраического уравнения, по алгоритму минимальных итераций Ланчиса в случае решения векового уравнения и т. д. Далее вычисления проводятся по рекуррентным формулам $q_\sigma^{(\nu+1)} = q_\sigma^{(\nu)} + e_\sigma^{(\nu)} - e_{\sigma-1}^{(\nu+1)}$, $e_\sigma^{(\nu+1)} = e_\sigma^{(\nu)} q_{\sigma+1}^{(\nu)} / q_\sigma^{(\nu+1)}$, $e_0^{(\nu+1)} = 0$. Корни уравнений находятся как пределы последовательности $q_\sigma^{(\nu)}$ при $\nu \to \infty$. Описан прием, ускоряющий сходимость рассматриваемого алгоритма.

Примечание референта. В реферате РЖМат, 1955, 5316 пропущено определение $p_i^{(\nu)}(z)$ как знаменателей подходящих дробей разложения $f_\nu(z) = \sum_{k=\nu}^{\infty} s_{k+\nu}/z^{k+1}$ в непрерывную дробь.

В. Н. Фаддеева

4927. Некоторые численные расчеты в артиллерийских задачах. Беннетт (Some numerical computations in ordnance problems. Bennett Albert A.), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, №, 1, 117—122 (англ.)

Дается краткая характеристика работы вычислительной лаборатории при Исследовательской баллистической лаборатории артиллерийских корпусов США за период с октября 1952 г. по декабрь 1953 г.

Д. Ф. Давиденко

4928. Стохастическая оценка погрешностей численных методов. Блан, Линигер (Stochastische Fehlerauswertung bei numerischen Methoden. Blanc Ch., Liniger W.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 4, 121—130 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Для сравнения между собой различных приближенных методов они причисляются к случайной функции $x(t)$, удовлетворяющей условиям $Ex(t) = 0$; $Ex(t)\,x(t') = R(t - t')$, где корреляционная функция $R(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\alpha)\, e^{ih\alpha}\, d\alpha$; в частности, полагая $s(\alpha) = \frac{1}{2}\omega$ $(|\alpha| \leqslant \omega)$, $s(\alpha) = 0$ $(|\alpha| > \omega)$, получим $R(h) = \sin \omega h / \omega h$. Чем меньше ω, тем более «регулярной» является функция $x(t)$.

1. Пусть $y = L[x(t)]$ — погрешность при вычислении $\int_{-1}^{1} x(t)\, dt$ по квадратурной формуле. Тогда дисперсия Dy $(Ey = 0)$ характеризует погрешность метода «в среднем». Из составленной таблицы видно, например, что при равном количестве узлов при малых ω формула Ньютона — Котеса выгоднее формулы Симпсона, при больших ω —, наоборот.

2. Рассмотрим уравнение $d^2x/dt^2 = f(t)$ с граничными условиями $x(0) = a$, $x(1) = b$. В предположении, что $x(t)$ — случайная функция, $y(t)$ — погрешность при применении данного метода, составлена таблица $D\overline{y}(0, 2)$, из которой, например, видно, что вероятностная оценка погрешности разностного метода с 5 узлами, основанного на формуле $x''(t) \approx [-x(t+2h) + 16x(t+h) - 30x(t) + 16x(t-h) - x(t-2h)]/12h^2$, ниже (особенно при малых ω) оценки погрешности метода, основанного на разложении $x''(t)$ в ряд Фурье по синусам (с оставлением первых трех членов). Так как второй метод требует значительно больше вычислений, автор делает вывод о «преимуществе метода разностей перед методом линейного приближения».

М. Л. Бродский

4929. **Принципы исчисления при помощи последовательностей. Кюэно** (Principes du calcul à l'aide de suites. Cuénod Michel), Bull. techn. Suisse romande, 1955, 81, № 12, 187—200; № 13, 205—213 (франц.)

Рассматриваются приближенные представления функций в виде последовательностей значений функций при равноотстоящих значениях аргумента τ, 2τ, ..., $n\tau$,..., где τ — произвольно выбранное малое положительное число. Пусть будут $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ эти значения данной функции $F(t)$. Вышеуказанная последовательность и ее соответствие данной функции записывается так:

$$F(t) \triangleq S(F) = [f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots].$$

Изучаются действия над такими последовательностями, соответствующие действиям над функциями: сложение и вычитание, простое умножение и деление, свертка для произведения и частного, запаздывание аргумента, интегрирование и дифференцирование (простые и кратные).

Рассматриваются применения таких последовательностей для приближенного интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами, дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и нелинейных дифференциальных уравнений частного вида. Приводятся примеры механики и теории электрических цепей, например цепь, содержащая индуктивность с сердечником. Метод для оценки допущенных погрешностей не приводится. Указывается аналогия между рассмотренным здесь методом и операционным исчислением. В заключение указывается значение этого метода для различных областей техники, экономических и естественных наук, а также и возможность осуществления соответствующих численных расчетов при помощи вычислительных машин. Н. А. Бразма

4930. **Решение плоских задач кручения и изгиба при помощи метода электрогидродинамических аналогий. Благовещенский, Фильчаков** (Розв'язання плоских задач кручення та згину за допомогою методу електрогідродинамічних аналогій. Благовещенський Ю. В., Фільчаков П. Ф.), Прикл. мех., 1955, 1, № 2, 195—204 (укр.; рез. русс.)

Описывается способ решения задачи Дирихле на интеграторе ЭГДА-6 (Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И., Гидротехническое строительство, 1953, № 9). Рассматриваемую область D помещают внутрь круга K и подбирают на контуре K потенциалы так, чтобы на контуре D значения потенциала были близки к заданным. По значениям потенциала на контуре K решение представляют в виде отрезка ряда Фурье — Пуассона. Для уточнения решения снова решают задачу Дирихле при значениях на контуре D, равных увеличенной в некоторое число раз невязке первого приближения. Процесс повторяют один-два раза. При бо́льшем числе приближений на контуре появляются быстро колеблющиеся функции, что вызывает технические трудности. В виде примера приведено приближенное решение задачи о кручении стержня правильного треугольного сечения. Второе приближение дает $\varphi = 256{,}00 + 0{,}99993r^3\cos 3\vartheta - 5\cdot10^{-8}r^6\cos 6\vartheta$ (точное решение $\varphi = 256 + r^3\cos 3\vartheta$). Излагается техника моделирования задач кручения на ЭГДА-6 и методика подбора потенциалов. М. Ш. Бирман

4931. **Новый способ механико-графического решения систем линейных уравнений с математической точки зрения. Клер** (Aspect mathématique d'un nouveau procédé mécanographique de résolution de systèmes d'équations linéaires. Clerc D.), Rech. aéronaut., 1955, № 44, 51—54 (франц.)

Автор сообщает, что М. Жанин (M. Janin) механизировал процесс исключения, который автор, ссылаясь на Р. Каппуса (Kappus R., L'algorithme de Gauss modernisé. Note technique O. N. E. R. A., 1953, № 11), называет модернизированным алгоритмом Гаусса. Излагается процесс исключения для одновременного решения нескольких систем с одной и той же матрицей коэффициентов при неизвестных. Указывается, что каждый шаг процесса (исключение k-й строки неизвестных, когда предыдущие уже исключены) сводится к трем элементарным операциям: 1) деление k-й строки полученной в предыдущем шаге матрицы коэффициентов на свой диагональный элемент с обратным знаком; 2) матричное умножение k-го столбца на полученную k-ю строку; 3) прибавление этого произведения к имеющейся матрице.

Прибор, сконструированный М. Жанином, реализует эти операции и позволяет прийти к системе с треугольной матрицей. При помощи тех же операций осуществляется обратный ход. В статье не сообщается принцип действия прибора и нет указаний на то, что прибор описан в литературе. Имеется много опечаток. А. И. Лавут

4932 К. **Воспроизведение случайных чисел на быстродействующих вычислительных машинах. Хуникоса** (Random number generation on the BRL high-speed computing machines. Juncosa M. L., Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground Md., Rep., 1953, № 855, 25 p.) (англ.)

Описываются процедуры, использованные Исследовательской лабораторией баллистики для выработки последовательностей случайных величин для метода Монте-Карло. Те процессы, которые используют физические явления, например, космическое излучение или результаты стрельб, были отвергнуты в пользу чисто математических программ, требующих минимального количества запоминающих ячеек для инструкций и рабочих ячеек. Указывается, что «псевдослучайные» числа, получаемые при помощи определенного алгоритма, могут быть воспроизведены снова и проверены на случайность, если это желательно.

Методы, использованные на трех больших вычислительных машинах, отличаются только в деталях и основаны на теории биномиальной конгруэнции. Начинают с некоторого исходного целого числа r_0, которое является простым по отношению к основанию b системы исчисления, используемой в машине. Затем r_{i+1} воспроизводится через соответствие $r_{i+1} \equiv k r_i \pmod{b^\beta}$, где b^β — «размер слова» машины, т. е. β — есть количество цифр в типичном числе, изображаемом в машине, и k выбирается так, чтобы сделать период r максимальным. Тогда числа $x_i = r_i b^{-\beta}$ лежат между 0 и 1 и являются псевдослучайными числами процесса. Для ОРДВАК $b = 2$, $\beta = 39$ и $k = 5^{13}$; для ЭДВАК $b = 2$, $\beta = 43$ и $k = 5^{17}$; для ЭНИАК $b = 10$, $\beta = 10$, $k = [1 + 10(4\lambda + 1)]^2$, где λ не делится

на 5. Эти выборы дают периоды длины 2^{37}, 2^{41} и $5\cdot10^8$ соответственно. В случае ОРДВАК программа требует 4 (одноадресных) инструкции и 4 запоминающие ячейки. ЭДВАК требует только одну инструкцию и 4 запоминающие ячейки. Множители k выбираются настолько большими, чтобы устранить корреляцию в величинах между последовательными значениями x-ов. Некоторые из этих последовательностей были проверены различными статистическими тестами. Они должны были с одинаковым распределением частот воспроизвести нормальное распределение. Все тесты, кажется, дали удовлетворительные результаты.

Более популярный метод «средних квадратов» воспроизведения случайных чисел был отвергнут из-за возможности вырождения последовательности в нулевую последовательность. Имеется дополнительное преимущество использованных методов по сравнению с методом среднего квадратичного, на которое мог бы указать автор, а именно — программист легко может предсказать точное значение x_n по данным x_0 и n. Таким образом, в конце программы, включающей определенное число шагов n, независимо от того, насколько велико это число, машину можно заставить отпечатать полученное значение x_n в качестве контрольного.

Используемый метод невыгоден, если требуется источник случайных целых чисел. Действительно, все r_i являются нечетными и младший разряд является причиной укорочения периода. Это может быть преодолено принятием модулей, аналогичных $b\beta\pm1$, как это предложено рецензентом в 1949 г. D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 559.

4933. Номограмма для упрощенного определения коэффициента звукопоглощения при методе звукопоглощающих покрытий. Хендлер, Венцке (Ein Nomogramm zur vereinfachten Ermittlung des Schallabsorptionsgrades nach dem Hallraumverfahren. Händler W., Venzke G.), Akust. Beihefte, 1954, № 2, 587—590 (нем.; рез. англ., франц.)

Рассматривается задача определения коэффициента звукопоглощения для различных звукоизоляционных материалов. Предлагаемая в работе номограмма из выравненных точек позволяет непосредственно определять коэффициент звукопоглощения по формуле Сабине, когда известны объем помещения, площадь поверхности, покрытой звукопоглощающим материалом, время возвращения отраженного звука (в случае наличия звукоизоляции и при ее отсутствии). Номограмма представляет формулу: $\alpha_{sab}=0{,}163V(1/T_\Delta-1/T_0)/S_p$.

Г. Е Джемс-Леви

4934. Рациональное номографирование уравнений с числом переменных от четырех до шести. Гертнер (Die zweckmäßige Darstellung von Gleichungen mit vier bis sechs Veränderlichen in Nomogrammen. Gärtner G.), Z. Vereines dtsch. Ingr., 1955, 97, № 1, 13—15 (нем.)

Для уравнений $xy=uv$ и $xyz=uvw$ показано построение номограмм, по типу принадлежащих к номограммам с ориентированным транспарантом, в которых перемещение транспаранта заменено переносом соответствующего отрезка при помощи циркуля. Номограмма первого уравнения состоит из двух сдвоенных шкал: шкалы переменных x и y и шкалы переменных u и v. Номограмма второго уравнения состоит из двух частей, каждая — из трех семейств линий, помеченных соответственно значениями переменных x,y,z и u,v,w. Утверждается (без доказательства), что такие номограммы более удобны и дают большую точность, чем обычные составные номограммы.

Приведены два примера: номограмма для определения критического числа оборотов вала постоянной жесткости по формуле $n_k=24{,}7\cdot10^6d^4/Pl^3$ и номограмма для расчета бандажей (например, в якорях электрических машин) по уравнению $GDn^2=880\cdot10^3z\delta^2\sigma$. Для первой формулы построена также составная номограмма из выравненных точек с параллельными шкалами. Работа не содержит новых результатов. М. В. Пентковский

4935. Номограмма для расчета водостоков. Зак Г. Л., Водоснабжение и сан. техника, 1955, № 4, 20—23

Приведена составная сетчатая номограмма для формулы стока

$$S=126\,H^{0,80}z\alpha^{1,2}\cdot9^{1,2n}(1+1{,}25\lg P)^{1,2}:t^{1,2n-0,1},$$

полученной на основе исследований автора. Здесь S — сток ливневых вод, H — среднегодовое количество осадков, t — время, α и n — параметры, характеризующие периодичность и количество выпадающих дождей, z — средний покровный коэффициент местности ($z=0{,}1$), P — период однократного превышения.

Для случая конкретных населенных пунктов или даже областей, когда параметры H, α и n имеют фиксированые значения, автор предлагает строить более простые сетчатые номограммы и приводит в качестве примера номограмму общей формулы стока для Башкирской АССР:

$$S=[612\,(1+0{,}875\lg P)]^{1,2}z:T^{0,806}.$$

Величины S, P, z и T представлены на номограмме семействами помеченных линий.

Статья интересна как пример удачного использования номографического метода с целью доведения до возможности практического применения новой методики расчета. Г. С. Хованский

4936. Номограммы как инженерные чертежи. Янг (Nomographs as engineering worksheets. Young Chester W.), Electr. Manufact., 1955, 55, № 1, 83—87 (англ.)

Излагаются особенности применения номограмм в инженерных расчетах. Рассмотрены различные приемы, облегчающие графировку равномерных и логарифмических шкал (трафареты, резиновые штампы, полоски логарифмической бумаги, наборы шаблонов, пантографы и др.). Приведены различные способы размножения номограмм. Для работы в поле или на заводе рекомендуется печатать номограммы на светочувствительных металлических пластинках. Приведен анализ случаев, в которых построение номограмм (с параллельными равномерными или логарифмическими шкалами) является экономически более выгодным, чем непосредственный расчет по формулам. Приведена номограмма, иллюстрирующая затраты времени на отдельные операции при аналитическом расчете по данной формуле и при изготовлении и работе с номограммой для той же формулы. Г. С. Хованский

4937. Номографическое вспомогательное средство для расчета воздуходувки. Рихтер (Nomographische Hilfsmittel für die Auslegung von Gebläsen. Richter Wilhelm), Maschinenbau und Wärmewirtschaft, 1955, 10, № 9, 261—264 (нем.)

Приводится комбинированная номограмма, оформленная в виде прибора, включающего ряд номограмм из выравненных точек и две логарифмические линейки. Прибор служит для расчета производительности воздуходувки по формулам: $Q_2=Q_1\,(D_2'/D_1)^3n_2/n_1$, $P_2=P_1\,(\gamma_2/\gamma_1)\,(D_2'/D_1)^2\,(n_2/n_1)^2$. Г. Е. Джемс-Леви

4938. Испытание систем отопления. Хендрикс (Die Prüfung von Heizungsanlagen. Hendriks I. Ch.), Sanit. Technik, 1953, 18, № 10, 285—287 (нем.)

Приводится составная сетчатая номограмма для определения величины T_i из уравнения $\dfrac{T_r-T_i}{T_i-T_a}=\dfrac{T_r'-T_i'}{T_i'-T_a}$,

где T_r и T'_r — температуры радиатора, T_a и T'_a — наружные температуры, T_i и T'_i — внутренние температуры, и составная сетчатая номограмма для определения поправки к величине T_i. Г. С. Хованский

4939 К. Прикладная математика для инженеров и физиков. Цурмюль (Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Zurmühl R. Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1953, X+481 p., 28 50 DM) (нем.)

Книга предназначена как дополнение к теоретической подготовке, даваемой обычными курсами приближенных вычислений и элементарных дифференциальных уравнений для инженеров. Автор достигает этой цели тем, что дает полное изложение численных методов, которые могут быть использованы в обычных приложениях математики к широкому разнообразию проблем в инженерных и физических науках. Текст полон числовыми примерами и иллюстрирующими чертежами. Приведен вывод большинства формул из основных принципов и дана оценка их полезности. Разумеется, автор рекомендует использовать настольные вычислительные машины при выполнении вычислений. Частичный перечень тем, которые рассматриваются, следующий.

Гл. I представляет собой руководство на восьми страницах к вычислениям с комплексными числами на настольных вычислительных машинах и на счетной линейке. В гл. II (о корнях уравнений) даются стандартные графические и итеративные методы (в том числе и метод Ньютона), применяемые для определения корней нелинейных уравнений. В частности, изложен метод Горнера, метод Греффе и метод Бродецкого (Brodetsky) и Смила (Smeal) для нахождения комплексных корней алгебраических уравнений. Дано представление критерия Рауса и Гурвица для определения числа комплексных корней в левой полуплоскости (без использования интегральной формулы Коши). В гл. III рассматривается техника решения систем линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса и методом итераций Гаусса — Зейделя. Дается метод Гессенберга для определения характеристического уравнения и собственных векторов матрицы. Объясняются итеративные способы для решения проблемы о собственных значениях.

В гл. IV рассматриваются интерполяционный полином Лагранжа в различных формах, «интерполяционный» полином Эрмита и различные удобные формулы в конечных разностях (включая разделенные разности). Кроме того, даются некоторые способы графического вычисления простых и повторных интегралов. В гл. V рассматриваются способы сглаживания и способ наименьших квадратов для обработки результатов наблюдений. Дается представление об основных методах теории вероятностей и статистики к оценке надежности прямых и непрямых измерений. В гл. VI обсуждаются приближения функций с помощью разложений в ряды Фурье (гармонический анализ), полиномы Лежандра и Чебышева и т. д. Обсуждается сглаживание данных с помощью разностей.

Гл. VII посвящена численному интегрированию задач с начальными данными для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дается большое разнообразие методов — от простого метода ломаных Эйлера до сложных вариантов метода Рунге-Кутта.

Гл. VIII, самая большая, посвящена граничным задачам и задачам о собственных значениях для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Автор излагает общую теорию предмета вместе с рассмотрением методов конечных разностей, коллокации, Релея — Ритца, итерации и других численных методов. Автора следует поблагодарить за то, что он тщательно изложил заслуживающие внимания темы широкого диапазона. E. Isaacson

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 470—471.

См. также: 4467, 4548, 4584 К, 4612, 4650, 4667 Д, 4700, 4947

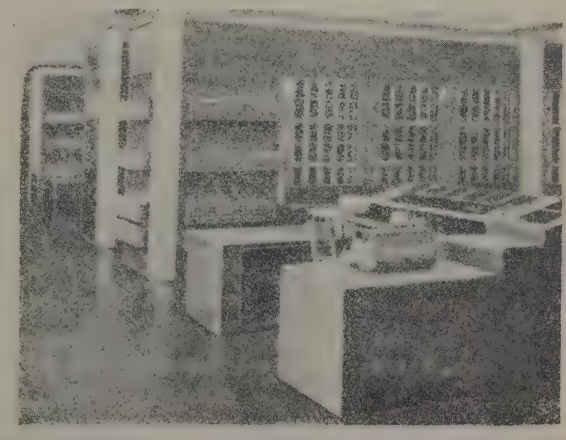
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

4940. Конторские электронные вычислительные машины. Карролл (Electronic computers for the businessman. Carroll John M.), Electronics, 1955, 28, № 6, 122—131 (англ.)

Сообщается, что в настоящее время находится в эксплуатации около 2800 электронных вычислительных машин, работающих в промышленности и деловых организациях. Общая стоимость их составляет 227 млн. долл. Около 1700 машин находятся в процессе изготовления или будут изготовлены в скором времени. Приводятся подробные таблицы данных 38 электронных вычислительных машин, особенно полезных для конторских работ (в реферате таблицы приводятся (см. стр. 134—135) в измененном и сокращенном виде; прочерки означают отсутствие данных). Л. С. Легезо

4941. ОПРЕМА — сдвоенная релейная вычислительная машина с программным управлением народной компании Карл Цейсс в Иене. Кеммерер, Кортум (Oprema, die programmgesteuerte Zwillings-Rechenanlage des VEB Carl Zeiss Jena. Kämmerer W., Kortum H.), Feingerätetechnik, 1955, 4, № 3, 103—106 (нем.)

В начале 1955 г. народной компанией Карл Цейсс в Иене (ГДР) начато строительство релейной вычислительной машины ОПРЕМА (Oprema — Optikrechenmaschine) (см. фиг.) для оптических расчетов. Предположительный срок строительства машины 7,5 месяца. В машине использованы двухпозиционные поляризованные реле, несущие на себе один



К реф. 4941

К реф. 4940

Изготовитель	Модель	Цена, долл.	Количество установленных машин	Будет выпущено машин	Разработка, год	Потребляемая мощность, *квт*	Занимаемая площадь, *м²*	Система счисления	Длина кода двоичных разрядов	Количество адресов в инструкции	Частота, *кгц*	Количество ламп
Bendix Aviation	D-12	55 000	1	3	1954	7,5	2,5	10	7	—	228	720
» »	G-15A	15 000	0	2	1955	3	0,5	2	29	2	100	400
Bull	Gamma 3	30 000	100	70	1953	3	—	10	12	1	280	400
Burroughs	UDEC	175 000	2	—	1955	32	—	2—10	10	1	125	3000
»	E-101	32 000	0	—	1955	3	1,7	10	12	1	75	160
Clevite Brush Development	Tape DRUM	20 000	—	—	1955	—	0,6	—	—	—	—	—
Electro Data	Datatron	120 000	7	—	—	19	87,5	10	11	1	142	1200
Electronics Corp. of Amer.	Magnefile	20 000	4	—	1952	1	1	10	42	4	30—50	300
Elliott Brothers	402	70 000	0	2	1955	6	3	2	32	2	333	530
Hogan Labs	Circle 1	50 000	1	—	1954	3	1,6	2	44	1	83	700
» »	Circle 2	60 000	—	1	1954	3,5	1,6	2	48	1	91	900
» »	Circle 3	70 000	—	—	—	3,5	2	2	44	1	84	1000
IBM	CPC	—	235	52	1949	10	4,2	2—10	10	2—3	55	1400
»	604	—	2100	750	1948	7	2	2—10	перем.	20—60 шагов	50	1245
»	607	—	100	160	1953	10	2,3	2—10	перем.	40—140 шагов	50	2000
»	650	—	1	400	1954	17	3,7	10	10	2	125	2218
»	702	—	1	15	1955	75	25	2—10	перем.	1	1000	5562
»	705	—	0	50	1955	87	25	2—10	перем.	1	1000	6259
Librascope	—	—	—	—	—	1	2,3	2	31	1	120	100
Logistics Research	Alwac III	60 000	2	3	1954	5	2,8	2	32	1	64	240
Marchant Research	Miniac	35 000	2	0	1953	5	1,6	2—10	10	1	300	700
Monrobot Corp.	Monrobot	85 000	4	12	1953	—	—	2—10	20	4	10	650
National Cash Register	CRC 102-D	100 000	—	—	1955	7	2,3	10	9	3	107	400
Raytheon	Raycom	—	0	1	1956	—	—	2—10	11	3	2220	2000
Remington Rand	Univac 60	75 000	100	50	1951	10	4,3	10	10	коммут.	—	1500
» »	Univac 120	95 000	100	50	1954	10	4,3	»	»	»	—	1500
» »	Univac Scientific	1 000 000	8	6	1953	45	30	2	36	2	500	4500
» »	Univac	1 000 000	15	7	1951	120	125	10	12	1	2250	5600
» »	Univac File	300 000	0	8	—	10	5	—	—	—	—	—
Technitrol Eng.	180	500 000	1	—	1955	35	—	2	45	4	1000	2500
Teleregister	—	—	2	10	1952	—	—	2	11	1	20	1500
Underwood	Elecom 125	250 000	0	1	1955	15	2,9	2—10	10	2	132	600
»	Elecom 50	—	—	—	1956	2	1,6	2—10	10	2400 шагов	66	160

контакт. Предварительные испытания показали, что реле выдерживают более десяти миллиардов срабатываний. Скорость срабатывания и отпускания реле 6 *мсек* (6 *в*, 5 *ма*). Машина оперирует с числами, представленными по системе с учетом порядков и имеющими восьмиразрядную мантиссу и порядок, меняющийся от —15 до +15. Система счисления десятичная с двоичной кодировкой (код +3).

Система программирования четырехадресная. Запоминающее устройство релейное на 32 числа. Кроме того, имеется устройство для ввода в машину 28 постоянных. Ввод данных и команд осуществляется посредством перфокарт через четыре кармана. Умножение и деление сводятся к 16 сложениям (вычитаниям), причем 8 сложений служат для образования кратных множителю (делителю). Извлечение квадратного корня осуществляется методом суммирования нечетных чисел. Машина ОПРЕМА представляет собой сдвоенную релейную вычислительную машину, причем вычисления ведутся параллельно в каждой половине. При выводе данных полученные результаты сравниваются в специальном устройстве и в случае их совпадения печатаются. В случае несовпадения выводимых результатов машина останавливается и сигнализирует об ошибке. Каждая половина машины может также работать самостоятельно, независимо от другой. Машина присоединяется к сети с применением буферной батареи. При внезапном выключении тока она выполняет очередную команду и останавливается. В дальнейшем при появлении тока вычисления продолжаются с очередной команды. Потребляемая мощность вычислительной части машины (без панели управления, входного и выходного устройства) 30 *вт*. Машина ОПРЕМА содержит 17 000 реле, 90 000 селеновых выпрямителей.

Н. Н. Поснов

4942. Коммерческая электронная вычислительная машина. **Вудс-Хилл** (A commercial electronic calculator. Woods-Hill W.), Electronic Engng, 1955, **27**, № 330, 332—337 (англ.)

Приводятся данные по английским машинам 542, 550, 555 фирмы «Бритиш Тэбьюлейтинг Машин» (The British Tabulating Machine Co., Ltd), сконструированных для составления платежных ведомостей и ведения конторских расчетов, что, однако, не исключает их применения для вычислений в других областях. Машины 550 и 555 являются модификациями модели 542. Подробнее описана машина 555, находящаяся еще в стадии производства. Она имеет последовательно-параллельный арифметический узел (числа передаются последовательно, а разряды числа параллельно),

Количество диодов	Магнитный барабан: Скорость, об/мин	Магнитный барабан: Объем, чисел	Магнитный барабан: Максимальное время выбора, мсек	Магнитные ленты: Объем, чисел	Магнитные ленты: Время выбора или скорость протяжки ленты	Другие запоминающие устройства	Время на операцию, включая время выбора, мсек: передача	+ —	×	:
2 400	4 700	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2 800	1 800	2 176	29	—	—	—	—	0,54—15	16—31	16—31
7 100	—	—	—	—	—	линии задержки 84 числа	0,68	0,85	—	—
—	3 500	5 300	17	—	—	—	0,5—17	0,7—17	60	60
1 500	3 600	100	16,7	—	—	—	33—1530	50—67	233—433	233—433
—	1 000	200 000 цифр	—	—	—	—	—	—	—	—
3 000	3 600	4 080	17	200 000	6,5 мин.	—	—	2	8,5	12
600	—	10 000	4 сек.	—	—	—	—	—	—	—
3 500	4 600	2 944	13	—	—	никел. линии 15 чисел	0,2—6,7	0,2—6,7	3,3—9,8	3,3—9,8
—	3 450	1 024	16	—	—	—	16	25	45	45
—	3 450	4 096	16	—	—	—	16	25	45	45
—	3 450	4 096	16	390 000	—	—	16	25	45	45
—	—	—	—	—	—	50 чисел на лампах	0,48	0,48	2,4—24	4,8—26,4
—	—	—	—	—	—	ламповые регистры 50 чисел	0,5	0,5	2,4—24	4,8—26,4
90	—	—	—	—	—	ламповые регистры 162 числа	0,52	0,52	2,4—23	5,1—26
3 960	12 500	1 000	4,8	—	—	—	0,67—10	0,67—10	2,2—24	6—28
9 574	—	60 000 цифр	16	—	20 *м/сек*	—	0,023	0,253	1,213	2,559
11 549	—	60 000 цифр	16	—	20 *м/сек*	на ферритах 20 000 чисел	0,017	0,119	0,799	1,818
1 000	3 600	4 096	17	—	—	—	2—19	2—19	19—36	19—36
6 000	3 500	4 096	—	—	—	—	1—9	1—9	17—25	17—25
1 400	6 000	3 840	10	—	—	—	1,6—6	1,8—6	15—26	16—28
200	3 600	100	16	—	—	—	135	135	600	600
5 000	2 400	1 024	25	115 000	160 сек.	—	9,8—84	9,8—110	17—117	17—117
—	—	—	—	34 млн.	56 000 чисел в сек.	на ферритах 2000 чисел	—	0,25	1	—
—	—	—	—	—	—	реле 10 цифр	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	" "	—	—	—	—
6 000	1 725	16 384	34	200 000	1 *м/сек*	—	0,042	0,048	0,126	0,480
18 000	—	—	—	96 000	3 мин.	рт. линии 1000 чисел	0,404	0,525	2,15	3,89
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
40 000	—	—	—	—	—	акуст. линии 1024 числа	—	0,19—1,5	2,4—3,4	2,4—3,4
50	1 200	74 000	50	—	—	—	0,1—50	—	—	—
6 000	3 600	10 000	8	—	—	акуст. линии	0,888	3,5	20	20
2 000	1 800	50	—	—	—	—	50—160	50—160	50—160	50—160

состоящий из 3 регистров по 10 десятичных разрядов в каждом, сумматора и устройства для взятия дополнения. Регистр множимого имеет устройство для удвоения, а регистр множителя — устройство для деления на 2. Машина может выполнять 4 арифметических действия с десятичными числами, десятичный сдвиг и сравнение. Кроме того, возможно умножение фунтов стерлингов, шиллингов и пенсов на десятичные числа, а также деление английских денежных единиц друг на друга и на 10. Умножение выполняется при помощи одновременного удвоения множимого, деления множителя на 2 и выдачи частичных сумм в случае, если после очередного деления множителя на 2 он получается нечетным.

Алгоритм для действий сложения, вычитания и деления является обычным для последовательных машин. Операция передачи числа выполняется как сложение числа с нулем.

Для выполнения перечисленных действий в блоке управления имеются соответствующие электронные блоки и сдвигающий регистр из 120 триггеров. Таким образом, в машине имеется 120 программных шагов. Подпоры триггеров сдвигающего регистра могут коммутироваться на панели пульта вручную для подведения к клапанам, управляющим передачей чисел между элементами арифметического узла и между арифметическим узлом и запоминающим устройством. Все подобные передачи ведутся по трем 4-проводным шинам. Две шины служат для извлечения чисел из запоминающего устройства, а третья — для помещения чисел в регистры и запоминающее устройство. При передачах числа обязательно проходят через сумматор.

Основное запоминающее устройство емкостью 100 чисел выполнено на барабане, вращающемся со скоростью 3000 об/мин. Запись чисел производится на дорожки шириной 3 *мм*, образованные намотанной на барабан проволокой из нержавеющей стали диаметром 0,1 *мм*. Между дорожками оставлены промежутки в 3 *мм*. Такая конструкция исключает взаимное влияние соседних дорожек. В качестве внешнего запоминающего устройства используются перфокарты. Чтобы не останавливать вычислений при выводе чисел на перфокарты, имеется буферное запоминающее устройство на барабане с малым временем выбора.

В машине насчитывается до 1300 ламп. Монтаж выполнен на съемных блоках. Машины содержат от 600 до 1000 блоков 30—50 различных типов. Наибольшее количество однотипных блоков достигает 100. Блоки монтируются на 6 вертикальных поворотных рамах. Каждая рама имеет свой вентилятор для охлаждения

Возможны три типа работы: автоматическая работа на частоте 14 *кгц*, автоматическая работа на частоте от 1 до 200 *гц* и ручная работа, при которой каждый импульс вызывается нажатием кнопки. На пульт машины выведены неоновые лампочки в порядке, повторяющем схему арифметического узла.

Модель 550 имеет в арифметическом узле 4 10-разрядных десятичных регистра, запоминающее устройство на 6 десятичных чисел и 36 программных шагов.

В модели 542 три регистра (14, 14 и 9 десятичных разрядов), запоминающее устройство на 5 чисел и отсутствуют все виды деления, кроме деления денежных единиц на 10. А. И. Щуров

4943. Приемные испытания вычислительной машины «Ураган» фирмы «Райтеон». Меррей (Acceptance test for Raytheon Hurricane computer. Murray F. J.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 48—52 (англ.)

Вычислительная машина «Ураган» разработана фирмой «Райтеон» (Raytheon) и установлена в Морском центре по испытанию воздушных управляемых снарядов весной 1953 г. «Ураган» — последовательная двоичная вычислительная машина, работающая по системе с фиксированной запятой. В запоминающем устройстве на 1152 числа используется 36 акустические ртутные линие задержки. В качестве дополнительного запоминающего устройства используются 4 блока магнитных лент, хранящие по 100 000 кодов каждый. Каждый код состоит из 30 разрядов и одного разряда знака. Передача информации осуществляется последовательно, а арифметические действия выполняются в параллельных регистрах. Частота следования основных тактирующих импульсов 3,77 *Мгц*. «Ураган» работает по четырехадресной системе, таким образом каждая команда содержит 2 кода. I код содержит адреса чисел, а II код — адрес результата и следующей инструкции. Приводится подробный перечень всех выполняемых машиной операций. Среднее время обращения к запоминающему устройству 125 μсек. Время на одно сложение 48 μсек, умножение 285 μсек., деление 430 μсек.

«Ураган» потребляет мощность 37 *квт*. В машине содержится 5200 ламп и 18 000 германиевых диодов. «Ураган» имеет систему встроенного контроля, который останавливает вычисления при ошибке в передаче информации или выполнении арифметических действий. При передаче каждого кода с ним вместе передаются соответствующие ему контрольные разряды, которые образуются из суммы восьмеричных разрядов основного кода. После каждой передачи кода подсчитывается его контрольный код и сверяется с переданным. Любое расхождение останавливает вычисления и указывает причину неисправности. Имеется также специальная проверка правильности выполнения арифметических действий.

Запоминающее устройство на магнитных лентах имеет 5 блоков, из которых один служит для контроля за работой остальных. На каждой ленте информация хранится на 6 параллельных дорожках. На 7-й дорожке наносятся импульсы синхронизации. Информация размещается на ленте блоками, по 32 кода в каждом блоке. С обратной стороны на ленте наносится на 5 позициях черными точками маркировка номера блока по двоичной системе. Поиск требуемого номера блока производится с помощью пяти фотоэлементов. Магнитная лента имеет ширину 12 *мм*, толщину 0,07 *мм* и длину 360 *м*. На ленте размещаются 3150 блоков информации по 32 кода в каждом блоке. Скорость чтения или записи 300 кодов в 1 сек. Плотность записи импульсов на ленту достигает 3 импульсов на 1 *мм*. Скорость перемотки ленты вперед 760 *мм/сек*, а назад при поиске нужного блока 1520 *мм/сек*. Время остановки ленты 4 *мсек*; расстояние, проходимое лентой до полной остановки, не превышает 6 *мм*.

Испытания машины делятся на ряд этапов. Во время этапа, называемого I_0, проверяется аппаратура, которая не может быть проверена специальной программой (например, схемы контроля). Во время этапа I_1 проверяется возможность работы машины в нормальных условиях в течение 5 мин. Этап II заключается в вычислении рациональной функции с числителем и знаменателем, имеющими x и y в 4-й и 3-й степени соответственно для 17728 пар значений x и y. Этот этап проверки производится в течение 5 мин. 10 сек. Этап III отводится для решения большой системы дифференциальных уравнений, соответствующей описанию траектории полета ракеты в течение 65 сек. В статье подробно рассматривается целый ряд других методов контроля, примененных в машине «Ураган». А. Б. Залкинд

4944. Надежность вычислительной машины ОАРАК. Хаус (Reliability experience on the OARAC. House Robert W.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 43—45 (англ.)

Приводится краткое описание машины ОАРАК и данные по ее эксплуатации. С сентября 1953 г. на машине начата трехсменная работа. Одна смена в сутки была отведена для технического обслуживания.

В устройствах ввода и вывода на магнитную ленту после каждого числа и перед каждым числом размещены группы контрольных разрядов, позволяющие определить неисправность на ленте или неправильную установку ленты в механизме. Кроме того, проводится контроль посредством суммирования каждых десяти выводимых на ленту чисел. Сумма записывается на следующей позиции. При вводе с магнитной ленты числа суммируются и сумма первых десяти чисел вычитается из одиннадцатого числа. Если результат не равен 0, то это означает наличие ошибки.

При поступлении чисел из запоминающего устройства и в запоминающее устройство проводится контроль по «запрещенным» комбинациям, который весьма хорошо определяет ошибку, но не помогает определять причину, вызвавшую ее.

Ряд устройств контроля имеется также в арифметическом узле. Сюда относится контроль по переполнению при суммировании и умножении, а также деление на нуль. Имеется проверка того, является ли поступающая информация числом или инструкцией. Имеется специальная команда, которая вызывает повторное выполнение программы, если оказывается, что полученный результат не найден с определенной точностью.

Маркерные импульсы, получаемые с отдельной головки барабана, считаются двумя счетчиками, любое расхождение в счете которых дает индикацию наличия ошибки. Каждый адрес содержит пять десятичных цифр, из которых две первые определяют дорожку на барабане (от 00 до 49), три следующие цифры определяют позицию кода на дорожке (от 000 до 199), таким образом имеется возможность контроля по «запрещенным» операциям.

В ОАРАК использованы главным образом лампы типа 12ВН7, имеющие гарантийный срок службы 12 000 часов, и 2С51, имеющие еще больший срок службы. А. Б. Залкинд

4945. Эксплуатационные и приемочные испытания, применяемые на вычислительной машине МИДАК. Грейни (Maintenance and acceptance tests used on the MIDAC. Graney Edward P.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 95—98 (англ.)

Описывается методика проверки правильности работы вычислительной машины МИДАК (MIDAC) как во время наладки и приемки отдельных узлов машины, так и в условиях нормальной эксплуатации. При проверке использовались следующие методы: создание

наиболее тяжелых режимов работы элементов, проведение операций с достаточно большим количеством произвольных чисел, проверка элементов машины во всех возможных состояниях, которые они могут иметь. Методы проверки видоизменялись и усложнялись по мере ввода в действие новых узлов машины. После изготовления каждый элемент машины подвергался тщательной проверке, затем проводились испытания отдельных узлов машины на одиночных приказах, набираемых с помощью переключателей, после ввода всех узлов испытания стали проводиться по специальным тестовым программам, контролирующим работу каждого узла машины. Б. И. Шитиков

4946. **Автоматическое извлечение квадратного корня.** Ленартс (Automatic square rooting. Lenaerts E. H.), Electronic Engng, 1955, **27**, № 329, 287—289 (англ.)

Описывается устройство для автоматического извлечения квадратного корня по обычному алгоритму на последовательной машине с фиксированной запятой типа ЛЕО (LEO). Этот метод очень просто реализуется в двоичной системе. Извлечение квадратного корня из 40-разрядного двоичного числа на машине ЛЕО выполняется за 6,4 мсек. (при программном извлечении — за 80 мсек.). Приводятся примеры извлечения корня из 10-разрядного двоичного числа и упрощенная блок-схема устройства. Д. Ф. Шапошников

4947. **О решении линейной системы уравнений с помощью автоматической вычислительной машины.** Рёнч (Über die Berechnung linearer Gleichungssysteme mit vollautomatischen Rechenmaschinen. Röntsch G.), Bauplanung und Bautechnik, 1955, **9**, № 2, 88—89 (нем.)

Описание вычислительной машины не приводится, дана лишь вычислительная схема, основанная на алгоритме Гаусса, называемая методом матриц Банахевича или модернизированной формой алгоритма Гаусса. В качестве примера приведено решение по этой схеме системы четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными с шестизначными коэффициентами. Неизвестные найдены с шестью десятичными знаками. Имеется библиография. Е. К. Нечаев

4948. **Некоторые любопытные свойства двоичной арифметики, полезные при испытаниях двоичных вычислительных устройств.** Бут (Some curiosities of binary arithmetic useful in testing binary computers. Booth Andrew D.), Computers and Automat., 1955, **4**, № 8, 33—42 (англ.)

Описывается методика получения двоичных эквивалентов некоторых чисел, полезных при проверке правильности работы арифметических узлов вычислительных машин. Даются формулы для нахождения двоичных эквивалентов дробей $1/(2^p \pm 1) = 2^{-p}(1 \mp 2^{-p} + 2^{-2p} \mp 2^{-3p} + \ldots)$ и квадратов $(1 - 2^{-p})^2 = 1 - 2^{-p+1} + 2^{-2p}$. Приводится таблица дробей в двоичной системе. Б. И. Шитиков

4949. **Релейная вычислительная машина для статистики. Ямасита, Оно, Сато** (Electrical statistical and computing machine using relays. Yamashita Hideo, Ono Katuzi, Satoh Ryosaku), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 5, XII—XIII (англ.)

Краткое сообщение о разработке в Японии релейных вычислительных машин для обработки статистических данных. В этих машинах первоначальные данные вводятся в релейную систему запоминания непосредственно (без предварительной пробивки на перфокартах). В сообщении указывается о предполагаемой разработке новых высокоскоростных машин. Л. Н. Дашевский

4950. **Применение комбинированных операций вместо раздельных при обработке данных в компании страхования жизни. Уайзман** («Combined» operations in a life insurance company instead of «fractured» operations. Wiseman R. T.), Computers and Automat., 1953, 2, № 9, 11—13 (англ.)

Сообщается, что на вычислительной машине УНИВАК были проведены опытные работы по обработке страховых полисов. Был разработан новый метод для обработки полисов, наиболее подходящий для электронных машин. Вместо раздельной обработки данных по каждому пункту полиса, которая применялась раньше, предложена совместная обработка сразу по всем пунктам. Вычисления проводятся по более сложным формулам. В. Д. Князев

4951. **Цифровые вычислительные машины служат для ускорения исследования. Билс** (Digital computers to speed studies. Bills Glenn W.), Electr. World, 1955, **143**, № 16, 115—116 (англ.)

Указывается, что благодаря наличию многократной взаимной связи в крупных электрических системах невозможно их точно моделировать, поэтому моделирующие устройства не дают достаточно точных результатов. Использование цифровых вычислительных машин значительно упрощает и ускоряет исследование распределения потоков мощности в электрических системах. Кратко описывается метод Данстона. Автор более легким и быстрым считает метод узлового анализа. При этом матрица полных проводимостей является симметричной.

Указывается, что при использовании цифровых вычислительных машин можно получить достаточно точные результаты при исследовании активных и реактивных потерь, падений напряжения и переходных процессов в электрических системах. При решении задачи вторым методом применялась вычислительная машина СВАК. Д. А. Абдуллаев

4952. **Математическое моделирование динамических систем. Трапезников В. А.,** Электричество, 1955, № 8, 20—26

Статья знакомит с возможностями моделирующих устройств. Сообщается, что первый электронный интегратор разработан в СССР в Энергетическом институте АН СССР в 1946 г. Указывается ряд типов электронных моделей, выпускаемых серийно Министерством машиностроения и приборостроения, а также построенных Институтом автоматики и телемеханики АН СССР. Принцип действия моделирующей установки, в которой математические величины представляются в виде напряжений, рассмотрен на примере интегрирования нелинейного дифференциального уравнения $\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^3 = A\cos\omega t$. Показаны принципиальные схемы основных решающих блоков, из которых обычно состоит электронная моделирующая вычислительная установка (масштабный блок; сумматор; интегратор и функциональный преобразователь). Описано малогабаритное настольное моделирующее устройство ЭМУ-5, разработанное в Институте автоматики и телемеханики АН СССР. Приводятся осциллограммы решенных задач на ЭМУ-5: 1) качание ротора синхронной машины при отсутствии демпфирования; 2) уравнение Матьё, имеющее большое значение при исследовании задач частотной модуляции; 3) автоколебания релейной системы автоматического регулирования с зоной нечувствительности и коэффициентом возврата, меньшим чем единица. Описывается схема совместной работы электронной модели с реальным автопилотом. Г. К. Кузьминок

4953. **Моделирующее устройство на службе фирмы «Микроламбда ди Фузаро». Пикуэ** (Una calcolatrice analogica in servizio negli stabilimenti della Microlambda di Fusaro. Piquè Paolo), Civiltà macchine 1954, 2, № 3, 69—72 (итал.)

Описывается электронное моделирующее устройство «Филбрик» (РЖМат, 1955, 6189), содержащее 14 основных узлов: сумматор на 4 входа, узел умножения на константы, 2 интегратора, 2 дифференциатора, узел умножения на 2 входа, функциональный узел, 3 узла кусочно-линейных функций, узел, выдающий абсолютную величину входа, узел возведения в квадрат и узел извлечения квадратного корня. Каждый узел снабжен ступенью обращения знака. Все узлы сделаны с применением усилителей с обратной связью на миниатюрных двойных триодах. Входные сопротивления свыше 1 *Мом* и выходные сопротивления ниже 300 *ом* обеспечивают возможность каскадного соединения узлов. Машина работает на частоте 60 *гц*. Объясняются принципы математического и физического моделирования на машине и приводятся 5 примеров применения машины к исследованию систем автоматического регулирования. Г. Н. Поваров

4954. **Электронное моделирующее устройство для вычислений в комплексной плоскости. Рагаццини, Рейнолдс** (The electronic complex plane scanner. Ragazzini John R., Reynolds Gibson), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 7, 523—527 (англ.)

Описываемое моделирующее устройство предназначается для определения функций вида:

$$F(j\omega) = \frac{k(j\omega - \lambda_{01})(j\omega - \lambda_{02}) \ldots (j\omega - \lambda_{0m})}{(j\omega - \lambda_{p1})(j\omega - \lambda_{p2}) \ldots (j\omega - \lambda_{pn})},$$

где $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \ldots, \lambda_{0n}$ и $\lambda_{p1}, \lambda_{p2}, \ldots, \lambda_{pn}$ — соответственно задаваемые нули и полюса для функции $F(j\omega)$.

Основными элементами прибора являются суммирующие усилители и логарифмирующие устройства. В качестве логарифмирующих устройств применены стандартные приборы «Логатен» модель 511.

Каждый нуль или полюс задается двумя координатами, определяющими его положение на комплексной плоскости. В соответствии с этим на моделирующем устройстве предусмотрены для задания этих координат по два потенциометра для каждого нуля или полюса. Потенциометры питаются переменными напряжениями, сдвинутыми по фазе на 90°. Частота 1500 *гц*. Для каждого нуля или полюса напряжения, заданные на потенциометрах, суммируются с помощью усилителя, а затем напряжение, соответствующее полученной сумме, логарифмируется и детектируется.

Выпрямленное напряжение, пропорциональное логарифму $(j\omega - \lambda)$, в соответствии с формулой складывается или вычитается из других подобных ему напряжений. В результате получается напряжение, пропорциональное $\log[F(j\omega)]$. Напряжение, пропорциональное $j\omega$, получают от вращающегося потенциометра, приводимого в действие от мотора. Скорость вращения соответствует 1 *гц*. Процесс периодически повторяется, и решение благодаря этому можно наблюдать на экране катодного осциллографа со средним послесвечением.

Для того чтобы можно было одновременно на той же осциллограмме наблюдать и характер фазовой характеристики, используется свойство, вытекающее из условий Коши — Римана: $d[\log|F(\sigma + j\omega)|]/d\sigma = d\varphi/d\omega$. Для получения малых отклонений $\Delta\sigma$ используется стандартный 60-периодный синхронный преобразователь.

Всего в построенной установке имеется 10 каналов, дающих возможность задать соответствующее количество нулей или полюсов. Точность порядка 5%. Основное применение — аппроксимации электрических цепей. Главное преимущество по сравнению с другими устройствами (электролитические ванны и т. п.) — это большая скорость действия и удобство наблюдения решения. Приводятся схемы суммирующего и изолирующего усилителей и детектирующая схема. Приведена фотография устройства. Н. В. Корольков

4955. **Электрическое моделирующее устройство для решения линейных уравнений и смежных задач. Митра** (Electrical analog computing machine for solving linear equations and related problems. Mitra Samarendra Kumar), Rev. Scient. Instrum., 1955, **26**, № 5, 453—457 (англ.)

Описание электрического прибора для решения системы десяти линейных алгебраических уравнений $X = AG$ с положительно определенной матрицей A по итерационной схеме Хотеллинга: $X^{(n+1)} = hG + (I - hA)X^{(n)}$, где h — числовой параметр, обеспечивающий сходимость при $h < 2/\lambda_d$, где λ_d — наибольшее собственное значение A. Прибор имеет 131 потенциометр для установки элементов матрицы A и векторов G, $X^{(n)}$ и $X^{(n+1)}$ и параметра h. Установка чисел на потенциометрах производится 4-разрядным декадным потенциометром, соединяющимся мостиковой схемой через роторные селекторы с нужным потенциометром. Цикл итерации состоит в подборе напряжений на потенциометрах $X^{(n+1)}$ и в переносе полученных значений на потенциометры $X^{(n)}$. Точность прибора $\sim 0{,}5\%$, время решения системы из 10 уравнений порядка 90 мин. А. П. Ершов

4956. **Моделирующее устройство для нелинейного преобразования координат. Фриц** (Analog computer for nonlinear coordinate transformation. Fritz Norman L.), Rev. Scient. Instrum., 1955, **26**, № 1, 23—27 (англ.)

Описан электрический прибор для нахождения значений трех функций C_i $(i = 1, 2, 3)$, представляемых квадратичными зависимостями от трех независимых переменных R, G и B, вида $C_i = a_{i1}R + a_{i2}G + a_{i3}B + a_{i4}R^2 + a_{i5}G^2 + a_{i6}B^2 + a_{i7}RG + a_{i8}GB + a_{i9}BR + a_{i10}$ (a_{ik} — постоянные). Прибор разработан для аналитической денситометрии цветной пленки. Все переменные в схеме представляются в виде напряжений с выходов линейных потенциометров, питаемых от общего источника переменного тока. Величины независимых переменных R, G, B устанавливаются по шкалам потенциометров, имеющих соответствующую градуировку. Квадраты этих величин получаются с других линейных потенциометров, которые включены каскадно с потенциометрами R, G и B и движки которых жестко связаны с движками потенциометров предыдущего каскада. Так как движки двух каскадно включенных потенциометров поворачиваются на одинаковый угол, пропорциональный, например, величине B, то напряжение, снимаемое с движка первого потенциометра, будет пропорционально B, а с движка второго — B^2. Аналогично воспроизводятся произведения независимых переменных RG, GB и BR. Значения зависимых переменных C_i находятся в результате балансировки токов в схеме. Балансировка осуществляется автоматически при помощи трех сервомеханизмов, перемещающих движки потенциометров величин C_i. Значения последних, после окончания балансировки, прочитываются по шкалам потенциометров. Постоянные коэффициенты устанавливаются как отношение величин активных сопротивлений в ветвях балансируемой схемы. Для получения членов любого знака схема имеет двойной комплект потенциометров, питаемых от напряжений, сдвинутых по фазе на 180°.

Прибор обладает систематической погрешностью, обусловливаемой искажениями, вносимыми нагрузкой потенциометров. Потенциометры выполнены 10-оборот-

ными с точностью установки шкалы 0,1%. Результирующая погрешность в определении величин C_i оценивается в 0,2 % от шкалы. Прибор настольного типа, имеет на лицевой панели шесть поворотных шкал, три из которых служат для установки независимых переменных R, G и B и три — для отсчета искомых величин C_i. Н. Н. Ленов

4957. Пятиканальный коррелятор непрерывного действия. Левин, Рейнтьес (A five-channel analog correlator. Levin M. J., Reintjes J. F.), Tele-Tech, 1953, **12**, № 3, 70—72, 120, 123, 125 (англ.)

Описание непрерывного коррелятора для вычисления взаимной корреляционной функции

$$\Phi_{AB}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_A(t)\, f_B(t+\tau)dt$$

и автокорреляционной функции

$$\Phi_{AA}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_A(t)\, f_A(t+\tau)\, dt\,.$$

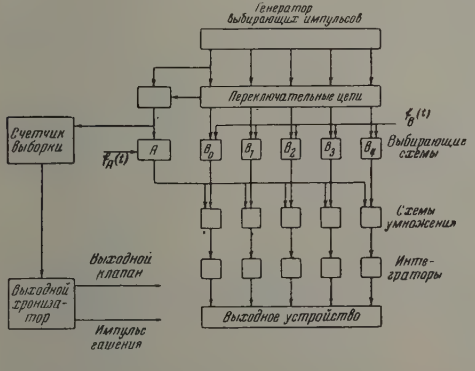
Используется аппроксимирующая формула

$$\Phi_{AB} \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\,,$$

где $a_n = f_A(t_n)$, $b_n = f_B(t_n+\tau)$.

При N порядка 10^4 точность достаточна для большинства целей. Одноканальные корреляторы, построенные раньше, определяли последовательно точки кривой $\Phi_{AB}(\tau)$ (или $\Phi_{AA}(\tau)$), отстоящие друг от друга на $\Delta\tau$. При этом непрерывные корреляторы оказались проще и быстрее. Так, одноканальный непрерывный коррелятор (Reintjes J. F., Proc. NEC., 1952, 7) содержит 60 электронных ламп и при $\Delta\tau = 1$ μсек., $N = 8\,000$ требует 10 сек. для вычисления одной точки; цифровой же одноканальный коррелятор Массачусетского технологического института содержит 400 ламп и при тех же $\Delta\tau$, N требует 20 сек. Кривая в 110 точек требует от одноканального непрерывного коррелятора 18 мин. Столь длительные расчеты ограничивают вычисление корреляционных функций случаем медленно изменяющихся временных рядов, так что эти методы не применяются, например, в радиолокации.

Описываемый прибор, названный пятиканальным коррелятором непрерывного действия, вычисляет одновременно по пять точек корреляционной функции, требуя на это 4 сек. при $\Delta\tau = 1$ μсек, $N = 8\,000$. Его можно настроить на расчет любой из 8 групп по пять точек вдоль кривой. Переключательные цепи (см. рис.)



К реф. 4957

обеспечивают пять сдвигов во времени, счетчик выборки считает N, интеграторы осуществляют сложение произведений $a_n b_n$. Величина $\Delta\tau$ задается генератором выбирающих импульсов. Диапазон частоты входных сигналов от 200 *гц* до 500 *кгц*; $\Delta\tau = 1$, 2, 4, 20, 80 или 400 μсек; $N = 4000$, 8000 или 16 000. В устройстве насчитывается (без питания) 215 ламп. Описываются элементы прибора. Они рассчитаны также на применение в 50-канальном корреляторе, но постройка последнего еще не начата.

Генератор выбирающих импульсов представляет собой кольцевой счетчик, запускаемый частотой 1 *Мгц*. Выход каждой из 5 ступеней кольца возбуждает блокинг-генератор соответствующего канала. Генератор дает выбирающий импульс в канал. Выбирающие схемы выделяют выходной сигнал шириной 0,2 μсек и хранят его в течение 5000 μсек с потерей не более 1 %. Умножение $a_n b_n$ производится в каждом B-канале посредством модуляции амплитуды прямоугольного импульса пропорционально сигналу в A-канале и модуляции ширины этого импульса пропорционально сигналу в B-канале. Площадь импульса пропорциональна произведению $a_n b_n + c$, где c — константа, вычитаемая позже. Одно умножение требует 400 μсек. Интегратор дает напряжение, пропорциональное соответствующему значению корреляционной функции. Интегрирующие RC-цепи имеют дополнительный усилитель с коэффициентом $K = 0{,}995$. Это повышает постоянную времени до $RC/(1-K) = 200$ сек., где $R = 1$ *Ом*, $C = 1$ *мф*. Выходное напряжение каждого интегратора появляется в виде вертикального смещения пятна на экране электроннолучевой трубки и может быть сфотографировано. Интеграторы соединены с отклоняющей системой трубки с помощью электронного кольцевого распределителя. Многоканальный коррелятор особенно пригоден для исследования динамических временных рядов. Приведены фотографии точек автокорреляционных функций для шума газонаполненных ламп, человеческой речи и для музыки Моцарта. Прибор построен в Массачусетском технологическом институте при поддержке военных организаций. Библ. 6 назв. Г. Н. Поваров

4958. Использование расчетного стола совместно с моделью синхронной машины. Ван-Несс (Synchronous machine analogues for use with the network analyzer. Van Ness James E.), Power Appar. and Systems, 1954, № 14, 1054—1060 (англ.)

В настоящее время большинство расчетов динамической устойчивости синхронных машин производится с помощью метода последовательных интервалов, что занимает относительно много времени. Использование для таких расчетов расчетного стола совместно с моделью синхронной машины сокращает время, потребное на один расчетный случай, до 1 ÷ 2 мин. В зависимости от требуемой степени точности расчета и необходимости учета отдельных факторов (регулирование возбуждения синхронного генератора, переходный процесс в роторе и возбудителе) меняется скелетная схема модели. Во всех расчетных случаях модель позволяет учитывать несимметрию магнитной цепи синхронной машины в продольной и поперечной осях.

Скелетная схема модели составляется на основании основных дифференциальных уравнений синхронной машины, связывающих ее электродвижущие силы в продольной и поперечной осях, отдаваемую электрическую мощность, мощность первичного двигателя и ускорение ротора. Источником напряжения является генераторная единица расчетного стола. А. А. Крюков

4959. Анализатор сетей как вычислительный прибор для улучшения устойчивости и бесперебойности работы электрических сетей (L'analizzatore di reti

come strumento di calcolo per migliorare la stabilità e la continuità del servizio delle reti elettriche), Quaderni studi e notizie, 1953, 9, № 138, 22—25 (итал.)

Обзор моделирующих устройств для исследования процессов в энергетических системах. Эти устройства делятся автором на расчетные столы постоянного и переменного тока, электрические модели для исследования переходных процессов, «микрорезо» и машины для решения дифференциальных уравнений. «Микрорезо» являются точными электромеханическими моделями электрических сетей, работающими на частоте 50 *гц* с понижением мощностей до 1 000 000 раз и обеспечивающими лучший анализ переходных процессов, чем чисто электрические модели. Дается характеристика каждого вида устройств и указывается его область применения. Подчеркивается превосходство моделирования электрических сетей перед расчетами на цифровых вычислительных машинах. Г. Н. Поваров

4960. Экспериментальная математика на службе электротехнической промышленности и возможности ее применения для исследования явлений, возникающих при производстве и распределении электрической энергии. Часть II. Гофманн, Перец (Les mathématiques expérimentales au service de l'industrie électrique et leurs possibilités d'application à l'étude des phénomènes intéressant la production et la distribution de l'énergie électrique II. Hoffmann J., Peretz R.), Bull. bimestr. Union exploit. électr. Belgique, 1954, 24, № 6, 29—46 (франц.)

Приводится пример исследования на электронном моделирующем устройстве электромеханического регулятора напряжения системы Броун-Бовери. Часть I см. РЖМат, 1955, 5374. Б. Я. Коган

4961. Ненадежность элементов в военном оборудовании. Элайасон (Component unreliability in military equipment. Eliason O. C.), Proc. Nat. Electronics Confer., vol. 8, Chicago, 1953, 258—266 (англ.).

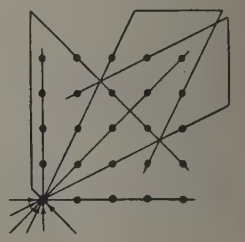
Сообщается, что в течение ряда последних лет фирмой «Белл Телефон» (Bell Telephone Laboratories) проводилась работа по систематизации неисправностей в военном радиооборудовании и по исследованию причин выхода из строя различных неламповых элементов. Выходившие из строя детали из оборудования в различных родах войск поступали в лабораторию с карточкой, на которой указывались условия эксплуатации детали, причины выхода из строя и т. д. Лаборатория подвергала детали тщательному анализу в целях дальнейшего изменения производства их в нужном направлении и изменения условий эксплуатации. Приводятся сравнительные данные о выходе из строя различных деталей. Указываются причины выхода из строя и возможные способы увеличения надежности деталей. Например, указывается, что из 400 присланных карточек 159 содержали сопротивления *r* 113 конденсаторы. Среди сопротивлений больший удельный вес занимают постоянные углеродистые сопротивления, затем потенциометры, среди конденсаторов — керамические, затем бумажные. Приводятся фото вышедших из строя деталей и карточки. Л. С. Легезо

4962. Автоматическое устройство для обнаружения причин неисправностей в вычислительных машинах. Макдоналд (Computer failures — Automatic Internal Diagnosis (AID). Macdonald Neil), Computers and Automat., 1954, 3, № 7, 6—10 (англ.)

Описывается устройство АИД (AID — Automatic Internal Diagnosis), сконструированное фирмой «Монробот» для контроля работы электронного счетчика. Модель экспонировалась на июньском собрании Ассоциации вычислительной техники в 1954 г. и демонстрировалась как устройство для внутреннего контроля вычислительной машины. А. Б. Залкинд

4963. Магнитные запоминающие устройства с многократным совпадением. Минник, Ашенхерст (Multiple coincidence magnetic storage systems. Munnick Robert C., Ashenhurst Robert L.), J. Appl. Phys., 1955, 26, № 5, 575—579 (англ.)

Основные трудности при построении матричных запоминающих устройств на сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса, когда используется совпадение двух токов (РЖМат, 1953, 2754), состоят в том, что помехи от частичного возбуждения сердечников (в данном случае от полувозбуждения) маскируют выходной сигнал матрицы, а также в том, что повторные полувозбуждения могут привести к потере информации. Можно построить матричную схему таким образом, что нужный сердечник будет выбираться совпадением не двух, а большего числа одинаковых токов. На рисунке приведена схема прокладки селектирующих проводов в матрице с шестикратным совпадением. В этом случае каждый частично возбужденный сердечник подвергается действию тока, который в 6 раз меньше перемагничивающего, тогда как в обычной матрице ток частичного возбуждения равен половине перемагничивающего. Быстродействие матриц с многократным совпадением может быть увеличено за счет того, что перемагничивающее поле может значительно превышать коэрцитивную силу материала. В связи с тем, что требования к однородности и к прямоугольности гистерезисных петель отдельных ячеек матрицы понижаются, становится возможным изготовлять матрицы из целого куска магнитного материала с отверстиями, через которые прокладываются селектирующие провода. Приводится фотография матрицы, гравированной на листе молибденового пермаллоя толщиной 25 μ.



К реф. 4963

Приводятся некоторые сведения о разработанной авторами специальной аналитической геометрии $n \times n$ решеток.

Библ. 13 назв. О. В. Росницкий

4964. Комбинированное считывание и запись на магнитном барабане. Мак-Гайган (Combined reading and writing on a magnetic drum. Mc Guigan J. H.), Proc. I. R. E., 1953, 41, № 10, 1438—1444 (англ.)

Описывается метод чтения и записи на магнитном барабане в один проход соответствующего участка барабана под головкой. В автоматической телефонной станции «Диад», в которой применен этот метод, интервал между временем, когда можно получить воспроизведенный сигнал, и временем, когда производится запись, достигает 2 *мксек*.— время, достаточное для выполнения некоторых логических операций. На магнитном барабане станции применялось покрытие с низкой коэрцитивной силой, около 75 эрстед (сплав никель — кобальт). Была достигнута плотность записи 30 импульсов на 25,4 *мм*. Частота считываемых импульсов 60 *кгц*. Работа за один проход возможна только при наличии специального усилителя, принципиальная схема которого описывается. На фото изображены схема комбинированного усилителя записи — воспроизведения и внешний вид усилителя. Л. С. Гринтауз

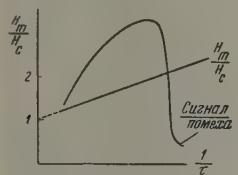
4965. Эффект интерференции в магнитных головках. Манкин (Interference effects in magnetic record-

ing heads. Mankin Arthur H.), Proc. Nat. Electronics Confer., vol. 8, Chicago, 1953, 108—112 (англ.)

Рассматриваются головки, сердечник которых набирается из отдельных пластин. Пакет в собранном виде образует замкнутый сердечник с обращенным вниз полюсным наконечником. Рабочий зазор головки образуется прокладкой из немагнитного материала между двумя группами пластин и лежит в плоскости последних. В рабочем состоянии плоскость сердечника располагается перпендикулярно направлению движения ленты. В подобных головках наблюдаются неравномерности в частотной характеристике, особенно на низких частотах. Найдено, что в системе запись —чтение неравномерности частотной характеристики возникают в основном при воспроизведении. Анализ причин, вызывающих эти неравномерности, показал, что они возникают в результате интерференции основного потока с дополнительными потоками. Дополнительные потоки обусловлены наличием малых зазоров между пластинами сердечника и краевым эффектом. Получено аналитическое выражение для частотной характеристики головки с учетом интерференции. Вычисленная частотная характеристика хорошо совпадает с экспериментальной. Для уменьшения неравномерностей частотной характеристики рекомендуется рабочий зазор головки располагать несимметрично относительно краев. Рекомендация проверялась экспериментально и дала хорошие результаты. А. И. Щуров

4966. Выбор магнитных материалов для элементов цифровых вычислительных машин. Ван-Сант (Considerations for the selection of magnetic core materials for digital computer elements. Van Sant O. J., Jr), Convent. Rec. I. R. E., 1954, 4, 109—115 (англ.)

Приведены некоторые соображения по выбору магнитных материалов и режима работы сердечников в матричном запоминающем устройстве и в регистре Ванга. В частности, для выбора амплитуды перемагничивающего тока в матрице рекомендуется пользоваться графиком (см. рис.), где приведены зависимости времени перемагничивания τ и отношения сигнала к помехе от величины перемагничивающего поля H_m, снятые для исследуемого сердечника. Оптимальный режим соответствует значению $Hm \approx 2Hc$. О. В. Росницкий



К реф. 4966

4967. Автоматическая управляющая система, снабженная устройством развертки и запоминающим устройством. Янг (An automatic control system with provision for scanning and memory. Young N. H.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, 72, part 1, 392—395 (англ.)

Описывается устройство для регулировки управляющих элементов по максимуму или минимуму величины результирующего параметра. В устройстве используется цепочка, состоящая из диода и емкости для запоминания величины потенциала. Это устройство применялось для настройки контуров передатчиков и приемников. Г. И. Смирнова

4968. Новая электроннолучевая трубка, позволяющая воспроизводить и передавать информацию со скоростью 100 000 кодов в минуту (New tube that simulates typesetting translates codes at 100.000 words per minute), Electr. Engng, 1955, 74, № 5, 446 (англ.)

Описывается новая электроннолучевая трубка с электронным переносом изображения, изготовленная фирмой RCA для высокоскоростной записи на фотопленку. Трубка может передавать кодированные сигналы со скоростью 100 000 кодов в 1 мин. Источниками кодированной информации могут быть перфоленты, магнитные ленты, радиосигналы, клавиатура и даже магнитное запоминающее устройство на барабане.

Ввод информации осуществляется от проекционного фонаря, проектирующего изображение на фотокатод, расположенный на внутренней стороне торца трубки. Фотокатод под действием света преобразует проектируемую на его поверхность информацию в электронный поток, который под действием ускоряющего напряжения, приложенного к аноду трубки, устремляется к экрану. Выбор информации в требуемом порядке производится с помощью магнитного поля отклоняющих катушек и маленького отверстия, находящегося на пути движения электронного потока. Отверстие сделано такого размера, что через него могут пройти только те электроны, которые соответствуют одной букве или цифре передаваемой информации.

Кроме того, имеется еще другая группа катушек, фокусирующая и отклоняющая луч таким образом, чтобы поместить выбранную букву или цифру в соответствующем месте экрана трубки.

Указывается, что на поверхности экрана можно разместить более 4000 двоичных цифр. Процесс выбора знаков информации и размещение их в определенных местах экрана может происходить на скоростях до 10 000 знаков в 1 сек. При испытании трубки в лаборатории с ее экрана производилась запись на стандартную 35-*мм* кинопленку со скоростью 2000 знаков в 1 сек.

Отмечается, что из-за высоких скоростей записи требуется пленка более высокой чувствительности. Новая трубка по внешнему виду напоминает осциллографическую. Длина трубки 60 *см*, диаметр экрана 8 *см*. Г. И. Танетов

4969. Новое электронное печатающее устройство (New electronic printer), Amer. Business, 1955, 25, № 2, 46 (англ.)

Сообщение фирмы «Адресограф-Мультиграф» (Addressograph-Multigraph Corp.) о новом электронном печатающем устройстве, которое воспроизводит факсимиле любой или всей информации данной карточки из общей пачки карт на деловых бланках. Воспроизведение осуществляется с помощью концентрированного луча мощного источника света. Приводимая фотография не объясняет устройства прибора. В. К. Зейденберг

4970. Обзор систем для преобразования данных. Вильямс, Клейн (Survey of integrated data-conversion systems. Williams F. K., Klein M. L.), Instruments and Automat., 1954, 27, № 9, 1460—1462 (англ.)

Анализируется развитие техники преобразования в цифровую форму данных, поступающих в виде непрерывных сигналов от измерительных датчиков. Описывается система преобразования, при которой сигналом датчика модулируется несущий высокочастотный сигнал и записывается на ленту; по мере надобности модулированный сигнал воспроизводится, демодулируется и записывается в виде графика, либо в цифровой форме. Для указанного метода характерна предварительная непрерывная запись с последующим медленным преобразованием в цифровую форму.

Второй метод преобразования данных, развивающийся в последнее время, основан на непосредственной записи в цифровой форме предварительно преобразованного сигнала датчика. В этом случае преобразование в цифровую форму производится кодирующим прибором, на который подаются кратковременные импульсы, периодически «вырезаемые» из сигнала датчика

и записываемые в цифровой форме на ленту. Применяя коммутатор, последовательно замыкающий на кодирующий прибор ряд цепей, можно одновременно кодировать ряд сигналов. В. В. Васманов

4971. Преобразователь непрерывных данных в цифровые, использующий рефлексный код. Раш (A progressive code digital quantizer. Raasch Floyd), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, 72, Part 1, 567—571 (англ.)

Указывается на целесообразность применения рефлексного двоичного кода в устройствах для преобразования непрерывной информации в цифровую. Применение этого кода позволяет уменьшить вероятность ошибок. В рефлексном коде минимальное изменение числа сопровождается изменением цифры только в одном из разрядов числа. Например, в десятичной системе наращивание цифр от 0 до 9 производится по обычной схеме, затем добавляется единица в следующем разряде и 9 остается в младшем разряде, после этого отсчет цифр в младшем разряде производится в обратном порядке с 9 до 0, снова добавляется единица в старшем разряде и порядок наращивания цифр в младшем разряде повторяется сначала. Так, 10 записывается как 19, а 19 как 10. Аналогичным образом производится запись чисел и в двоичной системе. Рассматриваются возможные варианты схем преобразователей, использующих рефлексный код. Приводится описание макета подобного устройства на три десятичных разряда. Приводится также схема преобразователя, использующего обычный двоичный код.

Б. И. Шитиков

4972. Полупроводниковые триоды и другие кристаллические вентили. Джонс (Transistors and other crystal valves. Jones D. D.), J. Telev. Soc., 1954, 7, № 5, 200—204 (англ.)

Основной особенностью плоскостных германиевых диодов с поверхностным контактом является малое прямое сопротивление (в некоторых типах, употребляемых в телевизионных приемниках, порядка 1 *ом* и менее). Плоскостные диоды с малой поверхностью контакта, обладая малым уровнем шумов и малым прямым сопротивлением, во многих случаях могут с успехом заменять диоды с точечным контактом. Основным ограничением в применении германиевых диодов является возрастание обратного тока при повышении температуры. Кремниевые плоскостные диоды с поверхностным контактом по сравнению с германиевыми имеют преимущество меньшего температурного коэффициента и весьма высокого обратного сопротивления (до 400 *в*).

Полупроводниковые плоскостные усилители по сравнению с точечно-контактными могут работать с большим к. п. д. при очень малых напряжениях источников питания. При напряжении $u_C = 0{,}1$ *в* и токе смещения 100 *мка* искажений еще не наблюдается. Типичная величина коэффициента шума 20 *дб*, хотя встречаются образцы с шумфактором 2 *дб*. Усиление по току падает с увеличением частоты. У большинства триодов α понижается на 3 *дб* от его первоначального значения на частотах от 500 *кгц* до 2 *Мгц*.

Приведены 3 возможные схемы подачи смещения на триод и кратко описаны их основные свойства. Указывается на возможность проектирования схем, выполненных одновременно на триодах *p-n-p* и *n-p-n*. Два триода, одинаковые по своим усилительным параметрам, но различающиеся по характеру образования переходных слоев (*p-n-p* и *n-p-n*), обладают дополнительной симметрией. Этот вид симметрии не распространяется на электровакуумные приборы, поскольку позитронных ламп не существует. Наличие дополнительной симметрии в кристаллических триодах позволяет значительно упрощать схемы усилителей.

Если изготовить триод, у которого эмиттер и коллектор симметричны по своим характеристикам, то их функции в схеме могут меняться в зависимости от изменения питающего напряжения. Этот простой вид симметрии позволяет широко использовать триоды в фазовых детекторах, фиксирующих схемах и других фазочувствительных устройствах. Я. Н.

4973. Полупроводниковый плоскостной триод со сплавными контактами типа *p-n-p* для усиления радиочастот. Мюллер, Панков (A *p-n-p* triode alloy junction transistor for radio-frequency amplification. Mueller C. W., Pankove J. I.), RCA Rev., 1953, 14, № 4, 586—598 (англ.)

Указывается, что параметры полупроводниковых плоскостных триодов ухудшаются с повышением частоты. Основной причиной этого являются емкость и сопротивление цепи эмиттер — основной электрод. В сплавных плоскостных триодах эти емкость и сопротивление имеют меньшую величину, поэтому сплавные триоды могут работать при более высоких частотах.

Приведена конструкция высокочастотного триода, в которой наблюдается резкое возрастание толщины пластинки германия при удалении от края перехода. Коллектор размещен внутри лунки, выбранной в пластинке германия, а эмиттер — с противоположной стороны. Площадь эмиттера составляет не более $^2/_3$ площади коллектора. Оптимальный диаметр эмиттера составляет 0,25 *мм*, а коллектора 0,37 *мм*. Исследования показали, что такие триоды могут генерировать на частотах до 75 *Мгц*. При применении нейтрализации и сопряженном согласовании можно получить усиление 39 *дб* на частоте 455 *кгц*. Без нейтрализации триод дает усиление 12 *дб* на частоте 10 *Мгц*. Коэффициент шума на частоте 1 *Мгц* составляет 4—8 *дб*. Я. Н.

4974. Шум в усилителях на полупроводниках. Кеоньян, Шаффнер (Noise in transistor amplifiers. Keonjan Edward, Schaffner Johannes S.), Proc. Nat. Electronics Conf., vol. 8, 1953, 343—345 (англ.)

Для оценки полупроводников рекомендуется брать отношение общей мощности выходного шума к ее части, возникающей из-за тепловых колебаний в сопротивлении источника. Это отношение зависит как от рабочей точки, так и от сопротивления источника питания. Приведены формулы, графики и рекомендации по выбору оптимального соотношения уровней сигнала и шума. Библ. 2 назв. А. Я. Мельничук

4975. Интеграф. Кейс (An integraph. Kays George), Math. Teacher, 1955, 48, № 3, 158—161 (англ.)

Предлагается способ графического интегрирования с помощью простейшего интеграфа, состоящего из прямоугольной пластинки и параллелограмма. Суть метода состоит в следующем: заданная графически кривая $y = F'(x)$ разбивается по оси X на равные интервалы и строится приближенно ее интегральная кривая $F(x)$. Тогда искомая площадь, заключенная между осью X, прямыми $X = a$ и $X = b$ и кривой $y = F'(x)$, определится по формуле

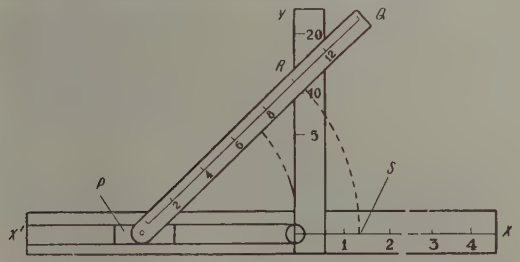
$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

$F(x)$ может быть произвольной функцией, непрерывной в рассматриваемом интервале. Точность вычислений увеличивается с уменьшением величины интервала. А. М. Егоров

4976. Механические устройства для решения квадратного и кубического уравнений. Стокс (Mechanical devices for solving quadratic and cubic equations. Stokes G. D. C.), Edinburgh Math. Notes, 1954, № 39, 10—12 (англ.)

Подробно описаны два механических устройства. Первое — для определения численного значения наименьшего по абсолютной величине действительного корня уравнения $x^2 - px + q = 0$. Другой корень и знаки корней определяются устно по теореме Виетта. Коэффициент p должен быть положительным, в противном случае уравнение преобразуется с помощью подстановки $x = -y$.

Второе — для определения численных значений действительных корней уравнения вида $x^3 + px = q$, где коэффициенты p и q — любые действительные числа, причем $q > 0$. Если $q < 0$, то уравнение преобразуется с помощью подстановки $x = -y$.



К реф. 4976

Как первое, так и второе устройства являются номограммами, в которых некоторые шкалы подвижные. Существенной частью второго устройства является подвижной прямой угол.

Приведены фото. На одном из них (см. рис.) показано решение уравнения $x^2 - 7x - 11 = 0$. Е. К. Нечаев

4977. Инвертирующий планшет для расчета в комплексной плоскости. Тиниус (Ein Inversionszeichengerät für das Rechnen in der komplexen Ebene. Thinius E.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 1/2, 66—67 (нем.)

Описывается прибор для вычерчивания инверсионных кривых по кривым обратных величин. Конструкция прибора основана на свойстве перпендикуляра, опущенного из прямого угла прямоугольного треугольника на гипотенузу. Если принять величину перпендикуляра за единицу, то основание перпендикуляра разделит гипотенузу на отрезки, величины которых будут обратно пропорциональны.

Прибор сконструирован с целью расчета в комплексной плоскости проводимости по сопротивлению (и наоборот). Недостаток инструмента заключается в том, что он не может работать при малых значениях величин, но этот недостаток можно несколько компенсировать выбором соответствующих масштабов величин. Прибором можно пользоваться в диапазоне величин от 0,4 до 2,5. Приведена фотография и кинематическая схема прибора. И. А. Ковалев

4978. Новый инструмент для быстрой обработки кривых время — перемещение, полученных на оптическом самопишущем приборе. Майер Карл (New instrument for rapid evaluation of time-displacement curves. Maier Karl W.), Rev. Scient. Instrum., 1954, 25, № 3, 207—212 (англ.)

При испытании движущихся деталей машин и, в частности, автоматического оружия для исследования движения применяется оптический самопишущий прибор. На приборе получается кривая время — перемещение, для обработки которой и применяется описываемый инструмент. На приборе нанесена координатная система с осью абсцисс, изображающей время, и осью ординат, изображающей перемещение.

Новый инструмент состоит из двух частей, скрепленных между собой: 1) измерительного приспособления для измерения расстояний, углов наклона касательной к кривой и второй производной; 2) счетной линейки для вычисления по измеренным данным величин, характеризующих движение детали: скорости, кинетической энергии, ускорения, силы, вызывающей ускорение, времени и перемещения. Приспособление для измерения состоит из рамы с вырезом в виде круга, в котором находится диск, свободно вращающийся в этом вырезе. Рама, скрепленная с корпусом счетной линейки, имеет горизонтальную основную линию; две горизонтальные дюймовые шкалы; две вертикальные дюймовые шкалы; полную круговую шкалу в градусах для измерения углов наклона кривой. Усовершенствованная счетная линейка состоит из корпуса, скрепленного с рамой и с чертежным механизмом, движка, индикатора, двигающегося в вырезах корпуса линейки. На корпусе и движке намечены необходимые шкалы.

Дается краткое описание работы инструмента. Указывается, что инструмент дает большую экономию во времени, очень прост в обращении, дешев в изготовлении. Приведено фото. Отмечается, что измерительное приспособление может быть применено и при решении некоторых других задач физики и техники.

Е. К. Нечаев

4979. Математический механизм размером с письменный стол (Matematikmaskin i skrivbordsformat), Industria (Stockholm), 1955, 51, № 3, 16—17 (швед.)

Сообщение о применении механических номограмм в производственно-технической конторе ASEA в Вестерос (Швеция). И. В. С.

4980. Сложение и вычитание при помощи счетной линейки. Камиц (La somma e la sottrazione eseguite col regolo calcolatore ordinario. Camiz V.), Ingegnere, 1955, 29, № 5, 535—537 (итал.)

Описывается процесс сложения и вычитания на счетной линейке на основании тождества $a \pm b = (\frac{a}{b} \pm 1)b$.

И. В. С.

4981. Прибор для расчета цилиндрических проволочных пружин. Еккель (Rechengerät zur Berechnung von zylindrischen Schraubenfedern. Jaekel Kurt), Draht, 1955, 6, № 2, 43—44 (нем.)

Описывается счетный диск, позволяющий по любым двум из параметров пружины указанного типа находить остальные два. Р. Д. Бачелис

4982. Электронный профессор. Кинг (Electronic professor. King Terry), Purdue Engr, 1955, 50, № 7, 60—61 (англ.)

Приводится популярное описание машины фирмы ИБМ, предназначенной для автоматической оценки экзаменующихся. Студенты получают задания с большим числом вопросов. Ответ делается специальным карандашом, имеющим грифель с большим содержанием графита. Каждый ответ заключается в прочеркивании этим карандашом определенного места на вопросной карте. Все карты сдаются в учебную часть, где перфорируются соответствующие перфокарты. Затем перфокарты обрабатываются машиной со скоростью 400 карт в 1 час. Кроме этого, машина может вычислять процент правильных ответов на любой из вопросов и определять таким образом наиболее трудные и легкие вопросы.

А. Б. Залкинд

4983. О небольших вычислительных машинах, решающих головоломки. Ингалс (About little computers that solve puzzles... Ingalls Albert G.), Scient. Amer., 1955, 192, № 3, 116—121 (англ.)

Сообщается о разработках Радло (H. Rudloe) схем-головоломок — электрических переключающих устройств для игр, решения головоломок и т. п. Они исполь-

зуют элементы цифровых вычислительных машин и построены на реле, твердых выпрямителях, механических переключателях и т. д. Первая схема имитирует игрока в известной игре, заключающейся в том, что два игрока по очереди зачеркивают одну, две или три из 13 палочек, причем зачеркнувший последнюю палочку проигрывает. Вторая схема служит для решения загадки о перевозке через реку крестьянина, волка, козла и кочана капусты. Третья и четвертая схемы посвящены другим вариантам последней загадки. Затем сообщаются сведения о построенной модели «мыши», способной найти выход из лабиринта; аналогичная модель уже была построена Шенноном. Г. Г. Меньшиков

4984. **Применение электронных вычислительных машин для последовательных экономических анализов. Шискин** (An application of electronic computers to economic time-series analysis. Shiskin Julius), Analysts J., 1955, 11, № 2, 35—37 (англ.)

Статья о возможности применения электронных вычислительных машин для определения экономического состояния страны. Основная трудность в изучении экономических условий состоит в различении сезонных и циклических экономических показателей. Эта работа намного облегчается при применении быстродействующих вычислительных машин. Указывается, что, очевидно, откроется возможность предугадывать экономические флюктуации В. И. Мараховский

4985. **Научные предвидения. Пиро** (Anticipations Piraux H.), Electro-mag., 1955, 6, № 42, 25—28 (франц.)

Описывается система, в которой выведенный из равновесия автомат сам находит решение для восстановления равновесия выбором одного из 25^4 возможных положений. С. М. Головина

4986. **Основы электронных вычислительных устройств. Фишер** (Grundlagen der elektronischen Rechengeräte. Fischer H. J.), Nachrichtentechnik, 1955, 5, № 7, 320—324 (нем.)

Приводятся общие сведения о вычислительных устройствах. Доказываются преимущества цифровых устройств. Ц. Л.

4987. **Электронный «мозг» для контор и производства** (Elektronische «Gehirne» für Büro und Betrieb), Elektron (Linz), 1955, E, № 2, 66, 70 (нем.)

Описывается применение цифровых вычислительных машин. Указывается на целесообразность применения малых электронных счетных машин для управления автоматизированной цепью обычных конторских машин. И. К. Хайлов

4988. **Электронные конторские машины. Критический обзор. Робертс, Норри** (Electronic business machines—A critical review. Roberts F., Norrie G. O.), Brit. Communs and Electronics, 1955, 2, № 7, 40—45 (англ.)

В популярной форме излагаются принципы работы электронных вычислительных машин. Кратко описываются различные виды запоминающих и выходных устройств. Л. С. Легезо

4989. **Новые машины открывают новые перспективы во всех отраслях. Фьюингс-Тейт** (New machines offer new prospects — at all levels. Fewings-Tate J. F.), Personnel Manag. Welfare and Industr. Equipm., 1955, 22, № 182, 37—39 (англ.)

Популярная статья, посвященная вычислительным машинам.

4990 К. **Проблемы развития вычислительных машин с программным управлением и интегрирующих устройств. Бюкнер, Вейль, Бирман, Цузе** (Probleme der Entwicklung programmgesteuerter Rechengeräte und Integrieranlagen. Bückner H., Weyl F. J., Biermann L., Zuse K. Technische Hochschule Aachen, Mathematisches Institut. Lehrstuhl C., Aachen, 1953, xiii + 75 pp.)

Книга содержит 4 доклада, которые были представлены на коллоквиуме в Аахене в июле 1952 г. Одной из основных задач этого совещания было обсуждение состояния развития вычислительных машин и в связи с этим конструирования машин в Германии. Первая статья (автор Бюкнер) обсуждает важнейшие детали машины, известной под названием «Интегромат», являющейся разновидностью дифференциального анализатора. Имеется менее дорогой вариант машины в Национальной физической лаборатории в Теддингтоне, Англия. Во второй статье Вейль дает обзор разработки машин в США после войны, дает сравнительные характеристики машин, находящихся сейчас в эксплуатации в США, и обсуждает некоторые из них с точки зрения их использования. Третья статья (автор Бирман) представляет собой описание новой машины Института физики Макса Планка. Рассматриваются характеристики этой машины и некоторые задачи, которые могут быть решены на ней. Последняя статья (автор Цузе) является описанием его работы по релейным машинам. Он является конструктором машины, работающей сейчас в Цюрихе. В конце книги приведена дискуссия по докладам. H. H. Goldstine

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 1, 64.

4991 К. **Счетное устройство с применением многоэлектродных разрядных трубок с холодными катодами. Кандиах** (A scaling unit employing multielectrode cold cathode tubes. Kandiah K. (Atomic Energy Research Establishment no EL/RIII2), 31 pp., diagrs., bibliog., H. M. S. O., L., 1953), Brit. Nat. Bibliogr., 1953, № 207, 9 (англ.)

См. также РЖМат, 1956, 2556.

4992 П. **Вычислительная машина** (Computer) [Standard Telephones and Cables Pty. Ltd.]. Австрал. пат. 154001, кл. 05.5, 26.11.53

Вычислительная машина содержит цепочку запоминания информаций, состоящую из статических переключателей, соединенных последовательно. Информация представляется в виде определенной комбинации рабочих и нерабочих положений переключателей. Имеется возможность сдвигать информацию вдоль запоминающей цепочки в запоминающее устройство. При помощи специальной схемы информация, поступающая с запоминающей цепочки на управляющее устройство, может быть изменена в соответствии с информацией, запасенной в запоминающем устройстве.

В. Д. Князев

4993 П. **Автоматическая вычислительная машина. Стибиц** (Automatic calculator. Stibitz George R.) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2666579, кл. 235—61.6, 19.01.54

Вычислительная машина, имеющая главное устройство для ввода чисел и команд и вспомогательное устройство для ввода чисел. Результаты вычислений подаются во вспомогательное устройство. Л. М. Шехтман

4994 П. **Вычисление и запись корреляции. Беннетт, Питерсон** (Computation and display of correlation. Bennett William R., Peterson Liss C.) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2676206, кл. 179—1, 20.04.54

Предлагается прибор для вычисления собственной функции корреляции сигнала. Прибор состоит из устройства для создания задержанного сигнала с задержкой, изменяющейся дискретно, множительного и интегрирующего устройств и устройства для записи функции корреляции на чувствительную движущуюся среду. О. К. Щербаков

4995 П. **Суммирующий кодовый перфоратор. Лун** (Totalizing key punch. Luhn Hans P.) [Inter-

national Business Machines Corp.]. Пат. США 2672286, кл. 235—61.6, 16.03.54

В устройстве цифры от 1 до 9 представляются определенными комбинациями контактов. Такие комбинации последовательно управляют механизмом перфорации. В. Д. Князев

4996 П. Блок управления для вычислительных машин. Виббард (Control circuit for calculating machines. Vibbard Edward L.) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2671611, кл. 235—61, 9.03.54

Сообщение о блоке управления для электромеханических вычислительных машин. Блок состоит из ряда реле, управляющих выполнением сложения, вычитания, умножения, деления, а также некоторых релейных регистров. Каждая группа управляющих реле выполняет арифметические действия в одном разряде регистров. Л. С. Легезо

4997 П. Запоминающее устройство. Серрелл (Combinatorial information-storage network. Serrell Robert) [Radio Corp. of America]. Пат. США 2696600, кл. 340—174, 7.12.54

Электромеханическое запоминающее устройство, состоящее из сетки, в узлах которой включены катушки индуктивности. При выборе и записи информации соответствующие линии сетки подключаются с помощью реле к источнику постоянного напряжения. Для изменения полярности сигнала на линии через вспомогательные реле может подключаться напряжение противоположной полярности. Ю. И. Кондратьева

4998 П. Устройство, запоминающее информацию. Карни, Фриц, Стэнли (Information-storing device. Carney Charles S., Fritze Edgar H., Stanley Lamont C.) [Collins Radio Co.]. Пат. США 2662944, кл. 200—46, 15.12.53

Электромеханическое устройство для ввода данных с помощью перфокарт. В. А. Зимин

4999 П. Запоминающий электрод для преобразователей. Сего, Рид (Storage electrode for signal-converting devices. Szegho Constantin S., Reed William O.) [The Rauland Corp.]. Пат. США 2667596, кл. 313—346, 26.01.54

Запоминающий электрод для преобразователей состоит из проводящей текстуры, имеющей ячеистое строение, тонкой диэлектрической пленки, покрывающей проводящую текстуру, и нанесенного на ней фоточувствительного слоя. Механизм действия не описывается. Л. В. Кутуков

5000 П. Нелинейный резонансный триггер. Спицер, Рейк (Nonlinear resonant flip-flop circuit. Spitzer Charles F., Reich Robert J.) [General Electric Co.]. Пат. США 2653254, кл. 307—88, 22.04.52

5001 П. Счетное оборудование. Рамселл, Армстронг (Counting equipment. Ramsell William H., Armstrong Emerson A.). Пат. США 2663495, кл. 235—61, 22.12.53

Группа электромеханических реверсивных счетчиков связана с рядом станций. На каждый счетчик передаются данные с любой станции с помощью наборного телефонного диска и переключателя, избирающего счетчик и вид операции (сложение или вычитание), которая должна быть произведена. Оборудование предназначено для фиксирования количества произведенной, заказанной и транспортируемой продукции каждого вида. В. К. Зейденберг

5002 П. Механизм установки вала в соответствии с двоичным кодом. Вулфсберг, Швейгхофер (Shaft positioning mechanism for binary code operation. Wulfsberg Arthur H., Schweighofer Horst M.) [Collins Radio Co.]. Пат. США 2676289, кл. 318—8, 20.04.54

Электромеханическое устройство, которое позволяет устанавливать вал в положение, соответствующее двоичному коду, поступающему на приемные реле. В. Д. Князев

5003 П. Счетчик для определения числа оборотов вала. Миллер, Басс (Counter to indicate the number of times a shaft is moved. Miller Hercheal Wood, Buss Benjamin Alvin) [American Machine and Metals, Inc.]. Пат. США 2661901, кл. 235—91, 8.12.53

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

5004. Завод-автомат (The automatic factory), Wireless World, 1955, 61, № 8, 378—380 (англ.)

Кратко сообщается о построенных в Англии устройствах для контроля и управления технологическим процессом:

1. Устройство фирмы «Эллиотт» печатает значения изменяющихся параметров технологического процесса (температуры, давления и т. п.) и дает сигнал, если эти значения не укладываются в наперед заданные пределы.

2. Цифровой интерполятор фирмы «Ферранти» для направления металлорежущего инструмента по контуру, заданному таблицей.

3. Цифровая вычислительная машина фирмы «Бритиш Тэбьюлейтинг Машин», которая на основании предварительно введенной и поступающей в процессе производства информации печатает такие сведения, как длительность производственного цикла, стоимость продукции потребность в пополнении запасов сырья и т. п.

4. Устройство, регулирующее производственный процесс на основании статистического учета отклонений параметров готовых изделий от номинала в ту и другую сторону. (Приведена блок-схема устройства).

Н. П. Брусенцов

5005. Об управляющих машинах. Брук И. С., Природа, 1955, № 5, 17—26

Популярная статья об управляющих машинах для автоматизации производственных процессов. Рассматриваются обстоятельства, выдвигающие проблему создания управляющих машин, приводятся несколько примеров возможного их применения, обращается внимание на большой экономический эффект, получаемый от их применения. Рассматриваются принципы построения управляющих машин, приводится блок-схема управляющей машины. Проводится сопоставление цифровых вычислительных и управляющих машин. Обращается особое внимание на необходимость приспособления самого изделия и технологии для перехода к автоматическому производству. Указываются ближайшие задачи, стоящие на пути развития управляющих машин, наиболее важной из которых является значительное повышение надежности их работы.

В. В. Карибский

5006. Решение задач управления с помощью моделирующих устройств. Медкефф, Маттьюс (Solving process-control problems by analog computer. Medkeff R. J., Matthews H.), Instruments and Automat., 1954, 27, № 10, 1624—1626 (англ.)

Рассматриваются различные варианты применения техники моделирования для решения задач, встречающихся в практике управления производственными процессами. Приводится пример математического моделирования механической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка, а также пример решения той же задачи методом электрического моделирования. Нелинейные зависимости типа мертвая зона, ограничение, петля гистерезиса или произвольные нелинейные зависимости воспроизводятся

методом линейно кусочной аппроксимации с помощью диодных элементов. В связи с тем, что многие процессы, подлежащие моделированию, могут длиться часами, целесообразно моделирование производить в измененном масштабе времени, чтобы, во-первых, ошибки моделирования не накапливались, и, во-вторых, чтобы исследуемые переходные процессы можно было наблюдать на экране осциллографа. Это осуществляется соответствующим изменением параметров счетно-решающих элементов моделирующей установки, выполняющих операции интегрирования или дифференцирования во времени. При моделировании процессов с запаздыванием целесообразно использование соответствующего числа цепочек *RC*, как, например, было сделано при исследовании процессов распространения тепла в пространстве. При моделировании процессов с мертвой зоной или с передаточной функцией с запаздыванием могут быть использованы электрические задерживающие линии, представляющие собой целый ряд цепочек из индуктивностей и емкостей. Может быть использован также пневмопровод, являющийся аналогом электрической линии с задержкой. Для воспроизведения задержки и переходной функции произвольной формы может быть использован метод суперпозиции (интеграл Дюамеля). В этом случае заданная переходная функция с задержкой воспроизводится методом ступенчатой аппроксимации; число делительных цепочек может достигать 40 и с каждой цепочки сигнал до суммирования может умножаться на произвольный постоянный коэффициент. Приводится пример решения задачи управления. Б. Ш. Беркович

5007. **Некоторые замечания по системам обработки информации.** Чейс (Some remarks on data handling systems. Chase R. L.), IRE Trans. Nuclear Sci., 1955, NS-2, № 1, 9—11 (англ.)

Рассмотрены три системы обработки информации, которые используются при эксплуатации атомного реактора Брукхэвнской Национальной лаборатории (Brookhaven National Laboratory).

Первая система характеризуется малым количеством (один, два) непрерывно работающих счетчиков, которые выдают большое количество информации, подлежащей дальнейшей обработке. Такова система для снятия кривых поглощения нейтронов различными материалами. Данные от спектрометра по заданной программе автоматически поступают на цифровой 90-колонный перфоратор фирмы «Ремингтон Ранд» «Модель 2». Перфокарты позже обрабатываются на цифровой вычислительной машине «Модель 409-2R» фирмы «Ремингтон Ранд». Перфокарта содержит данные о порядке дальнейшего следования информации, о показаниях счетчика при облучении и без облучения при установленном и вынутом образце, а также номер образца. Для снятия каждой кривой задается до 3000 значений скорости нейтронного пучка.

Вторая система характеризуется большим количеством счетчиков, непрерывно собирающих информацию, требующую простой дальнейшей обработки. Примером является подсчет одновременно целым рядом операторов импульсов от различных радиоактивных образцов. При автоматизации системы индивидуальные счетчики с печатающими регистрами у всех операторов заменены четырехдекадными счетчиками на десятичных газоразрядных лампах GC10B фирмы «Эрикссон». Показания всех счетчиков поочередно передаются в электрическую печатающую машинку. Управление автоматическое.

Третья система — многоканального собирания информации — иллюстрирована работой амплитудного и временного селектора нейтронных скоростей, где используются механические регистры на выходах 100 каналов. Данные с регистров списываются вручную. При увеличении количества каналов до 1000 запись показаний всех регистров не сможет быть выполнена вручную, а будет вестись автоматически на магнитный барабан достаточной емкости. Для облегчения синхронизации и согласования в скорости передачи информации предполагается использовать быстродействующее запоминающее устройство небольшой емкости на электроннолучевых трубках.

Высокая стоимость эксплуатации реакторов и ускорителей окупает сооружение специальных автоматических быстродействующих устройств для собирания и обработки информации за счет экономии машинного времени и человеческого труда. Кроме того, при этом уменьшается количество возможных ошибок. В. К. Зейденберг

5008. **Представление полетных данных с помощью электроники** (Electronic evaluation of flight data), Interavia Air Letter, 1955, № 3200, 5 (англ.)

Отделение управляемых снарядов фирмы «Локхид Эйркрафт» (Lockheed Aircraft Corp's Missiles Systems Division) разработало новую цифровую телеметрическую систему, работающую следующим образом: информация, записанная на магнитную ленту в частотно- или импульсно-модулированной форме, преобразуется в цифровую форму и набивается на перфокарты, с которых наносится на график автоматическим вычерчивателем кривых. Преимуществом такого метода является отсутствие моделирующих устройств в цепи преобразования из непрерывной формы в цифровую, что повышает точность системы.

Для преобразования на магнитной ленте вместе с информацией записывается опорная частота, которая используется в дальнейшем для синхронизации генератора импульсов. Импульсы генератора проходят через клапан и подсчитываются десятичным счетчиком. Время, в течение которого клапан открыт, определяется специальным импульсом, ширина которого является функцией частоты. Для формирования этого импульса используется отдельный счетчик, на который подается преобразуемый частотно-модулированный сигнал. Точность системы $\pm 0{,}2\%$. На график наносится до 100 точек в 1 мин. А. И. Щуров

5009. **Вычислительная машина для калькулирования стоимости электроэнергии** (Power cost computer), Instruments and Automat., 1954, 27, № 6, 842, 844 (англ.)

Сконструирована и пущена в эксплуатацию электронная вычислительная машина для калькулирования стоимости отпущенной электроэнергии, вырабатываемой на любой из станций электрообъединения. Вычислительная машина учитывает, помимо стоимости топлива, потери энергии, эксплуатационные расходы и пр. каждой из станций. А. А. Крюков

5010. **Распознавание звуков вычислительной машиной.** Бут (Recognizing spoken sounds by means of a computer. Booth Andrew D.), Computers and Automat., 1955, 4, № 2, 9, 31 (англ.)

Рассматривается метод распознавания звуков, произносимых человеком, с помощью вычислительной машины. Процесс распознавания состоит из анализа стандартных звуков и сравнения неизвестных звуков с результатами анализа. Звуки, произносимые перед микрофоном, усиливаются. Усиленное напряжение подается на фильтрующую цепь, после которой высшие гармоники выражены наиболее сильно. Далее напряжение подается на амплитудный ограничитель, с выхода которого снимаются прямоугольные импульсы различной длительности. Эти импульсы последовательно подаются на двоичный счетчик, который фиксирует число импульсов на равных интервалах времени. Практически, например, достаточно 5 интервалов и 4 двоичных цифр в каждом, чтобы охарактеризовать такие

произнесенные слова, как нуль, один, два и т. д. до девяти. Эти цифры запоминаются в вычислительной машине. Если нужно распознать неизвестный звук, то машина производит сравнение этого звука с результатами вышеописанного анализа. В. М. Тарасевич

5011 П. **Машина для печатания билетов. Адшед** (Ticket printing and issuing machine. Adshead Charles William) [Setright Registers Ltd]. Пат. США 2659300, кл. 101—69, 17.11.53

Механическая машина содержит систему шестерен и других деталей, приводимую в движение мотором. Имеется ряд кнопок для выбора необходимого типа билета. В. Б.

5012 П. **Суммирующая машина для индийской валюты. Фриберг** (Indian currency adding machine. Frieberg Nelson R.) [The National Cash Register Co.]. Пат. США 2675175, кл. 235—60. 28, 13.04.54

Машина предназначается для подсчета индийской валюты: пье, анна и рупий. В основном работа машины ничем не отличается от работы остальных суммирующих машин, работающих в десятичной системе счисления. Е. Н. Макаецов

5013 П. **Разгрузчик магазина машины для счета монет. Буххольц** (Hopper discharge for coin counting machines. Buchholz Arnold R.) [Brandt Automatic Cashier Co.]. Пат. США 2675009, кл. 133—8, 13.04.54

5014 П. **Машина для счета монет. Буххольц, Спренгер** (Coin counting machine. Buchholz Arnold R., Sprenger William H.) [Brandt Automatic Cashier Co.]. Пат. США 2675008, кл. 133—8, 13.04.54

См. также: 4305, 4906, 4907, 4914, 4915, 4930, 4932 К

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Адонц М. Т. 4564 Д
Азбелев Н. В. 4903
Альмухамедов М. И. 4478
Альпер С. Я. 4436
Андреев П. П. 4680 К
Апарисио Э. 4427
Ахмедов К. Т. 4560

Б

Барыкин М. П. 4602 Д
Березман А. М. 4829 Д
Берман С. Д. 4378
Бермант А. Ф. 4585 К
Благовещенський Ю. В. 4930
Бредихина Е. А. 4430
Бреус К. А. 4505
Брин И. А. 4586 К
Брук И. С. 5005
Булах Б. М. 4530
Бурнат М. 4669 Д

В

Важевский Т. 4492
Ван Шоу-жэнь 4674, 4675
Венков Б. А. 4879
Винокуров А. Н. 4568
Волохов А. Н. 4900
Воробьев Ю. В. 4650
Вороновская Е. В. 4902

Г

Гаврилов А. Ф. 4540
Гапонов А. В. 4472
Георгиев Г. 4584 К
Гехт Б. И. 4562
Гихман И. И. 4704 Д
Глаголев А. А. 4745 К
Гладыш С. 4662
Глазман И. М. 4510
Гласко В. Б. 4529 Д
Гонин Е. Г. 4400, 4876
Григорьева И. А. 4874
Гросберг Ю. И. 4586 К
Гудков Д. А. 4788
Гуревич Г. Б. 4380
Гущина В. М. 4558

Д

Дашниц Д. С. 4645
Депман И. Я. 4269
Джапаридзе И. С. 4760
Ђжерасимовић Б. 4289
Дидин И. Е. 4259
Дринфельд 4592 К

Е

Егоров В. Г. 4499
Еругин Н. П. 4489
Ешуков Л. Н. 4528 Д

Ж

Жак И. Е. 4425

З

Заблудовская Л. З. 4574
Зак Г. Л. 4935
Захаров Д. А. 4749 Д
Земба А. 4711
Зуховицький С. І. 4258

К

Кадец М. И. 4665 Д
Калафати П. 4470
Карцивадзе И. Н. 4578
Кованько А. С. 4428, 4429, 4431
Красовский Н. Н. 4498
Красносельский М. А. 4493
Крейн С. Г. 4493
Кропотов Л. Л. 4730
Крунчак Т. Б. 4769

Л

Леонтьев А. Ф. 4586 К
Лидский В. Б. 4507
Липин Н. В. 4396
Лохин И. Ф. 4433
Лю Мэн-хуэй 4409, 4410
Лященко Н. Я. 4495

М

Макарова Н. М. 4731, 4757
Максимов Ю. Д. 4443
Мамедов Я. Д. 4561
Маркосян С. А. 4526 Д
Мартынов А. В. 4683 Д
Марченко Л. И. 4776 К
Маслов П. П. 4256
Мацкина Р. Ю. 4414
Митриновић О. 4324
Митропольский А. К. 4702 К
Мозговая Л. И. 4778 Д
Мокрищев К. К. 4766, 4768
Морозов В. Н. 4729
Мукминов Б. Р. 4668 Д
Мыцельский Я. 4711

Н

Нагибин Ф. 4257
Наджафов К. А. 4559, 4565 Д
Назаретский В. Е. 4265 Д
Нейгауз М. Г. 4507
Некульча М. 4758
Никитин Б. Д. 4586 К
Николенко В. Н. 4464
Никулин Н. А. (ред.) 4264 К
Нилов Г. Н. 4426, 4432

О

Обморшев А. Н. 4481
Обухова В. С. 4779 Д
Оданака 4673

П

Павлюк И. А. 4524 Д
Панайоти Б. Н. 4544 Д
Пань Вэнь-си 4567
Петров А. З. 4866
Петров П. И. 4833
Петрова Н. Г. 4729
Пискунов Н. С. 4551
Пламеннов И. Я. 4406
Плоткин Б. И. 4355
Погребиський Й. Б. 4258
Полищук Е. М. 4741
Попов Б. С. 4733
Пурехов Н. М. 4729
Пшеничный Н. Н. 4776 К

Р

Репина М. И. 4776 К
Рошкулец М. Н. 4457
Рубинштейн Г. Ш. 4718 Д
Румшиский Л. З. 4586 К
Русняк И. 4245
Рыль-Нардзевский Ч. 4661

С

Сакович Г. Н. 4424
Севастьянов Б. А. 4721
Сибирский К. С. 4482
Сираждинов С. Х. 4721
Смирнов М. С. 4634 Д
Смогоржевський О. С. 4770 К
Смогоржевский А. С. 4880
Содномов Б. С. 4415
Соколов Н. П. 4340
Соловьева Т. А. 4591 К
Старжинский В. М. 4485
Старков Н. Г. 4729
Стечкин С. Б. 4423
Стрелиц Ш. 4441

Т

Томић М. 4450
Томсон М. А. 4545, 4546
Трапезников В. А. 4952
Трахтенброт Б. А. 4282
Ту Бао-юй 4330
Туран 4328

У

Узаков Г. Т. 4525 Д
Уразбаев Б. М. 4370

Ф

Файнзильбер А. М. 4596 К.
Фемпл С. 4580
Фільчаков П. Ф. 4930
Филянская Е. П. 4527 Д
Фишер А. М. 4729
Фок В. А. 4869
Фудзита 4255

Х

Хавинсон С. Я. 4442
Хара И. С. 4612
Харченко К. Я. 4728
Хасидзумэ 4678
Хинчин А. Я. 4583 К
Хуан Чун-чжи 4566

Ц

Цах Л. 4543 Д
Цвид Ф. А. 4267 Д
Цубербіллер О. М. 4744 К

Ч

Чернышенко Э. А. 4667 Д
Четаев Н. Г. 4473
Чечик В. А. 4480
Чжао Фан-сюн 4922

Ш

Шамшин М. И. 4266 Д
Шемякин Е. И. 4554

Щ

Щеглов М. П. 4606
Щербаков Р. Н. 4822

Э

Эренфойхт А. 4346
Эфендиева М. Р. 4601 Д

Я

Якубович В. А. 4508

A

Abramowitz M. 4624
Abshead C. W. 5011 П
Aitchison J. 4685
Afifi Z. 4843
Albert A. A. 4375, 4379
Albrecht J. 4909
Alexandrov A. D. 4885
Alpár L. 4318
Anders G. 4276
Ansari A. R. 4332
Aoki K. 4872
Arf C. 4369
Armstrong E. A. 5001 П
Ashenhurst R. L. 4963
Audin M. 4641

B

Backes F. 4816, 4817
Bacon H. M. 4593 К
Baer R. 4350
Bagemihl F. 4444
Bahiense Filho. N. 4775 К
Baiada E. 4420
Barnes E. S. 4294
Balser M. 4719
Banaschewski B. 4386
Bandyopadhyay G. 4923
Barker C. C. H. 4809
Barnes E. S. 4293
Barsotti I. 4805
Barthel W. 4850, 4863, 4679 К
Bartlett M. S. 4679 К
Bass J. 4542
Bauer F. L. 4917
Baumgartner L. 4746 К
Baule B. 4520 К
Beaumont R. A. 4356
Beckert H. 4533
Behnke H. 4260
Bellman R. 4465, 4466
Benedicty M. 4786
Bennett A. A. 4927
Bennett W. R. 4994 П
Bergau P. 4780 Д
Bernoulli J. 4278
Bertaut F. 4671
Bertrand P. 4783
Besicovitch A. S. 4891
Biermann L. 4990 К
Bilinski S. 4815
Bills G. W. 4951
Blackvell D. 4716 К
Blanc Ch. 4928
Blanchard A. 4857
Blanuša D. 4832
Blaschke W. 4743 К, 4771 К
Boas R. P., Jr 4449
Böhm W. 4777 Д
Bol G. 4828 К
Booth A. D. 4948, 5010
Bopp E. 4726
Boreli M. 4908
Borghi D. C. 4462, 4463
Bose R. C. 4697
Bouligand G. 4812
Brace W. S. 4252
Bradley R. A. 4692
Brauer G. 4631
Briggs W. E. 4283
Brillouet G. 4474
Brock P. 4249
Bronwell A. 4582 К
Brown J. A. C. 4685
Bruns G. 4393
Buchholz A. R. 5013 П, 5014 П
Bückner H. 4990 К
Bureau F. J. 4532
Burgess C. E. 4394
Burnengo G. 4782
Burniat P. 4806
Burr E. J. 4563
Buss B. A. 5003 П

C

Camiz V. 4980
Campbell J. G. 4461
Campbell J. T. 4263
Carafa M. 4453
Carlitz L. 4287, 4310, 4312, 4338
Carney C. S. 4998 П
Carroll J. M. 4940
Casanova G. 4811
Castañeda J. 4921
Cazenave R. 4611
Čech E. 4831
Chakravarty N. K. 4632
Chalk J. H. H. 4290
Charnes A. 4710
Charney J. G. 4904
Charrueau A. 4756
Chase R. L. 5007
Chatelet F. 4791
Chen Kien-Kwong 4609
Cheroff H. 4699, 4925
Chevalley C. 4359
Chisini O. 4795
Chowla S. 4283
Ciorănescu N. 4590 К
Clatworthy W. H. 4697
Clerc D. 4931
Clunie J. 4448
Coddington E. A. 4522 К
Cohen E. 4311
Cohn P. M. 4373
Collingwood E. F. 4446
Conforto F. 4798
Cooke K. L. 4486
Cordes H. O. 4646
Corduneanu C. 4477
Corson H. H. 4310
Cotlar M. 4644
Courant R. 4597 К
Crease J. 4911
Crockett J. B. 4925
Cuénod M. 4929

D

D'Antona G. 4845
Darling D. A. 4668
Davenport H. 4291
Dawson R. B. 4695
Dedecker P. 4851
Delachet A. 4595 К
Dempster A. P. 4799
Denjoy A. P. 4408
Detre L. 4247
D'Evant A. 4924
Dieudonné J. 4362, 4364, 4365, 4366
Dive P. 4577
Dixmier J. 4382
Dixon L. J. 4253
Dobbie J. M. 4288
Dobrescu A. 4882
Duffin R. J. 4514
Duparc H. J. A. 4315, 4316, 4323 К
Duschek A. 4747 К
Dwinger Ph. 4347
Dynkin E. B. 4381

E

Edge W. L. 4877
Egloff W. 4890
Ehrenfeucht A. 4346
Ehresmann C. 4858
Ehrhart E. 4895, 4896, 4897, 4898
Ehrmann H. 4479
Eichler M. 4270
Eliason O. C. 4961
Eltermann H. 4467
Euranto E. K. 4515

F

Fadell E. R. 4391
Fantappié L. 4335, 4870
Farah E. 4412
Farquharson R. 4709
Fekete M. 4447
Feller W. 4513
Fenyö I. 4626
Fewings — Tate J. F. 4989
Fichera G. 4664 К
Fine N. J. 4604
Finikoff S. 4825
Fischer H. J. 4986
Fisz M. 4672
Flanders H. 4840
Fleming W. H. 4713
Følner E. 4657
Franklin Ph. 4599 К
Freud G. 4581
Freudenthal H. 4360, 4361
Frieberg N. R. 5012 П
Fritz N. L. 4956
Fritze E. H. 4998 П
Fuchs L. 4273, 4348
Fullerton R. E. 4642
Funk P. 4633 К
Furuya S. 4487

G

Galafassi V. E. 4787
Galo D. 4708
Gärtner G. 4934
Gates W. L. 4905
Gatteschi L. 4615
Gherardelli F. 4798
Ghizzetti A. 4600 К
Ghoshal S. C. 4322 К
Gillies A. W. 4547
Girshick M. A. 4716 К
Gładysz S. 4662
Glicksberg I. 4714
Goddard L. S. 4790
Godeaux L. 4792, 4796, 4797, 4818, 4819
Golomb M. 4461
Gomory R. E. 4491
Gonçalves J. V. 4575
González M. O. 4627
Górski J. 4536
Grabiel F. 4570
Graney E. P. 4945
Graves L. M. 4649
Greenspan D. 4767
Groot J. de 4387
Grosjean C. C. 4635, 4636
Grotemeyer K. P. 4861

H

Haack W. 4772 К
Hadwiger H. 4888, 4894
Hajós G. 4246
Halanay A. 4500
Hale J. K. 4503
Hammer P. C. 4725
Hamza A. 4435
Händler W. 4933
Hanke W. 4761
Harish-Chandra 4655, 4656
Hartman P. 4496, 4538
Hartung M. L. 4250
Hasenjaeger G. 4260
Heemert A. van 4881
Hendriks I. C. 4938
Henrici P. 4579
Hermann R. 4835
Herrmann L. 4748 К
Herstein I. N. 4367
Herz C. S. 4630
Higley H. G. 4722

Hillman A. P. 4298
Hines J. 4629
Hodge W. V. D. 4800
Hodges J. H. 4338
Hochrainer A. 4747 К
Hochschild G. 4374
Hoeffding W. 4670
Hoffmann J. 4960
Hölder E. 4852
Honda K. 4342
Horn A. 4638
Hornfeck B. 4285
House R. W. 4944
Hsiung Chuan-Chin 4892
Huhn P. 4523 Д
Hukuhara M. 4557

I

Igusa Jun-ichi 4853
Ikeda M. 4377
Ikeda N. 4688
Ingalls A. G. 4983
Inokuma T. 4390
Inzinger R. 4849
Ionescu D. V. 4572
Isbell J. R. 4707
Itô N. 4341, 4349, 4357
Iwasaki A. 4555
Izumi S. 4421

J

Jackson S. B. 4767
Jacobsthal E. 4738
Jaeger A. 4384, 4385
Jaekel K. 4981
Janin R. 4914
Johnson L. O. 4773 К
Jones D. D. 4972
Juncosa M. L. 4932 К

K

Kadison R. V. 4654
Kakar A. G. 4334
Kalling R. 4254
Kämmerer W. 4941
Kampé de Fériet J. 4676
Kandiah K. 4991 К
Kaprekar D. R. 4321 К
Karlin S. 4715
Karzel H. 4878
Kawaguchi A. 4848
Kays G. 4975
Keller O.-H. 4723
Keonjan E. 4974
Kepr B. 4271
King T. 4982
Kinukawa M. 4419
Klee V. L. Jr 4640
Kleene S. C. 4279, 4280
Klein A. E. 4251
Klein J. 4753
Klein M. L. 4970
Klingenberg W. 4339, 4759, 4802
Kneser M. 4404
Knobloch H.-W. 4325
Kobayashi S. 4856
Koch K. 4460 Д
Kodaira K. 4855
Kolodner I. I. 4550
König B. 4603
König H. 4663
Kopřiva J. 4284
Korevaar J. 4608
Kortum H. 4941
Krames J. 4750
Krasner M. 4368
Kreyszig E. 4919, 4920
Krishna S. 4826
Kron G. 4915
Krysicki W. 4701
Krzyżański M. 4531
Ku Y. H. 4475, 4548
Kuhn H. W. 4717 К
Kuiper N. H. 4862
Künzi H. P. 4451
Kuratowski K. 4272, 4399 К
Kurepa G. 4317
Kurita M. 4834
Kuroda T. 4452
Kynch G. J. 4589 К

L

Lacombe D. 4281
Lang S. 4808
Lange O. 4689
Lauffer R. 4734
Laugwitz D. 4899
Laurikainen K. V. 4515
Lazard M. 4363
Lanczos C. 4512
Leader S. 4659
Legendre R. 4628 К
Legrain-Pissard 4801
Legrand G. 4842
Lehrer Y. 4569
Leichtweiss K. 4724, 4893
Leigh D. C. F. 4907
Lenaerts E. H. 4946
Lenoir M. 4865
Levin J. J. 4506
Levin M. J. 4957
Levinson N. 4506, 4522 К
Lewis D. C. 4502, 4504, 4509
Lewis L. J. 4910
Lieberman G. J. 4699
Libermann P. 4841
Lillo J. C. 4476
Liniger W. 4928
Livingston A. E. 4613
Locher-Ernst L. 4739
Loeve M. M. 4681 К
Lohwater A. J. 4440, 4445
Loonstra F. 4351
Lorenz P. 4703 К
Luce R. D. 4705
Luhn H. P. 4995 П
Luzin N. N. 4588 К

M

Macdonald N. 4962
McGuigan J. H. 4964
MacNerney J. S. 4660
Magnus K. 4494
Majumdar K. N. 4693
Maier K. W. 4978
Makar R. H. 4434, 4435
Mankin A. H. 4965
Mardešić S. 4398
Markus L. 4497
Marmion A. 4735, 4736
Marstrand J. M. 4403
Martić L. 4297
Matthews H. 5006
Mazur S. 4607
Medkeff R. J. 5006
Meijer C. S. 4617, 4618
Menger K. 4407
Merwe J. H. van der 4517
Meschkowski H. 4439
Meyer B. 4625
Miles E. P. 4537
Miller H. W. 5003 П
Miller J. C. P. 4305
Miller K. S. 4519 К
Mills W. H. 4706
Minnick R. C. 4963
Minorsky N. 4483
Mirsky L. 4331
Mishra S. D. 4295
Mitchell L. H. 4637
Mitra S. K. 4955
Mitrinovitch D. S. 4484
Miyamoto T. 4873
Möller K. 4304
Mordell L. J. 4306
Morelock J. C. 4793
Morley R. K. 4573
Moser J. 4518
Mostow G. D. 4358
Moy Sh. Ch. 4677
Mueller C. W. 4973
Mulert G. 4755 Д
Murnaghan F. D. 4329
Murray F. J. 4519 К, 4943
Mycielski J. 4395, 4711

N

Nádeník Z. 4827
Nagami K. 4388, 4389, 4392
Nakayama T. 4372
Nassif M. 4434
Natucci A. 4913
Neuber H. 4752
Neyman J. 4261
Nikaidô H. 4658
Nitsche J. 4887
Nörlund N. E. 4623
Norrie G. O. 4988
Nyström E. J. 4813

O

Obi C. 4501
Ohmann D. 4886
Ono K. 4949
Oppenheim A. 4294
Orlicz W. 4607
Osima M. 4345

P

Paechter G. F. 4397
Pajares Diaz E. 4751
Palamà G. 4616
Palman D. 4794
Pankove J. I. 4973
Papapetrou A. 4867, 4868
Papoulis A. 4605
Patterson E. McW. 4854
Payne L. E. 4541
Philips N. A. 4904
Phillips R. S. 4643
Penrose R. 4333
Peremans W. 4316
Peretz R. 4960
Perry N. C. 4793
Peterson L. C. 4994 П
Peterson R. P. 4356
Petrescu St. 4838, 4839
Petrich G. 4774 К
Pickert G. 4830
Pinl M. 4844
Piquè P. 4953
Piranian G. 4440
Piraux H. 4985
Pírko Z. 4883
Popovici C. P. 4320
Pöschl T. 4471
Pozzolo—Ferraris G. 4740
Primrose E. J. F. 4785

R

Raasch F. 4971
Ragazzini J. R. 4954
Raisbeck G. 4418
Rajagopal C. T. 4610
Ramsell W. H. 5001 П
Read C. B. 4251
Reed W. O. 4999 П
Reeve W. D. 4248
Reich R. J. 5000 П
Reintjes J. F. 4957
Reissig R. 4549
Rényi A. 4682 К
Reulos R. 4727
Reynolds G. 4954
Richter W. 4937
Riesz M. 4613
Roberts F. 4988
Robinson R. M. 4437
Rogers K. 4301
Romberg W. 4516
Röntsch G. 4947
Rosenlicht M. 4371
Roth L. 4860
Rothe E. H. 4648
Roy J. 4691
Roy P. M. 4694
Rudin W. 4440
Rusu E. 4319
Rutishauser H. 4916, 4917, 4926
Ryll-Nardzewski C. 4661

S

Sagan H. 4633 К
Salem R. 4416
Salié H. 4286
Salini U. 4821
Salzer H. E. 4912
Sarpkaya T. J. M. 4908
Satô M. 4422
Satô T. 4535, 4555
Satoh R. 4949
Sauer R. 4810
Sce M. 4458

Schaefer H. 4647
Schaffner J. S. 4974
Scherk P. 4871
Schick K. 4901
Schincke E. 4552
Schinzel A. 4303
Schmidt J. 4393
Schmidt O. 4737
Schmitz G. 4901
Schröder J. 4511
Schubert H. 4552
Schuff K. 4844
Schuster S. 4799
Schwarz H. R. 4490
Schweighofer H. M. 5002 II
Seidel W. 4444
Seiden E. 4690
Seifert G. 4476
Segre B. 4807
Seguchi T. 4688
Selig F. 4633 К
Selmer E. S. 4784
Serre J.-P. 4454
Serrell R. 4997 II
Servranckx R. 4468
Severi F. 4803
Shah S. M. 4332
Shenitzer A. 4353
Shimrat M. 4875
Shiskin J. 4984
Shü S. S. 4407
Sierpinski W. 4742 К
Silverman R. A. 4719
Singh V. 4614
Skolem Th. 4302
Skornyakov L. A. 4884 К
Skorpik V. 4814
Slater L. J. 4619, 4620, 4621, 4622
Sobolev S. L. 4539
Spencer D. C. 4456
Spezia Clotilda (sister) 4762
Spiess O. 4277
Spitzer C. F. 5000 II
Sprenger W. H. 5014 II
Springer T. A. 4337
Sprott D. A. 4696
Srinivasan T. P. 4401
Srivastava P. 4296
Stanley L. C. 4998 II
Stender R. 4262
Stibitz G. R. 4993 II
Stoker D. J. 4687
Stokes G. D. C. 4976
Subba Rao K. 4314
Surányi J. 4327
Swift G. 4402
Swinnerton-Dyer H. P. F. 4291
Synge J. L. 4754 К
Szász P. 4763, 4764, 4765
Szegho C. S. 4999 II
Sztyepanov V. V. 4521 К
Szegö G. 4447
Sz.-Nagy G. 4889

T

Takesada T. 4556
Takeuti G. 4413
Taucer G. 4846
Taussky O. 4299
Teicher H. 4326
Thinius E. 4977
Thoma E. 4639
Thompson H. R. 4720
Todd J. 4906
Tomita M. 4653
Tomonaga Y. 4859
Tonnelat M.-A. 4864
Toscano L. 4732
Tóth E. 4411
Trost E. 4274
Tsuji M. 4534
Tsuzuku T. 4292
Tucker A. W. 4717 К
Tucker M. J. 4911

U

Umezawa T. 4455

V

Vandiver H. S. 4300, 4307, 4308, 4309
Vanhuyse V. J. 4636
Van Ness J. E. 4958
Van Sant O. J., Jr 4966
Varga R. S. 4918
Vartak M. N. 4698
Venzke G. 4933
Vesentini E. 4804
Vibbard E. L. 4996 II
Vidav I. 4651
Viguier G. 4469
Vikraman V. 4405
Villa M. 4789
Vincensini P. 4824
Vrănceanu G. 4837
Vries H. de 4387
Vučkić M. 4268
Vyčichlo F. 4820

W

Walsh J. L. 4438
Ward M. 4313
Ważewski T. 4492
Weber 4576
Wegel H. 4417 Д
Weiner L. M. 4571
Weir A. J. 4352
Welter C. P. 4712
Westrich F. 4594 К
Wever F. 4356
Weyl F. J. 4990 К
Wiegmann N. A. 4336
Wiezòrke B. 4700
Will H. 4459 Д
Williams E. 4537
Williams F. K. 4970
Williamson J. H. 4652
Willmore T. J. 4847
Wintner A. 4496, 4538
Wiseman R. T. 4950
Wladaver I. 4773 К
Wolfowitz J. 4684
Woods-Hill W. 4942
Woollett M. F. C. 4305
Wooyenaka Y. 4383
Wright E. M. 4488
Wilfsberg A. H. 5002 II
Wylie C. R., Jr 4598 К

Y

Yamashita H. 4949
Yano K. 4836
Yoshii T. 4376, 4377
Young C. W. 4936
Young N. H. 4967

Z

Zacher G. 4343, 4344
Zeller K. 4666 Д
Zeuli T. 4553
Zieba A. 4711
Zielinski K. 4587 К
Zurmühl R. 4939 К
Zuse K. 4990 К
Zygmund A. 4416

小田中敏男 4673
屠寶瑜 4330
杜朗 P. 4328
柳孟輝 4409
橋爪夏樹 4678
潘文熙 4567
王壽仁 4674, 4675
藤田輝男 4255
趙訪熊 4922
黃崇智 4566

К реф. 2391 (1954 г.)

В предпоследней строке вместо слова «идет» следует читать «ищет».

К реф. 1859 и 3317 (1955 г.)

Выходные данные статьи следует читать следующим образом: Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 4, ... (вместо 1953, 75, № 23).

К реф. 4211 (1955 г.)

Последнюю строку реферата следует читать: «... единственными сингулярными р. п. кривой...» И. П. Кубилюс

К реф. 5352 (1955 г.)

На строке 17-й вместо слова «Реф.» следует читать «Ред.»
В. И. Шестаков

К реф. 305 (1956 г.)

На стр. 58, строка 14 сверху, вместо $K^*(F)$ должно быть «типа $K^*(F)$». Л. Д. Кудрявцев

К реф. 986 (1956 г.)

На стр. 12, 2 строка снизу вместо «рациональная» следует читать «рациональна». А. Б. Шидловский

К реф. 1247 (1956 г.)

Равенство в строке 9 сверху должно быть заменено таким:

$$\widetilde{U}_n^{(1)}(f;\ x) = \sum_{\kappa=1}^{n} l_{n\kappa}(x) \cdot {}^1\!/_4 \left[f(x_{n,\ \kappa-1}) + 2f(x_{n,\ \kappa}) + f(x_{n,\ \kappa+1})\right].$$

К реф. 1455 (1956 г.)

Последнюю строчку реферата следует читать так: «...тогда ряд Σ_{an} сходится к сумме A». А. Г. Постников

К реф. 1910 (1956 г.)

На стр. 7 пункт (А) теоремы 2 следует читать следующим образом: (А) B рекурсивен относительно $(A_1 \cup \ldots \cup A_m)$;

К реф. 2234 (1956 г.)

В предпоследнем абзаце вместо слов «Среди решений w уравнения (1) ...» следует читать: «Среди решений уравнения $\Delta^2 u = f$».
З. Х. Рафальсон

К реф. 2304 (1956 г.)

1) вместо $d_s = \lim s_n^{\cdot}$; $d_\sigma = \lim \sigma_n$; $d_\varphi = \lim \varphi(u)$ должно быть:

$$d_s = \mathbf{lim}\ s_n;\ d_\sigma = \mathbf{lim}\ \sigma_n;\ d_\varphi = \mathbf{lim}\ \varphi(u)$$

2) Индексы c у V и W везде должны быть прописными.
М. П. Щегольков

К реф. 3394 (1956 г.)

Строку 6 реферата следует читать следующим образом: «построена миниатюрная вычислительная машина».

Технический редактор *В. В. Гражданкина*